Mechanik des Himmels

von

P. S. Laplace,

Mitgliede des Französischen National-Instituts und der Commission für die Meeres-Länge.

Aus dem Französischen übersetzt und mit erläuternden Anmerkungen versehen

von

J. C. Burckhardt.

Erster Theil.

Berlin
bey F. T. LaGarde,
1800.

Bibliotheca Casimiriana

Ls A 3986

Bibliotheca Casimiriana

Der

Durchlauchtigsten Fürstinn

Maria Carolina Amalia,

regierenden Herzoginn zu Gotha,

widmet

dieses unsterblichen Werkes

Uebersetzung

zum öffentlichen Zeichen

seiner unbegräntzten und ehrfurchtsvollsten

Dankbarkeit

J. C. Burckhardt.

Elemente der elliptischen Bewegung

und

der Massen der Planeten,

nach der Exposition du système du monde par P. S. Laplace. II. ed. p. 115 und 193.

Der Uebersetzer schmeichelt sich durch folgende beym Gebrauch dieses Werkes nothwendige Tafel dem Leser einen angenehmen Dienst erzeigt zu haben. Er hat hier, so wie in dem ganzen Werke, die ältern Eintheilungen den neuern beygefügt, und er glaubt hierdurch zur Verbreitung des so wichtigen neuen Maaſs- und Gewicht-Systems beygetragen zu haben. Er hat die in dieser Tafel vorkommenden Verwandlungen doppelt gemacht, auch die beygefügten Logarithmen zweymal gesucht, und er glaubt daher für ihre Richtigkeit bürgen zu können.

Dauer der Syderal-Umläufe.

	Tage		
Merkur . . .	87,969255	dessen Logarithmus	1.9443310
Venus . . .	224,700817	. . .	2.3516047
Die Erde . . .	365,256384	. . .	2.5625978
Mars . . .	686,979579	. . .	2.8369439
Jupiter . . .	4332,602208	. . .	3.6367488
Saturn . . .	10759,077213	. . .	4.0317750
Uranus . . .	30689,000000	. . .	4.4869827

Tägliche Syderal-Bewegungen.

	Decimaleintheilung.		Sexagesimaleintheilung.
Merkur . . .	4^G,5470432	. . .	4°. 5'. 32'',420
Venus . . .	1, 7801448	. . .	1. 36. 7,668
Die Erde . . .	1, 095121	. . .	0. 59. 8,192
Mars . . .	0, 5822589	. . .	0. 31. 26,519
Jupiter . . .	0, 0923233	. . .	0. 4. 59,127
Saturn . . .	0, 0371779	. . .	0. 2. 0,453
Uranus . . .	0, 0130340	. . .	0. 0. 42,131

Syderal-Bewegungen während eines Jahrs von 365 Tagen.

	Decimaleintheilung.	Sexagesimaleintheilung.
Merkur . . .	$4^{Per}. 59^{G},67076$	$4^{Per}. 1^{z}.23°.42'.13'',25$
Venus . . .	1 . 249, 75287	1 . 7 . 14 . 46 . 39, 29
Die Erde . . .	399, 71923	11 . 29 . 44 . 50, 30
Mars . . .	212, 52451	6 . 11 . 16 . 19, 42
Jupiter . . .	33, 69800	1 . 0 . 19 . 41, 52
Saturn . . .	13, 56993	0 . 12 . 12 . 46, 57
Uranus . . .	4, 75740	0 . 4 . 16 . 53, 99

Halbe grosse Axen der Bahnen, oder mittlere Entfernungen.

Merkur . . .	0,387100	ihr Logarithmus	9.5878232
Venus . . .	0,723332	. . .	9.8593377
Die Erde . . .	1,000000	. . .	0.0000000
Mars . . .	1,523693	. . .	0.1828975
Jupiter . . .	5,202778	. . .	0.7162353
Saturn . . .	9,538785	. . .	0.9794930
Uranus . . .	19,183475	. . .	1.2829273

Verhältniss der Eccentricität zur halben grossen Axe zu Anfang des Jahres 1750.

Merkur . . .	0,205513	sein Logarithmus	9.3128394
Venus . . .	0,006885	. . .	7.8379039
Die Erde . . .	0,016814	. . .	8.2256710
Mars . . .	0,093088	. . .	8.9688937
Jupiter . . .	0,048077	. . .	8.6819374
Saturn . . .	0,056223	. . .	8.7499140
Uranus . . .	0,046683	. . .	8.6691588

Sekular-Aenderungen dieses Verhältnisses.

(Das Zeichen — zeigt eine Abnahme an).

Merkur	0,000003369
Venus	— 0,000062905
Die Erde	— 0,000045572
Mars	0,000090685
Jupiter	0,000134245
Saturn	— 0,000261553
Uranus	— 0,000026228

Mittlere Längen zu Anfange des Jahrs 1750.

(Diese Längen sind von der mittlern Frühlingsnachtgleiche gezählt; die Epoche ist der 31 ste December 1749. Mittag, mittlere Zeit zu Paris).

Merkur	281^G, 3194	8ᶻ. 13°. 11′. 14″, 8
Venus	51, 4963	1. 16. 20. 48
Die Erde	311, 1218	9. 10. 0. 34, 6
Mars	24, 4219	0. 21. 58. 47
Jupiter	4, 1201	0. 3. 42. 29, 1
Saturn	257, 0438	7. 21. 20. 21, 9
Uranus	353, 9610	10. 18. 33. 53, 6

Längen der Sonnennähe zu Anfange des Jahrs 1750.

Merkur	81^G, 7401	2ᶻ. 13°. 33′. 58″
Venus	141, 9759	4. 7. 46. 42
Die Erde	309, 5790	9. 8. 37. 16
Mars	368, 3006	11. 1. 28. 14
Jupiter	11, 5012	0. 10. 21. 4
Saturn	97, 9466	2. 28. 9. 7
Uranus	185, 1262	5. 16. 36. 49

Syderal- und Sekular-Bewegungen der Sonnenferne.

(Das Zeichen — zeigt eine rückgängige Bewegung an).

	Decimaleintheilung.	Sexagesimaleintheilung.
Merkur	1735″, 50	562″, 30
Venus	— 699, 07	— 226, 50
Die Erde	3671, 63	1189, 61
Mars	4834, 57	1566, 40
Jupiter	2030, 25	657, 80
Saturn	4967, 64	1609, 51
Uranus	759, 85	246, 19

Neigung der Bahn gegen die Ekliptik zu Anfange des Jahrs 1750.

Merkur	7^G, 7778	7°. 0′. 0″
Venus	3, 7701	3. 23. 35
Die Erde	0, 0000	0. 0. 0
Mars	2, 0556	1. 51. 1
Jupiter	1, 4636	1. 19. 2
Saturn	2, 7762	2. 29. 55
Uranus	0, 8599	0. 46. 26

Sekular - Aenderung der Neigung gegen die wahre Ekliptik.

	Decimaleintheilung.	Sexagesimaleintheilung.
Merkur . . .	55″, 09	 17″, 85
Venus . . .	13, 80	 4, 47
Die Erde . . .	0, 00	 0, 00
Mars . . .	— 4, 45	 — 1, 44
Jupiter . . .	— 67, 40	 — 21, 84
Saturn . . .	— 47, 87	 — 15, 51
Uranus . . .	9, 38	 3, 04

Länge des aufsteigenden Knotens auf der Ekliptik zu Anfange des Jahrs 1750.

Merkur . . .	50^G, 3836	. . . $1^z . 15^\circ . 20' . 43''$
Venus . . .	82, 7093	. . . 2 . 14 . 26 . 18
Die Erde . . .	0, 0000	. . . 0 . 0 . 0 . 0
Mars . . .	52, 9377	. . . 1 . 17 . 38 . 38
Jupiter . . .	108, 8062	. . . 3 . 7 . 55 . 32
Saturn . . .	123, 9327	. . . 3 . 21 . 32 . 22
Uranus . . .	80, 7015	. . . 2 . 12 . 37 . 53

Syderal- und Sekular - Bewegungen des Knotens auf der wahren Ekliptik.

	Decimaleintheilung.	Sexagesimaleintheilung.
Merkur . . .	— 2332″, 90	. . . — 755″, 86
Venus . . .	— 5673, 60	. . . — 1838, 25
Die Erde . . .	0, 00	. . . 0, 00
Mars . . .	— 7027, 41	. . . — 2276, 88
Jupiter . . .	— 4509, 50	. . . — 1461, 08
Saturn . . .	— 5781, 54	. . . — 1873, 22
Uranus . . .	— 10608, 00	. . . — 3436, 99

Massen der Planeten, die der Sonne als Einheit angenommen.

Merkur . . .	$\frac{1}{2025810}$	ihr Logarithmus	3.6934012
Venus . . .	$\frac{1}{383137}$	. . .	4.4166458
Erde . . .	$\frac{1}{329630}$	. . .	4.4819733
Mars . . .	$\frac{1}{1846082}$	. . .	3.7337489
Jupiter . . .	$\frac{1}{1067{,}09}$	. . .	6.9717990
Saturn . . .	$\frac{1}{3359{,}40}$	. . .	6.4737383
Uranus . . .	$\frac{1}{19504}$	. . .	5.7098763

Mechanik des Himmels.

Gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts machte Newton seine Entdeckung der allgemeinen Schwere öffentlich bekannt. Seit dieser Epoche ist es den Geometern gelungen, alle bekannte Erscheinungen des Weltsystems auf dieses grofse Gesetz der Natur zurückzuführen, und so den astronomischen Theorien und Tafeln eine ungehoffte Genauigkeit zu verschaffen. Mein Zweck ist, diese in einer grofsen Anzahl von Werken zerstreute Theorien unter einem Gesichtspunkt darzustellen. Vereinigt umfassen sie alle Resultate der allgemeinen Schwere über das Gleichgewicht und über die Bewegungen der festen und flüssigen Körper, die unser Sonnensystem und ähnliche in dem unermefslichen Raum des Himmels verbreitete Systeme ausmachen, und bilden die Mechanik des Himmels. Betrachtet man die Astronomie auf die allgemeinste Art, so ist sie eine grofse Aufgabe der Mechanik, wovon die Bestimmungsstücke der himmlischen Bewegungen die willkührlichen Gröfsen sind; die Auflösung derselben hängt also zu gleicher Zeit von der Genauigkeit der Beobachtungen und von der Vollkommenheit der Analysis ab, und es ist von der höchsten Wichtigkeit, alle blofs aus der Erfahrung geschöpfte Sätze zu verbannen und sie darauf zurückzuführen, dafs man von der Beobachtung nichts als die unerläfslich nothwendigen Data nimmt. So weit es mir möglich gewesen ist, habe ich diesen so interessanten Gegenstand in diesem Werke zu erreichen gesucht. Ich wünsche, dafs es die Geometer und Astronomen in Rücksicht auf die Wichtigkeit und die Schwierigkeiten dieses Gegenstandes mit Nachsicht aufnehmen, und die Resul-

tate hinreichend einfach finden mögen, um sich derselben in ihren Untersuchungen zu bedienen. Das Werk wird in zwey Theile abgetheilt werden. Im ersten werde ich die Methoden und Formeln geben, um die Bewegungen der Mittelpunkte der Schwere der himmlischen Körper, die Gestalt dieser Körper, die Oscillationen der Flüssigkeiten, die sie bedecken, und ihre Bewegungen um ihre eigenen Mittelpunkte der Schwere zu bestimmen. Im zweyten Theile werde ich die im ersten gefundenen Formeln auf die Planeten, Satelliten und Kometen anwenden; ich werde ihn mit der Untersuchung verschiedener Fragen, die Bezug aufs Weltsystem haben, und mit einer historischen Nachricht von den Arbeiten der Geometer über diesen Gegenstand beschliefsen. Ich werde die Decimaleintheilung des rechten Winkels und des Tages annehmen, und die linearischen Messungen auf die Länge des Meters, die durch den Bogen des Erdmittagskreises zwischen Dünkirchen und Barcelona bestimmt worden, zurückführen *).

*) Der Uebersetzer hält es für nöthig, die Data und Resultate der Rechnungen auch nach der gewöhnlichen Eintheilung des rechten Winkels und des Tages, und die Längen in französischen Fufsen oder Toisen und deren Theilen zu geben. So oft nur eine einfache Verwandlung nöthig ist, wird er die den neuern Eintheilungen entsprechenden ältern Eintheilungen unmittelbar, in Klammern eingeschlossen, beyfügen. So oft aber eine doppelte Verwandlung nöthig ist, wie z. B. bey der Länge des Sekundenpendels, wird er in einer Anmerkung diese Vergleichung geben.

Erster

Erster Theil.

Allgemeine Theorie der Bewegungen und der Gestalt der himmlischen Körper.

Erstes Buch.

Ueber die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung.

In diesem Buche werden die allgemeinen Grundsätze des Gleichgewichts und der Bewegung der Körper festgesetzt, und die Aufgaben der Mechanik, die in der Theorie des Weltsystems vorkommen, aufgelöset werden.

Erstes Kapitel.

Vom Gleichgewicht und der Zusammensetzung der Kräfte, die auf einen körperlichen Punkt wirken.

1. Wenn ein Körper seine Lage gegen ein System von Körpern, die wir für ruhend halten, ändert, so scheint er uns sich zu bewegen. Da aber alle Körper, selbst diejenigen, welche in der absolutesten Ruhe zu seyn scheinen, in Bewegung seyn können, so denkt man sich einen unbegränzten, unbeweglichen und der Materie undurchdringbaren Raum, und wir beziehen in Gedanken die Lage der Körper auf die Theile dieses wirklichen oder eingebildeten Raums; wir halten sie in Bewegung, wenn sie nach und nach den verschiedenen Stellen dieses Raums entsprechen.

Die Natur dieser sonderbaren Eigenschaft, vermittelst welcher ein Körper von einem Orte in einen andern versetzt wird, ist und wird immer unbekannt seyn; man hat sie mit dem Namen Kraft bezeichnet, man kann aber nur ihre Wirkungen und die Gesetze ihrer Thätigkeit bestimmen. Die Wirkung einer Kraft gegen einen körperlichen Punkt besteht darin, dafs sie ihn in Bewegung setzt, wenn es durch nichts gehindert wird; die Richtung der Kraft ist die gerade Linie, welche sie ihn beschreiben zu lassen strebt. Es ist augenscheinlich, dafs, wenn zwey Kräfte in der nämlichen Richtung wirken, die eine zur andern hinzugesetzt wird, und dafs, wenn sie in entgegengesetzter Richtung wirken, der Punkt sich nur mit ihrem Unterschiede bewegt. Wenn ihre Richtungen einen Winkel unter sich machen, so entsteht daraus eine Kraft, deren Richtung zwischen denen der zusammensetzenden Kräfte fallen wird. Wir wollen nun diese zusammengesetzte Kraft und ihre Richtung untersuchen.

Zu diesem Endzweck wollen wir zwey Kräfte x und y betrachten, die zu gleicher Zeit auf den körperlichen Punkt M wirken, und unter sich einen rechten Winkel machen. Es sey z die zusammengesetzte Kraft und θ der Winkel, welchen sie mit der Richtung der Kraft x macht. Da die beiden Kräfte x und y gegeben sind, so wird der Winkel θ und die zusammengesetzte Kraft z auf die Art bestimmt seyn, dafs zwischen den drey Gröfsen x, z und θ eine Beziehung vorhanden ist, die wir jetzt kennen lernen wollen.

Wir wollen anfangs die Kräfte x und y unendlich klein und die Differenziale dx und dy gleich setzen; wir wollen ferner annehmen, dafs, indem x nach und nach dx, $2dx$, $3dx$ *etc.* wird, y auch dy, $2dy$, $3dy$ *etc.* werde; es ist klar, dafs der Winkel θ sich beständig gleich bleiben und die zusammengesetzte Kraft nach und nach dz, $2dz$, $3dz$ *etc.* werden wird; folglich bleibt das Verhältnifs zwischen x und y während des allmähligen Anwachsens der drey Kräfte x, y und z beständig und kann durch eine Funktion von θ ausgedrückt werden, die wir durch $\phi(\theta)$ bezeichnen wollen.[1]) Man wird also haben $x = z.\phi(\theta)$, eine Gleichung, in welcher man x in y verwandeln kann, wofern

1) Die Gedanken des Hrn. Verf. lassen sich noch auf folgende Art darstellen: man mufs als Grundsatz annehmen, dafs, wenn die Wirkung der Kräfte x und y in einer gegebenen Zeit, z. B. in einer Sekunde, dx und dy ist, dieser Kräfte Wirkung in der doppelten Zeit $2dx$, $2dy$ seyn werde u. s. w. Die Wirkung dieser Kräfte und also die Kräfte selbst haben folglich in jedem Zeitmoment das näm-

man nur den Winkel θ in $\frac{\pi}{2} - \theta$ verwandelt, wo π den halben Umkreis für den Halbmesser $= 1$ bedeutet. [2])

Jetzt kann man die Kraft x als die Zusammengesetzte zweyer Kräfte x' und x'' betrachten, wovon die erste x' in der Richtung der Zusammengesetzten z ist, und wovon die zweyte x'' senkrecht auf diese Richtung ist. Da die Kraft x, die aus diesen beiden neuen Kräften zusammengesetzt ist, mit der Kraft x' den Winkel θ, und mit der Kraft x'' den Winkel $\frac{\pi}{2} - \theta$ bildet, so wird man haben

$$x' = x \cdot \phi(\theta) = \frac{x^2}{z}; \qquad x'' = x \cdot \phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{xy}{z};$$ [3])

man kann also diese beiden Kräfte statt der Kraft x substituiren. Auf eine ähnliche Art kann man statt der Kraft y zwey neue y' und y'' setzen, wovon die erste $= \frac{y^2}{z}$ und in der Richtung der Kraft z ist, und wovon die zweyte $\frac{xy}{z}$ und senkrecht auf z ist. [4]) Auf diese Art erhält man statt der beiden Kräfte x und y die vier folgenden:

$$\frac{x^2}{z}, \quad \frac{y^2}{z}, \quad \frac{xy}{z}, \quad \frac{xy}{z};$$

liche Verhältniſs, und der Winkel θ, der nur vom Verhältniſs dieser beiden Kräfte abhängen kann, ist beständig, weil dieses Verhältniſs sich nicht ändert. Auch muſs, wenn die aus dx und dy entstehende Kraft dz ist, aus $2dx$ und $2dy$, $2dz$ entstehen u. s. w., so daſs die Kräfte x, y, z ein beständiges Verhältniſs gegen einander haben, welches man durch eine Funktion der beständigen Gröſse θ ausdrücken kann.

2) Setzt man y statt x in der gefundenen Formel, so muſs man auch statt des Winkels θ, den x mit z macht, den Winkel setzen, den y mit z macht; er ist $90^\circ - \theta$, weil x und y einen rechten Winkel machen. Statt 90° muſs man $\frac{\pi}{2} = \frac{3,14159\ldots}{2}$ setzen, weil man die Bogen und trigonometrischen Linien durch eine und dieselbe Einheit, durch den Halbmesser, ausdrücken muſs. Man findet also $y = z \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

3) Aus der obigen Gleichung für x findet man $\varphi(\theta) = \frac{x}{z}$, so wie aus der in der Anmerkung [2]) gegebenen $\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{y}{z}$.

4) Nämlich $y' = y \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{y^2}{z}$ und $y'' = y \cdot \varphi(\theta) = \frac{yx}{z}$.

die beiden letztern wirken in entgegengesetzter Richtung und heben sich also auf;[5]) die beiden ersten wirken in der nämlichen Richtung, ihre Summe bildet die zusammengesetzte Kraft z, folglich wird man haben

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

woraus folgt, dafs die Zusammengesetzte zweyer Kräfte x und y in Rücksicht auf die Gröfse durch die Diagonale eines Rechtecks dargestellt wird, wovon die Seiten die beiden Kräfte darstellen.

Wir wollen nun den Winkel θ bestimmen. Wenn man die Kraft x um das Differenzial dx, ohne die Kraft y zu ändern, wachsen läfst, so wird dieser Winkel sich um eine unendlich kleine Gröfse $d\theta$ vermindern; man kann aber die Kraft dx in zwey andere zerlegt sich vorstellen, wovon die eine dx' in der Richtung von z, die andere dx'' aber senkrecht auf dieser Richtung ist; den Punkt M werden also die zwey auf einander senkrechten Kräfte $z + dx'$ und dx'' zu bewegen streben, und die Zusammengesetzte dieser beiden Kräfte, die wir z' nennen wollen, wird mit dx'' den Winkel $\frac{\pi}{2} - d\theta$ machen,[6]) man wird also vermöge des Vorhergehenden haben

$$dx'' = z' . \phi(\frac{\pi}{2} - d\theta);$$

die Funktion $\phi(\frac{\pi}{2} - d\theta)$ ist folglich unendlich klein, und hat die Form $- kd\theta$, wo k eine beständige, vom Winkel θ unabhängige, Gröfse ist. Man hat also

$$\frac{dx''}{z'} = - kd\theta.$$

z' ist nur um ein unendlich Kleines von z unterschieden; überdies macht dx'' mit dx den Winkel $\frac{\pi}{2} - \theta$, man hat also

$$dx'' = dx. \phi(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{y dx}{z}$$

5) Weil z zwischen den Kräften x und y liegt, so sind die auf z senkrechten Kräfte x'' und y'' auf entgegengesetzten Seiten von z, und wirken also in entgegengesetzter Richtung.

6) Der Winkel zwischen z und z' ist $d\theta$, der Winkel zwischen z und dx'' ist ein rechter, also der dritte Winkel des Dreyecks, der Winkel zwischen z' und $dx'' = 90° - d\theta = \frac{\pi}{2} - d\theta$; ich rathe hierbey ein für allemal, sich die Lage der Winkel durch eine Figur deutlich zu machen.

und folglich

$$d\theta = \frac{-y\,dx}{k.z^2}$$

Wenn man die Kraft y um dy sich ändern läſst, und dabey x beständig annimmt, so wird man die daraus entspringende Änderung des Winkels θ erhalten, wenn man in der vorhergehenden Gleichung x in y, y in x und θ in $\frac{\pi}{2} - \theta$ verwandelt; dieſs giebt

$$d\theta = \frac{x\,dy}{k.z^2}.$$

Läſst man also x und y zugleich sich ändern, so wird die gänzliche Änderung des Winkels θ seyn $\frac{x\,dy - y\,dx}{k.z^2}$, und man wird also haben

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{z^2} = k\,d\theta.$$

Setzt man für z^2 seinen Werth $x^2 + y^2$ und integrirt, so erhält man[7])

$$\frac{y}{x} = \text{tang}\,(k\theta + \varrho)$$

wo ϱ eine willkührliche beständige Gröſse ist. Verbindet man diese Gleichung mit der $x^2 + y^2 = z^2$, so erhält man

$$x = z.\cos\,(k\theta + \varrho).$$

Jetzt müssen wir noch bloſs die beiden beständigen Gröſsen k und ϱ kennen lernen;

7) Man erhält, wenn man den Werth von z^2 substituirt $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = k\,d\theta$ oder

$$k\,d\theta = \left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right)\left(\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right)$$

Der erste Factor ist $= d.\frac{y}{x}$ und statt $k\,d\theta$ kann man setzen $d.k\theta$ folglich $d.k\theta = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \frac{y^2}{x^2}}$

Diese Differentialgleichung zeigt offenbar, daſs $\frac{y}{x}$ eine trigonometrische Linie des Bogens $k\theta$ ist. Man versuche die Tangente, weil dadurch der Divisor auch eine trigonometrische Linie, nämlich das Quadrat Secante wird. Um der beständigen Gröſse willen, die man bey jeder Integration hinzusetzen muſs, setze man $\frac{y}{x} = \text{tang}\,(k\theta + \rho)$, dann ist $d\left(\frac{y}{x}\right) = d(k\theta + \rho).(1 + \text{tang}\,(k\theta + \rho)^2)$ und $1 + \frac{y^2}{x^2} = 1 + \text{tg}(k\theta + \rho)^2$ folglich der Quotient beider Gröſsen $= d(k\theta + \rho) = d.k\theta$.

es ist aber offenbar, wenn man $y = 0$ setzt, $z = x$ und $\theta = 0$; folglich $\cos \varrho = 1$ und $x = z . \cos k\theta$. Setzt man $x = 0$, so hat man $z = y$ und $\theta = \frac{1}{2}\pi$; ferner ist alsdann $\cos k\theta = 0$ und also $k = 2n + 1$, wo n eine ganze Zahl ist, oder x wird in diesem Falle allezeit $= 0$ seyn, wenn θ gleich $\frac{\frac{1}{2}\pi}{2n+1}$ seyn wird; wenn aber $x = 0$ ist, so hat man offenbar $\theta = \frac{1}{2}\pi$; also $2n + 1 = 1$ oder $n = 0$ und folglich

$$x = z . \cos \theta.$$

Hieraus folgt, daſs die Diagonale des Rechtecks, das aus den beiden geraden Linien, welche die beiden Kräfte x und y vorstellen, construirt worden, nicht nur die Gröſse, sondern auch die Richtung ihrer zusammengesetzten Kraft vorstellt. Man kann also für jede Kraft zwey andere setzen, welche die Seite eines Rechtecks bilden, wovon sie die Diagonale ist, und es ist leicht daraus herzuleiten, daſs man eine Kraft in drey andere zerlegen kann, welche die Seiten eines rechtwinklichten Parallelepipedums bilden, wovon sie die Diagonale ist[8]).

Es seyen also a, b, c die drey rechtwinklichte Koordinaten für den Endpunkt einer geraden Linie, welche irgend eine Kraft vorstellt, und deren Anfangspunkt zugleich der Anfang der Koordinaten ist. Diese Kraft wird durch die Funktion $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ausgedrückt werden, und wenn man sie parallel mit den drey Axen der a, der b und der c zerlegt, so wird jede der einzelnen Kräfte durch ihre Koordinate ausgedrückt werden.[9])

8) Man kann diesen Satz noch auf folgende einfache Art beweisen. Ich weiſs zwar nicht, ob dieser Beweis neu ist; wo nicht so wird seine Einfachheit mich entschuldigen, wenn ich ihn hier anführe. Aus dem Satz, daſs das Verhältniſs der Kräfte x, y, z beständig ist, und daſs die Winkel, die sie unter einander machen, von den Verhältnissen dieser Kräfte abhängen, folgt nothwendig, daſs das Verhältniſs zweyer Kräfte durch eine Funktion des Winkels, den sie machen, gegeben seyn muſs. Wenn also z mit x den Winkel θ und mit y den Winkel λ macht, so muſs z gleich seyn der Kraft x multiplicirt mit einer Funktion von θ + der Kraft y multiplicirt mit der nämlichen Funktion von λ. Nun ist aber für den Fall, daſs die Kräfte x und y in entgegengesetzter Richtung wirken, $\theta = 0°$; $\lambda = 180°$ und $z = x - y$, also ist die gesuchte Funktion des Winkels für $0° = + 1$ und für $180° = - 1$ und ist folglich der **Cosinus.** Man hat also

$$z = x . \cos \theta + y . \cos \lambda$$

eine Formel, die sogleich zeigt, daſs z die Diagonale des aus x, y und $(\theta + \lambda)$ construirten Parallelogramms ist.

9) Die Kräfte a, b sind in Einer Ebene, die Diagonale $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ drückt die aus beiden Kräften entstehende Kraft aus. Verbindet man diese Kraft d mit der auf der Ebene der a, b, und also auf d

Es seyen a', b', c' die Koordinaten einer zweyten Kraft, so werden $a + a'$, $b + b'$, $c + c'$ die Koordinaten der aus beiden Kräften Zusammengesetzten seyn, und sie werden die einzelnen Kräfte darstellen, in welche man sie parallel mit den drey Axen zerlegen kann. Hieraus kann man leicht herleiten, daſs diese Zusammengesetzte die Diagonale des aus beiden Kräften construirten Parallelogramms ist.

Im Allgemeinen, wenn a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' etc. die Koordinaten irgend einer Anzahl Kräfte sind, so werden $a+a'+a''+$ etc.; $b+b'+b+$ etc.; $c+c'+c''+$ etc. die Koordinaten der Zusammengesetzten seyn, wovon das Quadrat, der Summe der Quadrate der letztern drey Koordinaten gleich seyn wird; man wird also die Gröſse und die Lage dieser Zusammengesetzten haben.

2. Von irgend einem Punkt der Richtung einer Kraft S, welchen Punkt wir für den Anfangspunkt dieser Kraft nehmen wollen, ziehe man auf den körperlichen Punkt M eine gerade Linie, die wir s nennen wollen; x, y, z sind die drey rechtwinklichten Koordinaten, welche die Lage des Punkts M bestimmen, und a, b, c die Koordinaten für den Anfangspunkt der Kraft; man wird haben

$$s = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Wenn man die Kraft S parallel mit den drey Axen der x, y und z zerlegt, so werden die einzelnen entsprechenden Kräfte nach dem vorhergehenden § seyn

$$S.\frac{x-a}{s};\quad S.\frac{y-b}{s};\quad S.\frac{z-c}{s};$$ [10]) oder $$S.\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right);\quad S.\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right);\quad S.\left(\frac{\delta s}{\delta z}\right)$$

wo $\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)$, $\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right)$, $\left(\frac{\delta s}{\delta z}\right)$ nach der gebräuchlichen Bezeichnung die Koefficienten der Variationen δx, δy, δz in der Variation des vorhergehenden Ausdrucks von s anzeigen. [11])

senkrechten Kraft c, so wird die Diagonale $= \sqrt{d^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ die aus den 3 Kräften a, b, c zusammengesetzte Kraft ausdrücken.

10) $\frac{x-a}{s}$ ist der Cosinus des Winkels, den x mit s macht und so für die übrigen.

11) $\left(\frac{ds}{dx}\right) dx$ bezeichnet das partielle Differential von s in Beziehung auf x genommen, das heiſst so genommen, daſs man bloſs x als veränderlich betrachtet. Da nun

$$ss = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2, \text{ so ist } 2s\left(\frac{ds}{dx}\right) = \frac{d\ x-a)^2}{dx} = 2(x-a) \text{ oder } \left(\frac{ds}{dx}\right) = \frac{x-a}{s}.$$

Der Herr Verfasser bedient sich hier des Zeichens der Variationen, weil man in der Folge, wenn man die für einen einzelnen Punkt gegebenen Formeln auf einen Körper anwenden will, das Zeichen der Differentiale nöthig haben wird. M. s. la Grange Mechanique Analytique pag. 51.

Wenn man auf eine ähnliche Art s' die Entfernung des Punkts M von irgend einem Punkt in der Richtung einer andern Kraft S', der ebenfalls für den Anfangspunkt dieser Kraft genommen wird, nennt; so wird $S'.\left(\frac{\delta s'}{\delta x}\right)$ diese Kraft, parallel mit der Axe der x zerlegt, seyn, und so für jede andere Kraft; die Summe der Kräfte S, S', S'' etc., parallel mit dieser Axe zerlegt, wird seyn $\Sigma.S\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)$, wo das Zeichen Σ der endlichen Integrale, hier die Summe der Glieder $S.\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)$, $S'.\left(\frac{\delta s'}{\delta x}\right)$ etc. ausdrückt.

Es sey V die Zusammengesetzte aller Kräfte S, S' etc. und u die Entfernung des Punktes M von einem Punkte der Zusammengesetzten, den man für ihren Anfangspunkt nimmt; so wird $V.\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)$ der Ausdruck dieser Zusammengesetzten, parallel mit der Axe der x zerlegt, seyn; man hat also nach dem vorhergehenden §

$$V.\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right) = \Sigma.S.\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)$$

Eben so wird man haben

$$V.\left(\frac{\delta u}{\delta y}\right) = \Sigma.S.\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right); \quad V.\left(\frac{\delta u}{\delta z}\right) = \Sigma.S.\left(\frac{\delta s}{\delta z}\right);$$

multiplicirt man von diesen drey Gleichungen die erste mit δx, die zweyte mit δy, und die dritte mit δz, und addirt sie, so erhält man

$$V.\delta u = \Sigma.S.\delta s; \quad \text{(a)}$$

Diese letzte Gleichung hat Statt, was auch immer die Variationen δx, δy, δz seyn mögen; sie ist den drey vorhergehenden gleichgeltend. Wenn ihr zweytes Glied die vollständige Variation einer Funktion ϕ ist, so wird man $V\delta u = \delta\phi$ haben und folglich

$$V.\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right) = \left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right);$$

das heifst: die Summe aller Kräfte S, S' etc., die parallel mit der Axe der x zerlegt worden sind, ist der partiellen Differenz $\left(\frac{\delta\phi}{\delta x}\right)$ gleich. Dieser Fall hat im Allgemeinen Statt, wenn jede dieser Kräfte eine Funktion der Entfernung ihres Anfangspunktes vom Punkt M ist. Um alsdann die Zusammengesetzte aus allen diesen

Kräften

Kräften parallel mit irgend einer andern geraden Linie zu zerlegen, wird man das Integral $\Sigma . \int . S \delta s$ nehmen; man nenne dieses Integral Φ und betrachte es als eine Funktion von x und von zwey andern, unter einander und auf x senkrechten, geraden Linien; die partielle Differenz $\left(\frac{\delta \Phi}{\delta x}\right)$ wird die aus den Kräften S, S' u. s. w. zusammengesetzte, mit der geraden Linie x parallel zerlegte, Kraft seyn.

3. Wenn der Punkt M vermittelst aller der Kräfte, die ihn zu bewegen streben, im Gleichgewicht ist, so ist ihre Zusammengesetzte Null, und die Gleichung (a) wird

$$o = \Sigma . S . \delta s; \quad \text{(b)}$$

das heifst: im Fall des Gleichgewichts eines Punktes, den irgend eine Anzahl Kräfte zu bewegen streben, ist die Summe der Producte jeder Kraft mit dem Elemente seiner Richtung gleich Null.

Wenn der Punkt M gezwungen ist, auf einer krummen Oberfläche zu bleiben, so wird er eine Gegenwirkung von dieser Fläche erfahren, die wir mit R bezeichnen wollen. Diese Gegenwirkung ist dem Drucke gleich und vollkommen entgegengesetzt, welchen der Punkt auf die Oberfläche ausübt; denn, wenn man sich vorstellt, dafs die beiden Kräfte R und $-R$ den Punkt zu bewegen streben,[12]) so kann man annehmen, dafs die Kraft $-R$ durch die Gegenwirkung der Fläche aufgehoben ist, und dafs also der Punkt M die Oberfläche mit der Kraft $-R$ drückt; ferner ist die Kraft des Drucks eines Punktes auf eine Fläche auf ihr senkrecht, sonst könnte man sie in zwey zerlegen, in eine auf die Fläche senkrechte, welche durch die Fläche aufgehoben werden würde, und in eine mit der Fläche parallele, vermittelst welcher der Punkt keine Wirkung auf die Fläche haben würde, welches gegen die Voraussetzung ist. Wenn man also r die durch den Punkt M auf die Fläche gezogene senkrechte Linie nennt, welche durch irgend einen andern Punkt in dieser Richtung begränzt wird; so wird die Kraft R die Richtung dieser Senkrechten haben, und man wird zum zweyten Gliede der Gleichung (b) $R . \delta r$ hinzusetzen müssen, welches giebt[13])

12) Diefs ist erlaubt, weil die Summe der beiden Kräfte Null ist.

13) Die Bedingung, dafs der Punkt gezwungen ist, auf Einer Fläche zu bleiben, kann man analytisch dadurch ausdrücken, dafs man annimmt, dafs ihn eine neue Kraft R senkrecht von der Fläche zu entfernen sucht.

$$o = \Sigma . S . \delta s + R . \delta r; \quad (c)$$

— R wird alsdann die Zusammengesetzte aller Kräfte S, S' u. s. w. seyn, in so fern sie senkrecht auf die Fläche zerlegt worden ist.

Wenn man annimmt, daſs die willkührlichen Variationen δx, δy, δz der krummen Fläche angehören, auf welcher der Punkt bleiben muſs, so hat man aus der Natur der auf dieser Fläche Senkrechten $\delta r = o$;[14]) dadurch verschwindet $R . \delta r$ in der obigen Gleichung, und die Gleichung (b) hat also auch in diesem Falle Statt, wofern man nur eine der drey Variationen δx, δy, δz vermittelst der Gleichung für die Fläche eliminirt. Alsdann wird aber die Gleichung (b), die für den allgemeinen Fall dreyen Gleichungen gleichgeltend war, nur noch zweyen unterschiedenen Gleichungen gleichgelten, die man erhält, indem man die Koefficienten der beiden übrigbleibenden Differenziale einzeln gleich Null setzt. Es sey $u = o$ die Gleichung für die Fläche, die beiden Gleichungen $\delta r = o$ und $\delta u = o$ werden zu gleicher Zeit Statt haben; dies erfordert, daſs δr gleich sey $N . \delta u$, wo N eine Funktion von x, y, z ist. Um sie zu bestimmen, nennen wir a, b, c die Koordinaten des Anfangspunktes von r; man wird haben

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$$

woraus man erhält

$$\left(\frac{\delta r}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta r}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta r}{\delta z}\right)^2 = 1,$$[15])

Wird diese Kraft durch die Wirkung aller übrigen Kräfte aufgehoben, so wird der Punkt sicher auf der Fläche bleiben. Dadurch wird sogleich die Gröſse der Kraft R bestimmt; denn man erhält die Wirkung aller Kräfte in einer senkrechten Richtung auf die Fläche, wenn man die Zusammengesetzte aller Kräfte senkrecht auf die Fläche zerlegt. Dieser Gröſse ist die Kraft R gleich und entgegengesetzt; und zum Gleichgewicht eines Punktes, der auf einer Fläche sich bewegen muſs, wird also vermöge der Gleichung (b) erfordert, daſs die Summe aller gegebenen Kräfte und der Kraft R, jede mit dem Element ihrer Richtung multiplicirt, gleich Null ist; dies ist die Gleichung (c) in Worten ausgedrückt.

14) Wäre δr nicht gleich Null, so würde man diese Bewegung in drey andere, mit δx, δy, δz parallele, zerlegen können, welche man zu δx, δy, δz hinzusetzen müſste, um die wirklichen Bewegungen des Punktes in der Richtung der drey Axen zu erhalten; die wirklichen δx, δy, δz würden dann nicht mehr der Gleichung für die Fläche Genüge thun. Im Allgemeinen ist klar, daſs, so bald man δx, δy, δz so bestimmt, daſs sie der Gleichung für die Fläche Genüge thun, man dadurch auf die Bedingung, daſs der Punkt auf der Fläche bleiben muſs, schon Rücksicht genommen hat, und daſs man nun den Punkt als völlig frey betrachten, und die Gleichung (b) unmittelbar anwenden kann.

15) Was zu Anfang von §. 2 s hieſs, heiſst hier r, man darf also nur s mit r verwechseln um zu erhalten

$$\left(\frac{\delta r}{\delta x}\right) = \left(\frac{\delta s}{\delta x}\right) = \frac{x - a}{r}, \text{ eben so } \left(\frac{\delta r}{\delta y}\right) = \left(\frac{\delta s}{\delta y}\right) = \frac{y - a}{r} \text{ und } \left(\frac{\delta r}{\delta z}\right) = \frac{z - a}{r},$$

und folglich

$$N^2 . \left[\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right)^2 \right] = 1;$$ [16)]

macht man also

$$\lambda = R . \left[\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}};$$

so wird der Ausdruck $R . \delta r$ in der Gleichung (c) sich in $\lambda . \delta u$[17)] verwandeln und diese Gleichung wird werden

$$0 = \Sigma . S . \delta s + \lambda . \delta u;$$

eine Gleichung, in welcher man die Koefficienten der Variationen δx, δy, δz einzeln gleich Null setzen muſs, wodurch man drey Gleichungen erhält, welche aber wegen der unbestimmten Gröſse λ, die sie enthalten, nur so viel als zwey Gleichungen zwischen x, y, z gelten. Man kann also, anstatt eine der Variationen δx, δy, δz in der Gleichung (b) vermittelst der Differenzialgleichung für die Fläche zu eliminiren, der Gleichung (b) diese Gleichung mit einer unbestimmten Gröſse λ multiplicirt hinzusetzen, und alsdann die Variationen δx, δy, δz, als von einander unabhängig, betrachten. Diese Methode, die auch aus der Theorie der Elimination hergeleitet werden kann, vereinigt mit dem Vortheil, die Rechnung zu vereinfachen, noch den, den Druck $- R$, welchen der Punkt M gegen die Fläche ausübt, zu erkennen zu geben.

Wir wollen uns nun diesen Punkt in einem Kanal mit einfacher, oder doppelter Krümmung eingeschlossen denken; er wird durch diesen Kanal eine Gegenwirkung erfahren, die wir mit k bezeichnen wollen, und welche dem Druck, den der Punkt gegen den Kanal ausübt, gleich und entgegengesetzt seyn, und

folglich die Summe der Quadrate dieser partiellen Differenziale $= \frac{(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2}{r^2}$.

Der Zähler dieses Bruchs ist gleich r^2 und folglich der Werth des Bruchs $= 1$.

16) Da r und u Funktionen von x, y, z sind, so ist $\delta r = \left(\frac{\delta r}{\delta x}\right) . \delta x + \left(\frac{\delta r}{\delta y}\right) . \delta y + \left(\frac{\delta r}{\delta z}\right) . \delta z$ und $\delta u = \left(\frac{\delta u}{\delta x}\right) . \delta x + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right) . \delta y + \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right) . \delta z$. Wenn nun $\delta r = N . \delta u$, so werden auch die einzelnen von einander unabhängigen Theile dasselbe Verhältniſs haben, nämlich:

$$\left(\frac{\delta r}{\delta x}\right) = N . \left(\frac{\delta u}{\delta x}\right); \quad \left(\frac{\delta r}{\delta y}\right) = N . \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right); \quad \left(\frac{\delta r}{\delta z}\right) = N . \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right).$$

17) λ ist gleich $R . N$ und $\delta u = \frac{\delta r}{N}$, folglich $\lambda . \delta u = R . N . \frac{\delta r}{N} = R . \delta r$.

eine auf die Seite des Kanals senkrechte Richtung haben wird. Nun ist aber die krumme Linie, welche der Kanal bildet, der Durchschnitt zweyer Flächen, deren Gleichungen seine Natur ausdrücken werden; man kann also die Kraft k als die Zusammengesetzte der zwey Gegenwirkungen R und R' ansehen, welche der Punkt M von jeder der Oberflächen erfährt, weil die Richtungen der drey Kräfte R, R' und k senkrecht auf die Seite der krummen Linie und also in Einer Ebene sind. [18]) Nennt man also δr, $\delta r'$ die Elemente der Richtungen der Kräfte R und R' (Richtungen, wovon jede auf die zugehörende Fläche senkrecht ist,) so muſs man der Gleichung (b) die beiden Ausdrücke $R.\delta r$ und $R'.\delta r'$ hinzusetzen, wodurch sie in folgende verwandelt wird:

$$0 = \Sigma . S . \delta s + R . \delta r + R' . \delta r'. \quad \text{(d)}$$

Wenn man die Variationen δx, δy, δz so bestimmt, daſs sie den beiden Oberflächen zugleich, und folglich der durch den Kanal gebildeten krummen Linie angehören, so werden δr und $\delta r'$ gleich Null seyn, und die vorhergehende Gleichung wird sich in die Gleichung (b) verwandeln, welche also auch in dem Falle Statt haben wird, wo der Punkt in einem Kanal sich zu bewegen gezwungen ist, wofern man nur vermittelst der beiden Gleichungen, welche die Natur dieses Kanals ausdrücken, zwey der Variationen δx, δy, δz verschwinden läſst.

Wir wollen annehmen, daſs $u = 0$ und $u' = 0$ die Gleichungen der beiden Flächen sind, deren Durchschnitt den Kanal bildet. Wenn man dann

$$\lambda = R . \left[\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{\delta z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\lambda' = R' . \left[\left(\frac{\delta u'}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta u'}{\delta y}\right)^2 + \left(\frac{\delta u'}{\delta z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

setzt, so wird die Gleichung (d) folgende werden:

$$0 = \Sigma . S . \delta s + \lambda \delta u + \lambda' \delta u';$$

eine Gleichung, in welcher man die Koefficienten jeder der drey Variationen δx, δy, δz einzeln gleich Null setzen wird; man wird so drey Gleichungen haben, vermittelst welcher man die Werthe von λ und λ' bestimmen wird, welche die Gegenwirkungen R und R' geben werden; und wenn man dieselben in Eine Kraft zusammensetzt, so wird man k, die Gegenwirkung des Kanals auf den

18) Zwey Linien, die sich schneiden, werden durch drey Punkte bestimmt, und sind also immer in Einer Ebene; die Kräfte R und R' sind folglich immer in einer Ebene, in welcher auch die Kraft k seyn muſs, weil sie aus beiden Kräften R und R' zusammengesetzt ist.

Punkt M, erhalten, und folglich auch den Druck, welchen dieser Punkt gegen den Kanal ausübt. Zerlegt man diese Gegenwirkung parallel mit der Axe der x, so erhält man für sie

$$R.\left(\frac{\delta r}{\delta x}\right) + R'.\left(\frac{\delta r'}{\delta x}\right) \text{ oder } \lambda.\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right) + \lambda'.\left(\frac{\delta u'}{\delta x}\right);$$

die Bedingungsgleichungen $u = 0$ und $u' = 0$, welchen die Bewegung des Punktes M unterworfen ist, drücken also vermittelst der partiellen Differenzen der Funktionen, welche vermöge dieser Gleichungen Null sind, die Widerstände aus, welche der zu bewegende Körper zufolge der Bedingungen seiner Bewegung erfährt.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, daſs die Gleichung (b) des Gleichgewichts allgemein Statt hat, wofern man nur die Variationen δx, δy, δz den Bedingungen, unter welchen das Gleichgewicht Statt haben soll, unterwirft. Man kann diese Gleichung in folgendem Satz ausdrücken:

„Wenn man die Lage des Punktes M unendlich wenig sich ändern läſst, „so daſs er, wenn er nicht ganz frey ist, immer auf der Fläche oder auf der „krummen Linie bleibt, die er beschreiben soll, so wird im Fall des Gleichge- „wichts die Summe der Producte der bewegenden Kräfte in den Raum, welchen „der Punkt nach der Richtung jeder Kraft durchläuft, gleich Null seyn."

Da man die Variationen δx, δy, δz willkührlich und von einander unabhängig annimmt, so kann man in der Gleichung (a) statt der Koordinaten x, y, z drey andere Gröſsen, die Funktionen dieser Koordinaten sind, einführen, und die Koefficienten der Variationen dieser Gröſsen gleich Null setzen. Wir wollen auf diese Art ϱ den Halbmesser nennen, der vom Anfangspunkt der Koordinaten an den auf die Ebene der x und y projicirten Punkt M gezogen worden, und ϖ den Winkel, den ϱ mit der Axe der x macht, wir werden dann haben

$$x = \varrho.\cos\varpi; \qquad y = \varrho.\sin\varpi.$$

Wenn man also in der Gleichung (a) u, s, s' u. s. w. als Funktionen von ϱ, ϖ und z betrachtet, und die Koefficienten von $\delta\varpi$ mit einander vergleicht, so wird man haben

$$V.\left(\frac{\delta u}{\delta\varpi}\right) = \Sigma.S.\left(\frac{\delta s}{\delta\varpi}\right); \quad \text{(e)}$$

$\frac{V}{\varrho} . \left(\frac{\delta u}{\delta \varpi}\right)$ ist der Ausdruck der Kraft V, wenn sie nach der Richtung des Elements $\varrho . \delta \varpi$ zerlegt wird.[19]) Es sey V' diese Kraft, parallel mit der Ebene der x und y zerlegt, und p die von der Axe der z auf die Richtung von V' gefällte senkrechte Linie, die parallel mit der nämlichen Ebene ist, so wird $\frac{p V'}{\varrho}$ ein zweyter Ausdruck der nach der Richtung des Elements $\varrho \delta \varpi$ zerlegten Kraft V seyn; man wird also haben

$$p V' = V . \left(\frac{\delta u}{\delta \varpi}\right).$$

Stellt man sich die Kraft V' am Ende der senkrechten Linie p angebracht vor, so wird sie dieselbe um die Axe der z zu drehen sich bestreben; das Product dieser Kraft und der senkrechten Linie nennt man das Moment der Kraft V in Beziehung auf die Axe der z; dieses Moment ist also dem Ausdruck $V . \left(\frac{\delta u}{\delta \varpi}\right)$ gleich, und es erhellet aus der Gleichung (e), daſs das Moment der aus irgend einer Anzahl von Kräften zusammengesetzten Kraft der Summe der Momente dieser Kräfte gleich ist.

19) Es sey ϖ'' der mit dem Halbmesser ϱ beschriebene Kreisbogen, der dem Winkel ϖ zugehört, $\delta \varpi''$ das Element dieses Kreisbogens, welches senkrecht auf dem Halbmesser ϱ seyn wird. Die Kraft V nach den Richtungen von ϱ, $\delta \varpi''$ und z zerlegen, heiſst eben so viel, als sie nach den Richtungen dreyer senkrechten Koordinaten zerlegen; man kann also die dafür zu Anfang von § 2 gegebenen Formeln unmittelbar anwenden, und die Kraft V nach der Richtung des Elements $\delta \varpi''$ zerlegt, wird gleich $V . \left(\frac{\delta u}{\delta \varpi''}\right)$ seyn. Da nun $\delta \varpi'' = \varrho . \delta \varpi$, so erhält man für diese Kraft den im Text gegebenen Ausdruck.

Zweytes Kapitel.

Von der Bewegung eines körperlichen Punktes.

4. Ein Punkt, der in Ruhe ist, kann sich keine Bewegung geben, weil er in sich selbst keinen Grund enthält, um sich in einer Richtung und nicht in einer andern zu bewegen. Wenn er von irgend einer Kraft bewegt und hernach sich selbst überlassen wird, so bewegt er sich beständig auf eine gleichförmige Art in der Richtung dieser Kraft, wenn er keinen Widerstand erfährt. Dieses Bestreben der Materie, im Zustande der Bewegung oder der Ruhe zu verharren, nennt man die Trägheit; und hierin besteht das erste Gesetz der Bewegung der Körper.

Die Richtung der Bewegung in gerader Linie folgt offenbar daraus, dafs kein Grund vorhanden ist, warum der Körper sich von seiner ursprünglichen Richtung mehr zur Rechten als zur Linken entfernen sollte; aber die Gleichförmigkeit seiner Bewegung hat nicht die nämliche Evidenz. Da die Natur der bewegenden Kraft unbekannt ist, so kann man unmöglich a priori wissen, ob diese Kraft sich ohne aufhören erhält. Es scheint in der That, dafs der Körper, der sich keine Bewegung selbst geben kann, eben so wenig fähig sey, die einmahl erhaltene Bewegung, zu ändern, so dafs das Gesetz der Trägheit wenigstens das natürlichste und das einfachste ist, das man erdenken kann. Uebrigens wird es durch die Erfahrung bestätigt: wir beobachten in der That auf der Erde, dafs die Bewegungen sich desto länger fortsetzen, je mehr die Hindernisse, die ihnen entgegenstehen, sich vermindern; dies veranlafst uns zu glauben, dafs sie ohne diese Hindernisse beständig dauern würden. Vorzüglich bemerkbar ist aber die Trägheit der Materie in den himmlischen Bewegungen, welche seit einer grofsen Anzahl Jahrhunderte keine bemerkbare Änderung erfahren haben. Wir werden also die Trägheit als ein Gesetz der Natur ansehen, und wenn wir eine Änderung in der Bewegung eines Körpers beobachten, so

werden wir annehmen, daſs diese Änderung von einer fremden Ursache herrühre.

In der gleichförmigen Bewegung verhalten sich die beschriebenen Räume wie die Zeiten; die Zeiten aber, die zur Beschreibung eines bestimmten Raumes angewendet werden, sind nach der Gröſse der bewegenden Kraft länger oder kürzer. Aus diesem Unterschiede ist der Begriff der Geschwindigkeit entstanden, welcher in der gleichförmigen Bewegung das Verhältniſs des Raums zur Zeit, die ihn zu beschreiben gebraucht wird, ausdrückt: wenn also s den Raum, t die Zeit, v die Geschwindigkeit bezeichnet, so hat man $v = \frac{s}{t}$. Da die Zeit und der Raum heterogene und also unvergleichbare Gröſsen sind, so wählt man einen bestimmten Zeitraum, z. B. eine Sekunde, für die Einheit der Zeit; man wählt auf eben die Art eine Einheit des Raums, z. B. den Meter. Alsdann sind Raum und Zeit abstracte Zahlen, welche ausdrücken, wie viel Einheiten ihrer Gattung sie enthalten, und welche man mit einander vergleichen kann. Die Geschwindigkeit wird so das Verhältniſs zweyer abstracten Zahlen, und ihre Einheit ist die Geschwindigkeit des Körpers, der einen Meter in einer Sekunde beschreibt.[20])

5. Da die Kraft nur durch den Raum bekannt ist, welchen sie in einer bestimmten Zeit beschreiben läſst, so ist es natürlich, diesen Raum für ihr Maaſs zu nehmen; dieses setzt aber voraus, daſs verschiedene in Einer Richtung wirkende Kräfte einen Raum werden beschreiben lassen, welcher der Summe der Räume gleich ist, welchen jede der Kräfte einzeln hätte beschreiben lassen. Dies können wir nicht a priori wissen, da die Natur der bewegenden Kraft uns unbekannt ist: wir müssen also auch über diesen Gegenstand die Erfahrung befragen; denn alles, was nicht eine unmittelbare Folge der wenigen Data ist, die wir über die Natur der Dinge haben, ist für uns nur ein Resultat der Beobachtung.

Wir nennen v die Geschwindigkeit der Erde, die allen Körpern auf ihrer Oberfläche gemein ist; es sey f die Kraft, welche auf einen dieser Kör-

per M

20) Drückt man die Zeiten in Sexagesimalsekunden, die Räume in Fuſsen aus, so ist die Einheit der Geschwindigkeiten die Geschwindigkeit desjenigen Körpers, welcher in einer gewöhnlichen Sekunde einen Fuſs durchläuft, und sie verhält sich zu der im Text gegebenen wie 1 : 3,564172.

per M wirken mufs, um ihm diese Geschwindigkeit zu geben, und wir nehmen an, dafs $v = f \cdot \Phi(f)$ [21]) das Verhältnifs zwischen der Kraft und der Geschwindigkeit ausdrückt, wo $\Phi(f)$ eine Funktion von f ist, die man aus der Erfahrung bestimmen mufs. Es sollen a, b, c die drey partiellen Kräfte seyn, in welche die Kraft f parallel mit drey untereinander senkrechten Axen zerlegt werden kann. Wir wollen uns ferner vorstellen, dafs auf den beweglichen Punkt M eine neue Kraft f' wirke, welche in die drey andern a', b', c' parallel mit eben den drey Axen zerlegt werden kann. Die Kräfte, welche diesen Punkt nach der Richtung der Axen zu bewegen streben, werden $a + a'$, $b + b'$, $c + c'$ seyn; und wenn man F die einzige daraus zusammengesetzte Kraft nennt, so wird man nach dem Vorhergehenden

$$F = \sqrt{(a+a')^2 + (b+b')^2 + (c+c')^2}$$

haben. Nennt man U die der Kraft F entsprechende Geschwindigkeit, so wird

$$\frac{(a+a')\,U}{F}$$

diese parallel mit der Axe der a zerlegte Geschwindigkeit seyn; die relative Geschwindigkeit des beweglichen Punktes auf der Erde, parallel mit dieser Axe, ist also

$$\frac{(a+a')\,U}{F} - \frac{a\,v}{f}, \text{ oder } (a+a') \cdot \Phi(F) - a \cdot \Phi(f).$$

Da nun die ansehnlichsten Kräfte, die wir gegen die Körper auf der Oberfläche der Erde anwenden können, weit kleiner sind, als diejenigen, welche durch die Bewegung der Erde auf sie wirken [22]), so können wir a', b', c' als unendlich kleine Gröfsen in Rücksicht auf f betrachten; man erhält so

$$F = f + \frac{aa' + bb' + cc'}{f}, \text{ und } \Phi(F) = \Phi(f) + \frac{aa' + bb' + cc'}{f} \cdot \Phi'(f); \text{ [23])}$$

21) Die Funktion der Kraft, welche die Geschwindigkeit ausdrückt, mufs f als gemeinschaftlichen Factor enthalten, weil dadurch Geschwindigkeit und Kraft zugleich Null sind, wie es die Natur der Sache erfordert.

22) Ein Punkt auf der Erde durchläuft vermöge ihrer jährlichen Bewegung 18000 Toisen in einer Sekunde, eine 24pfündige Kanonenkugel in der ersten Sekunde 200 Toisen. Man fehe Hrn. Lalande's Tafel der Geschwindigkeiten im Annuaire d. l. Rép. fr.

23) Es ist

$$F^2 = (a+a')^2 + (b+b')^2 + (c+c')^2,$$

oder wenn man die Quadrate der kleinen Gröfsen a', b', c' wegläfst

$$F^2 = a^2 + 2aa' + b^2 + 2bb' + c^2 + 2cc' = (a^2+b^2+c^2) + 2(aa'+bb'+cc') = f^2 + 2(aa'+bb'+cc')$$

Um F zu erhalten, zieht man aus dem leztern Ausdruck die Quadratwurzel vermittelst des binomifchen

wo $\Phi'(f)$ das Differential von $\Phi(f)$ mit df dividirt ist. Die relative Geschwindigkeit von M in der Richtung der Axe der a wird dadurch

$$a' \cdot \Phi(f) + \frac{a}{f} \cdot [aa' + bb' + cc'] \cdot \Phi'(f),$$ [24])

und seine relativen Geschwindigkeiten nach den Axen der b und der c sind

$$b' \cdot \Phi(f) + \frac{b}{f} \cdot [aa' + bb' + cc'] \cdot \Phi'(f),$$

$$c' \cdot \Phi(f) + \frac{c}{f} \cdot [aa' + bb' + cc'] \cdot \Phi'(f).$$

Da die Lage derAxen der a, der b und der c willkührlich ist, so können wir die Richtung der mitgetheilten Kraft (f') für die Axe der a annehmen, und alsdann werden b' und c' gleich Null seyn; die vorhergehenden Ausdrücke der relativen Geschwindigkeiten ändern sich dadurch in folgende:

$$a' \cdot \left(\Phi(f) + \frac{a^2}{f}\Phi'(f)\right); \quad \frac{ab}{f} \cdot a' \cdot \Phi'(f); \quad \frac{ac}{f} \cdot a' \cdot \Phi'(f).$$

Wenn $\Phi'(f)$ nicht gleich Null ist, so wird der bewegbare Körper vermöge der mitgetheilten Kraft a' eine relative, auf die Richtung dieser Kraft senkrechte, Geschwindigkeit haben, wofern b und c nicht Null sind; das heiſst, wofern die Richtung dieser Kraft nicht mit der der Bewegung der Erde zusammenfällt. Wenn man sich also vorstellt, daſs eine Kugel in Ruhe auf einer sehr ebenen horizontalen Fläche von der Grundfläche eines rechtwinklichten, nach der

Lehrsatzes, wobey man nur die beiden erstern Glieder nimmt, weil die folgenden die Quadrate von a', b', c' enthalten; man erhält so

$$F = (f^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} \cdot 2(aa' + bb' + cc')\,(f^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{oder} \quad F = f + \frac{aa' + bb' + cc'}{f}.$$

Hieraus folgt

$$\varphi(F) = \varphi\left(f + \frac{aa' + bb' + cc'}{f}\right).$$

Entwickelt man den leztern Ausdruck durch den Taylorschen Lehrsatz, so erhält man unmittelbar die im Text gegebene Formel.

24) Läſst man nämlich, wie immer, die Producte und Quadrate der kleinen Gröſsen a', b', c' weg, so wird

$$\begin{aligned} (a+a') \cdot \varphi(F) &= (a+a') \cdot \varphi(f) + a \cdot \left(\frac{aa' + bb' + cc'}{f}\right) \cdot \varphi'(f) \\ -a \cdot \varphi(f) &= -a \cdot \varphi(f) \end{aligned}$$

$$(a+a') \cdot \varphi(F) - a \cdot \varphi(f) = a' \cdot \varphi(f) + \frac{a}{f} \cdot (aa' + bb' + cc') \cdot \varphi'(f).$$

Die beiden folgenden Formeln erhält man, wenn man in der so eben gefundenen a, a' mit b, b' oder c, c' und umgekehrt b, c mit a verwechselt.

Richtung seiner Axe, die man als horizontal annimmt, bewegten Cylinders getroffen wird: so wird die scheinbare relative Bewegung der Kugel dieser Axe nicht in allen möglichen Lagen derselben gegen den Mittagskreis parallel seyn. Dies bietet also ein einfaches Mittel dar, durch die Erfahrung zu erkennen, ob $\varphi'(f)$ einen bemerkbaren Werth auf der Erde hat; die genauesten Erfahrungen haben aber in der scheinbaren Bewegung einer Kugel keine Abweichung von der Richtung der mitgetheilten Kraft erkennen lassen, woraus folgt, daſs auf der Erde $\varphi'(f)$ sehr nahe gleich Null ist. Der Werth dieser Gröſse würde, so wenig er auch bemerkbar wäre, sich vorzüglich durch die Dauer der Pendelschwingungen erkennen lassen, welche Dauer in verschiedenen Lagen der Ebene ihrer Bewegung in Rücksicht auf die Richtung der Bewegung der Erde, verschieden seyn würde. Die genauesten Beobachtungen haben keinen bemerkbaren Unterschied finden lassen, und wir müssen daraus schlieſsen, daſs $\varphi'(f)$ auf der Erde unmerklich ist und gleich Null gesezt werden kann.

Wenn die Gleichung $\varphi'(f) = 0$ Statt hätte, was auch immer der Werth der Kraft f sey, so würde $\varphi(f)$ beständig, und die Geschwindigkeit der Kraft proportional seyn; sie würde ihr auch dann noch proportional seyn, wenn die Funktion $\varphi(f)$ nur aus einem einzigen Gliede bestände, weil sonst in diesem Falle $\varphi'(f)$ nur dann Null seyn würde, wenn f es ist [25]. Man müſste also, wenn die Geschwindigkeit sich nicht wie die Kraft verhält, annehmen, daſs in der Natur die Funktion der Geschwindigkeit, welche die Kraft ausdrückt, aus mehreren Gliedern besteht, welches wenig wahrscheinlich ist; man müſste überdies annehmen, daſs die Geschwindigkeit der Erde genau so groſs ist, als die Gleichung $\varphi'(f) = 0$ erfordert, welches gegen alle Wahrscheinlichkeit ist. Uebrigens ändert sich die Geschwindigkeit der Erde in den verschiedenen Jahrszeiten; sie ist um $\frac{1}{30}$ ungefähr im Winter gröſser als im Sommer. Diese Aenderung ist noch beträchtlicher, wenn das Sonnensystem selbst, wie alles es anzuzeigen scheint, eine Bewegung im Raum hat; denn je nachdem diese fortschreitende Bewegung mit der der Erde zusammentrifft oder ihr entgegengesetzt ist, müssen während des Laufs eines Jahrs groſse Veränderungen daraus in der absoluten

25) Wenn $\varphi(f)$ nur aus einem Gliede besteht, so ist sie von der Form $A \,.\, f^m$, also ist das Differenzial derselben $\varphi'(f)$ gleich $m\,A\,f^{(m-1)}$. Dieser Werth von $\varphi'(f)$ kann nur dann für jeden Werth von f gleich Null seyn, wenn $m = 0$ ist, wodurch $\varphi(f)$ gleich A, das heiſst eine beständige Gröſse wird. Die Geschwindigkeit ist $f \,.\, \varphi(f)$, also Af oder der Kraft f proportional.

Bewegung der Erde entstehen, welches die Gleichung, wovon die Rede ist, und das daraus folgende Verhältnifs der mitgetheilten Kraft zur absoluten Geschwindigkeit ändern müfste, wenn diese Gleichung und dieses Verhältnifs von der Bewegung der Erde nicht unabhängig wären; die Beobachtungen lassen aber keine bemerkbare Aenderung erkennen.

Dies sind also zwey Gesetze der Bewegung, nämlich das Gesetz der Trägheit, und dafs die Kraft sich wie die Geschwindigkeit verhält, welche beide durch die Beobachtung gegeben sind. Sie sind die natürlichsten und einfachsten, die man erdenken kann, und können ohne Zweifel aus der Natur der Materie hergeleitet werden; da uns aber diefe Natur unbekannt ist, so sind sie für uns nur beobachtete Thatsachen, die einzigen übrigens, welche die Mechanik von der Erfahrung entlehnt.

6. Da die Geschwindigkeit sich wie die Kraft verhält, so können beide Gröfsen eine durch die andere ausgedrückt werden, und alles, was wir vorher über die Zusammensetzung der Kräfte festgesetzt haben, mufs auch auf die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten angewendet werden. Hieraus folgt, dafs die relativen Bewegungen eines Systems von Körpern, welche von irgend einer Anzahl Kräfte in Bewegung gesetzt werden, unverändert bleiben, was auch ihre gemeinschaftliche Bewegung seyn mag; denn wenn man diese letztere Bewegung in drey andere parallel mit drey festen Axen zerlegt, so wird sie die partiellen, mit den drey Axen parallelen, Geschwindigkeiten jedes einzelnen Körpers um die nämliche Gröfse vermehren; und da ihre relative Geschwindigkeiten nur von den Unterschieden dieser partiellen Geschwindigkeiten abhängen, so bleiben sie unverändert, was auch immer die allen Körpern gemeinschaftliche Bewegung seyn mag. Es ist also unmöglich, von der absoluten Bewegung eines Systems, wovon man einen Theil ausmacht, aus den Erscheinungen, welche man darin beobachtet, zu urtheilen; und dies ist das charakteristische Kennzeichen des Gesetzes der Proportionalität zwischen Kraft und Geschwindigkeit.

Es folgt noch aus dem dritten Satze, dafs, wenn man alle Kräfte und ihre Zusammengesetzte auf eine feste Ebene entwirft, die Summe der Momente der einzelnen so projicirten Kräfte in Beziehung auf einen festen in der Ebene genommenen Punkt, dem Moment der Projection der Zusammengesetzten gleich seyn wird [26]. Wenn man nun von diesem Punkt zum Körper einen Radius

26) Durch die Projection der Kräfte ändert man blofs die Axen der Koordinaten, deren Annahme willkührlich ist.

zieht, den wir Radius vector nennen wollen, so wird dieser auf der festen Ebene projicirte Radius vermöge jeder einzelnen wirkenden Kraft eine Winkelfläche beschreiben, welche dem Product der vermöge jeder Kraft in der Projection beschriebenen Linie mit der Hälfte der vom festen Punkt auf diese Linie gefällten Senkrechten gleich ist; diese Fläche ist also der Zeit proportional. Sie ist auch noch in einer gegebenen Zeit dem Moment der Projection der Kraft proportional; folglich ist die Summe der Winkelflächen, welche der projicirte Radius vector vermöge jeder Kraft beschreiben würde, wenn sie einzeln wirkte, der Winkelfläche gleich, welche die zusammengesetzte Kraft in dieser Projection beschreibt. Es folgt daraus, daſs, wenn auf einen beweglichen Körper, der anfangs eine geradlinichte Wurfbewegung erhalten hat, hernach mehrere auf einen unbeweglichen Punkt gerichtete Kräfte wirken, sein Radius vector um den festen Punkt Winkelflächen beschreiben wird, die sich immer wie die Zeiten verhalten werden; weil die Flächen, welche neue Kräfte diesen Radius würden beschreiben lassen, Null seyn würden. Hingegen sieht man auch, daſs, wenn der bewegliche Körper um einen festen Punkt mit den Zeiten proportionale Flächen beschreibt, die Zusammengesetzte der neuen Kräfte, welche auf ihn wirken, beständig gegen diesen Punkt gerichtet ist.

7. Laſst uns nun die Bewegung eines Punktes betrachten, welchen Kräfte zu bewegen streben, die auf eine ununterbrochene Art zu wirken scheinen, wie z. B. die Schwere. Da die Ursachen dieser und ähnlicher in der Natur vorhandener Kräfte unbekannt sind, so kann man unmöglich wissen, ob sie ohne Aufhören wirken, oder ob ihre auf einander folgende Wirkungen durch Zeiträume von einer unbemerkbaren Dauer getrennt sind; man kann sich aber leicht versichern, daſs in beiden Voraussetzungen die Erscheinungen sehr nahe dieselben sind [27]). Denn wenn man die Geschwindigkeit eines von einer ohne Aufhören wirkenden Kraft bewegten Körpers durch die Ordinaten einer krummen Linie ausdrückt, wovon die Abscissen die Zeiten darstellen; so wird diese krumme Linie in der zweyten Voraussetzung sich in ein Vieleck von einer sehr groſsen Anzahl Seiten verwandeln, welches eben deswegen mit der krummen Linie in eins zusammenfallen wird.

27) Eben dieses Grundes hat sich Hr. Hofr. Kästner bedient, um den Zweifel des Hrn. Lesage gegen die ununterbrochene Wirkung der Schwere zu widerlegen.

Wir werden mit den Geometern die erste Voraussetzung annehmen, und voraussetzen, daſs der Zeitraum, welcher zwey auf einander folgende Wirkungen irgend einer Kraft trennt, dem Element dt der Zeit, welche wir durch t bezeichnen, gleich ist. Es ist klar, daſs man die Wirkung einer Kraft desto beträchtlicher annehmen muſs, je gröſser der Zwischenraum, welcher ihre auf einander folgende Wirkungen trennt, angenommen wird, damit nach Verfluſs der nämlichen Zeit die Geschwindigkeit gleich groſs sey: man muſs also annehmen, daſs die augenblickliche Wirkung einer Kraft sich wie ihre Intensität und wie das Element der Zeit, während welchem sie nach der Voraussetzung wirkt, verhalte. Wenn man also durch P diese Intensität ausdrückt, so muſs man annehmen, daſs im Anfange jedes Augenblicks dt eine Kraft Pdt auf den beweglichen Körper wirkt, und ihn während dieses Augenblicks gleichförmig bewegt. Dieses festgesetzt, kann man alle Kräfte, die auf einen Punkt M wirken, auf drey Kräfte P, Q, R zurückführen, die parallel mit den drey rechtwinklichten Koordinaten x, y, z, welche die Lage dieses Punktes bestimmen, wirken. Wir werden voraussetzen, daſs diese Kräfte in entgegengesetzter Richtung des Anfangspunktes der Koordinaten wirken, oder daſs sie dieselben zu vergröſsern streben. Im Anfang eines neuen Augenblicks dt erhält der bewegliche Körper in der Richtung jeder seiner Koordinaten die Vermehrungen der Kraft oder der Geschwindigkeit $P.dt$, $Q.dt$, $R.dt$. Die mit diesen Koordinaten parallelen Geschwindigkeiten des Punktes M sind $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$; denn während eines unendlich kleinen Zeitraums kann man sie als gleichförmig ansehen, und folglich den Elementen des Raums, dividirt durch das Element der Zeit, gleich setzen. Die Geschwindigkeiten des beweglichen Körpers sind also im Anfang eines neuen Augenblicks:

$$\frac{dx}{dt} + P.dt; \qquad \frac{dy}{dt} + Q.dt; \qquad \frac{dz}{dt} + R.dt;$$

oder

$$\frac{dx}{dt} + d.\frac{dx}{dt} - d.\frac{dx}{dt} + P.dt;$$

$$\frac{dy}{dt} + d.\frac{dy}{dt} - d.\frac{dy}{dt} + Q.dt;$$

$$\frac{dz}{dt} + d.\frac{dz}{dt} - d.\frac{dz}{dt} + R.dt;$$

In diesem neuen Augenblick sind aber die mit den drey Koordinaten x, y, z parallelen Geschwindigkeiten des beweglichen Körpers offenbar

$$\frac{dx}{dt} + d.\frac{dx}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} + d.\frac{dy}{dt}; \quad \frac{dz}{dt} + d.\frac{dz}{dt};$$

die Kräfte

$$-d.\frac{dx}{dt} + P.dt; \quad -d.\frac{dy}{dt} + Q.dt; \quad -d.\frac{dz}{dt} + R.dt$$

müssen sich also aufheben, und der Körper M, wenn bloſs diese Kräfte auf ihn wirkten, im Gleichgewicht seyn. Bezeichnet man also mit δx, δy, δz jede Aenderung der drey Koordinaten x, y, z, welche Aenderung man nicht mit den Differenzialen dx, dy, dz verwechseln muſs, welche die Räume ausdrücken, die der Körper parallel mit den Koordinaten während des Augenblicks dt beschreibt; so wird die Gleichung (b) des 3ten Satzes folgende werden:

$$o = \delta x\left(d.\frac{dx}{dt} - P.dt\right) + \delta y\left(d.\frac{dy}{dt} - Q.dt\right) + \delta z\left(d.\frac{dz}{dt} - R.dt\right) \ldots (f).$$

Wenn der Punkt M frey ist, so wird man die Koeffizienten von δx, δy, δz einzeln gleich Null setzen, und man wird in der Voraussetzung, daſs das Element der Zeit dt beständig ist, folgende drey Differenzialgleichungen erhalten:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = P; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Q; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = R.$$

Wenn der Punkt M nicht frey ist, wenn er sich auf einer Fläche oder auf einer krummen Linie bewegen muſs, so wird man aus der Gleichung (f), vermittelst der Gleichungen für die Fläche oder für die krumme Linie so viel Variationen δx, δy, δz eliminiren, als man Gleichungen hat; die Koefficienten der übrigbleibenden Variationen wird man einzeln gleich Null setzen.

8. Man kann in der Gleichung (f) die Variationen δx, δy, δz den Differenzialen dx, dy, dz gleich setzen, weil diese Differenziale nothwendig von den Bedingungen der Bewegung des Punktes M abhängen. Macht man diese Voraussetzung und integrirt hernach die Gleichung (f), so wird man erhalten [28]):

28) $\frac{dx.d^2x + dy.d^2y + dz.d^2z}{dt^2} - (P.dx + Q.dy + R.dz) = o$, und man hat

$\int.dx.d^2x = \frac{1}{2}dx^2$.

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = C + 2 . \int (P . dx + Q . dy + R . dz);$$

wo C eine willkührliche beständige Gröſse ist.

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

ist das Quadrat der Geschwindigkeit von M [29]), welche wir mit v bezeichnen; wenn man dann annimmt, daſs $P . dx + Q . dy + R . dz$ das vollständige Differenzial einer Funktion ϕ sey, so wird man

$$v^2 = C + 2\phi \quad \text{(g)}$$

haben. Dieser Fall hat im Allgemeinen Statt, wenn die Kräfte, welche den Punkt M zu bewegen streben, Funktionen der Abstände ihres Anfangspunktes von diesem Punkt sind, worin beynahe alle Kräfte der Natur begriffen sind. In der That, wenn S, S' u. s. w. diese Kräfte, und s, s' u. s. w. die Entfernungen des Punktes M von ihren Anfangspunkten sind, so wird nach dem 2ten Satz die Zusammengesetzte aller dieser Kräfte mit der Variation ihrer Richtung multiplicirt, der Gröſse $\Sigma . S . \delta s$ gleich seyn. Diese Gröſse ist aber auch noch gleich

$$P . \delta x + Q . \delta y + R . \delta z,$$

man hat also:

$$P . \delta x + Q . \delta y + R . \delta z = \Sigma . S . \delta s.$$

Wenn also das zweyte Glied dieser Gleichung ein vollständiges Differenzial ist, so ist es das erste ebenfalls.

Es folgt aus der Gleichung (g) erstlich, daſs die Geschwindigkeit des Punktes M beständig ist, wenn keine Kraft auf ihn wirkt, weil dann $\phi = o$; hiervon kann man sich noch sonst leicht versichern, wenn man bemerkt, daſs ein Körper, der sich auf einer Fläche oder krummen Linie bewegt, beym Antreffen jeder unendlich kleinen Ebene der Fläche, oder jeder unendlich kleinen Seite der krummen Linie, nur ein unendlich Kleines der zweyten Ordnung von seiner

29) Die einzelnen mit den drey Koordinaten parallelen Geschwindigkeiten sind:

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$$

folglich nach dem ersten Satze die aus allen dreyen zusammengesetzte Geschwindigkeit

$$\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}}$$

ner Geschwindigkeit verliehrt. Zweytens, daſs der Punkt M, indem er von einem gegebenen Punkt mit einer gegebenen Geschwindigkeit ausgeht, um zu einem andern Punkt zu gelangen, beym Ankommen an diesem letzten Punkt die nämliche Geschwindigkeit haben wird, was für eine krumme Linie er auch beschrieben haben mag.

Wenn aber der Körper nicht genöthigt ist, sich auf einer bestimmten krummen Linie zu bewegen, so hat die krumme Linie, die er beschreibt, eine besondere Eigenschaft, auf welche man durch metaphysische Betrachtungen geführt worden, und welche im Grunde nur ein merkwürdiges Resultat der vorhergehenden Differenzialgleichungen ist. Sie besteht darin, daſs das zwischen den beiden äuſsersten Punkten der beschriebenen krummen Linie enthaltene Integral $\int v ds$ hier kleiner, als auf jeder andern Curve ist, wenn der Körper frey ist.

Um dies zu zeigen, bemerken wir, daſs die Gleichung (g), wenn man $P.dx + Q.dy + R.dz$ als ein vollständiges Differenzial annimmt,

$$v\delta v = P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z$$

giebt; hierdurch wird die Gleichung (f) im vorhergehenden Satz in folgende verwandelt:

$$0 = \delta x . d . \frac{dx}{dt} + \delta y . d . \frac{dy}{dt} + \delta z . d . \frac{dz}{dt} - v\,dt . \delta v.$$

Wir wollen ds das Element der vom Körper beschriebenen krummen Linie nennen, so hat man

$$v dt = ds; \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

folglich

$$0 = \delta x . d . \frac{dx}{dt} + \delta y . d . \frac{dy}{dt} + \delta z . d . \frac{dz}{dt} - ds . \delta v; \quad . . \text{(h)}$$

Wenn man in Beziehung auf δ den Ausdruck für ds differenziirt, so erhält man

$$\frac{ds}{dt} . \delta . ds = \frac{dx}{dt} . \delta . dx + \frac{dy}{dt} . \delta . dy + \frac{dz}{dt} . \delta . dz.$$

Da die Charakteristik d und δ unabhängig von einander sind, so kann man nach Willkühr die eine für die andere setzen [30]); dadurch kann man der vorhergehenden Gleichung folgende Gestalt geben:

$$v \,.\, \delta ds = \frac{d \,.\, (dx \,.\, \delta x + dy \,.\, \delta y + dz \,.\, \delta z)}{dt} - \delta x \,.\, d \,.\, \frac{dx}{dt} - \delta y \,.\, d \,.\, \frac{dy}{dt} - \delta z \,.\, d \,.\, \frac{dz}{dt}.$$

Zieht man vom ersten Theil dieser Gleichung den zweyten Theil der Gleichung (h) ab, so erhält man [31])

$$\delta \,.\, (vds) = \frac{d \,.\, (dx \,.\, \delta x + dy \,.\, \delta y + dz \,.\, \delta z)}{dt}$$

Integrirt man diese letzte Gleichung in Beziehung auf die Charakteristik d, so erhält man

$$\delta \,.\, \int v\, ds = \frac{dx \,.\, \delta x + dy \,.\, \delta y + dz \,.\, \delta z}{dt} + \text{beständige Gröſse.}$$

Erstreckt man dieses Integral auf die ganze vom beweglichen Körper beschriebene krumme Linie, und nimmt man die äuſsersten Punkte dieser krummen Linie als unveränderlich an, so wird man $\delta \,.\int v\, ds = 0$ haben [32]); das heiſst, von allen krummen Linien, nach welchen der bewegliche, den Kräften P, Q, R

30) Nämlich $d\delta x$ statt δdx; dadurch verwandelt sich

$$\frac{dx}{dt} \,.\, \delta dx \text{ in } \frac{dx}{dt} \,.\, d\delta x.$$

Da nun

$$d\left(\frac{dx}{dt} \,.\, \delta x\right) = \delta x \,.\, d \,.\, \frac{dx}{dt} + d\,\delta x \,.\, \frac{dx}{dt},$$

so ist

$$d\left(\frac{dx}{dt} \,.\, \delta x\right) - \delta x \,.\, d \,.\, \frac{dx}{dt} = d\delta x \,.\, \frac{dx}{dt}.$$

Verwandelt man auf eben diese Art die Differenzialausdrücke von y und z, so erhält man die im Text vorkommende Gleichung.

31) $$v \,.\, \delta ds + ds \,.\, \delta v - \delta x \,.\, d \,.\, \frac{dx}{dt} - \delta y \,.\, d \,.\, \frac{dy}{dt} - \delta z \,.\, d \,.\, \frac{dz}{dt}$$
$$= \frac{d\,(dx \,.\, \delta x + dy \,.\, \delta y + dz \,.\, \delta z)}{dt} - \delta x \,.\, d \,.\, \frac{dx}{dt} - \delta y \,.\, d \,.\, \frac{dy}{dt} - \delta z \,.\, d \,.\, \frac{dz}{dt}.$$

Hier heben sich die drey letzten Glieder auf beiden Seiten auf, und $v \,.\, \delta ds + ds \,.\, \delta v$ ist gleich $\delta \,.\, (v \,.\, ds)$.

32) Es sind dann δx, δy, δz gleich Null, und auch die beständige Gröſse gleich Null. Man sehe hierüber Euleri Institutiones Calculi integralis, Vol. III. pag. 514; Calc. Variationum, cap. III. §. 86. seq. Lacroix Calcul Intégral II. p. 665. §. 823. und §. 846. p. 696.

unterworfene, Körper von einem gegebenen Punkt zum andern kommen kann, wird er diejenige beschreiben, wo die Variation des Integrals $\int v\,ds$ Null, und folglich dieses Integral ein Kleinstes ist.

Wenn der Punkt sich in einer krummen Fläche, ohne daſs irgend eine Kraft auf ihn wirkt, bewegt; so ist seine Geschwindigkeit beständig, und das Integral $\int v ds$ wird dann $v\int ds$; folglich ist die in diesem Fall vom beweglichen Punkte beschriebene krumme Linie die kürzeste, welche man auf der Fläche vom Abgangspunkt bis zum Ankunftspunkt ziehen kann.

9. Wir wollen nun den Druck bestimmen, welchen ein Punkt, der sich in einer Fläche bewegt, gegen sie ausübt. Anstatt aus der Gleichung (f) im 7ten Satz eine der Variationen δx, δy, δz vermittelst der für die Fläche gegebenen Gleichung zu eliminiren, kann man dieser Gleichung nach dem 3ten Satz die Differentialgleichung der Fläche mit einer unbestimmten Gröſse $-\lambda dt$ multiplicirt hinzusetzen, und alsdann die drey Variationen δx, δy, δz als unabhängig ansehen. Es sey also $u = o$ die Gleichung für die Fläche, so wird man der Gleichung (f) das Glied $- \lambda . \delta u . dt$ hinzusetzen, und der Druck, welchen der Punkt gegen die Fläche ausübt, wird nach dem 3ten Satz gleich

$$\lambda . \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}$$

seyn. Wir wollen anfangs annehmen, daſs keine Kraft den Punkt zu bewegen strebe, so wird seine Geschwindigkeit beständig seyn: bemerkt man ferner, daſs $vdt = ds$, daſs folglich, wenn man das Element der Zeit dt beständig setzt, auch das Element der beschriebenen Curve ds beständig ist; so wird die um das Glied $- \lambda . \delta u . dt$ vermehrte Gleichung (f) folgende drey geben:

$$o = v^2 . \frac{d^2x}{ds^2} - \lambda . \left(\frac{du}{dx}\right); \quad o = v^2 . \frac{d^2y}{ds^2} - \lambda . \left(\frac{du}{dy}\right); \quad o = v^2 . \frac{d^2z}{ds^2} - \lambda . \left(\frac{du}{dz}\right);$$

hieraus erhält man

$$\lambda . \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2} = \frac{v^2 . \sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}{ds^2};$$

da aber ds beständig ist, so ist der Krümmungshalbmesser der vom beweglichen Punkt beschriebenen krummen Linie gleich

$$\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}};\ ^{33})$$

nennt man also diesen Halbmesser r, so hat man

$$\lambda \cdot \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2} = \frac{v^2}{r};$$

das heiſst: der vom Punkt gegen die Fläche ausgeübte Druck ist dem Quadrat seiner Geschwindigkeit dividirt durch den Krümmungshalbmesser der beschriebenen krummen Linie gleich.

Bewegt sich der Punkt in einer Kugelfläche, so wird er den Umkreis des gröſsten Kreises beschreiben, der durch die ursprüngliche Richtung seiner Bewegung geht; weil keine Ursache vorhanden ist, warum er sich mehr zur Rechten als zur Linken von der Ebene dieses Kreises entfernen sollte; sein Druck gegen die Fläche, oder welches das nämliche ist, gegen den beschriebenen Umkreis, ist also dem Quadrat seiner Geschwindigkeit mit dem Halbmesser des Kreises dividirt, gleich.

Wir wollen uns nun vorstellen, daſs der Punkt am Ende eines ohne Masse angenommenen Fadens befestigt, und daſs das andere Ende dieses Fadens im Mittelpunkt der Fläche fest sey. Es ist augenscheinlich, daſs der Druck, welchen dieser Punkt gegen den Umkreis ausübt, der Spannung gleich ist, welche der Faden erfahren würde, wenn der Punkt nur durch ihn zurück-

33) Man findet in der Théorie des fonctions analytiques par Lagrange, §. 141. pag. 165 folgenden Ausdruck für den Krümmungshalbmesser, wo dx als beständig angenommen worden ist:

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}} \,.\, [(dx^2 + dy^2 + dz^2)(d^2y^2 + d^2z^2) - (dy\,d^2y + dz\,d^2z)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Um ds beständig setzen zu können, muſs man erst die Formel so verwandeln, daſs kein Differenzial beständig ist. Man sieht leicht, daſs der obige Ausdruck die nämlichen Differenziale von x enthalten wird, welche er von y und z enthält; der Factor $d^2y^2 + d^2z^2$ wird $d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2$ werden, und $dy\,d^2y + dz\,d^2z$ sich in $dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z$ verwandeln. Dadurch wird die allgemeine Formel für den Krümmungshalbmesser, wenn man noch statt $dx^2 + dy^2 + dz^2$ seinen Werth ds^2 substituirt, folgende Gestalt erhalten:

$$ds^3 \,.\, [ds^2\,(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - (dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Wenn nun ds beständig angenommen wird, so ist $d\,.\,(ds)$ und also auch $d\,.\,(ds^2)$ gleich Null, das heiſst, $d\,(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ oder $dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = 0$. Dies in obigen Ausdruck gesetzt, giebt den Krümmungshalbmesser

$$= ds^3\,[ds^2\,(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2)]^{-\frac{1}{2}} = ds^2\,(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

gehalten würde. Das Bestreben eines solchen Punktes, um den Faden zu spannen und um sich vom Mittelpunkt des Umkreises zu entfernen, nennt man die Mittelpunktsfliehkraft; sie ist also dem Quadrat der Geschwindigkeit, durch den Halbmesser dividirt, gleich.

Die Centrifugalkraft eines Punktes, der sich auf irgend einer krummen Linie bewegt, ist dem Quadrat der Geschwindigkeit, durch den Krümmungshalbmesser der krummen Linie dividirt, gleich; weil der unendlich kleine Bogen der krummen Linie mit dem Umfange des Krümmungskreises zusammenfällt. Man wird also den Druck haben, welchen der Punkt gegen die krumme Linie, die er beschreibt, ausübt, wenn man zu dem durch den Krümmungshalbmesser dividirten Quadrat der Geschwindigkeit den Druck hinzusetzt, welcher den Kräften, die diesen Punkt zu bewegen streben, zugehört.

Der Druck eines Punktes, der sich auf einer Fläche bewegt, ist, insofern er der Centrifugalkraft zugehört, dem Quadrat der Geschwindigkeit, dividirt durch den Krümmungshalbmesser der vom Punkt beschriebenen krummen Linie, und multiplicirt mit dem Sinus der Neigung der Ebene des Krümmungskreises gegen die die Fläche berührende Ebene, gleich [34]). Setzt man nun zu diesem Druck noch denjenigen hinzu, welcher der Wirkung der Kräfte, die den Punkt zu bewegen streben, zugehört, so wird man den ganzen Druck haben, welchen der Punkt gegen die Fläche ausübt.

Wir haben so eben gesehen, daſs, wenn keine Kräfte den Punkt zu bewegen streben, sein Druck gegen die Fläche dem Quadrat der Geschwindigkeit, dividirt durch den Krümmungshalbmesser der beschriebenen krummen Linie gleich ist; folglich ist dann die Ebene des Krümmungskreises, das heiſst, die Ebene, welche durch zwey auf einander folgende Seiten der vom Punkt beschriebenen krummen Linie geht, auf die Fläche senkrecht. In Rücksicht auf die Oberfläche der Erde ist diese krumme Linie diejenige, welche man die Senkrechte auf die Mittagslinie nennt, und wir haben (Satz 8.) bewiesen, daſs sie die kürzeste ist, welche man auf der Oberfläche von einem Punkt zu einem andern ziehen kann.

34) Der Druck muſs immer senkrecht auf die Fläche seyn. Man muſs daher von dem Druck der Kraft in der Ebene des Krümmungskreises nur den Theil nehmen, welcher auf die Fläche senkrecht ist, das heiſst, ihn mit dem Sinus der Neigung multipliciren.

10. Die merkwürdigste von allen Kräften, welche wir auf der Erde beobachten, ist die Schwere; sie durchdringt die innersten Theile der Körper und ohne den Widerstand der Luft, würden sie alle mit gleicher Geschwindigkeit fallen. Die Schwere ist auf den gröſsten Höhen, die wir erreichen, und in den gröſsten Tiefen, in die wir hinabsteigen können, sehr nahe von gleicher Gröſse; ihre Richtung ist auf den Horizont senkrecht. Bey den Bewegungen geworfener Körper kann man ohne merklichen Irrthum annehmen, daſs sie beständig ist, und daſs sie nach geraden parallelen Linien wirkt, weil die beschriebene krumme Linie in Rücksicht auf den Umkreis der Erde sehr klein ist. Da diese Körper sich in einem widerstehenden Mittel bewegen, so wollen wir β den Widerstand nennen, welchen sie erfahren und welcher die Richtung der Seite der von ihnen beschriebenen krummen Linie hat; wir werden diese Seite mit ds, und die Schwere mit g bezeichnen. Dieses festgesetzt, wollen wir die Gleichung (f) in Nr. 7. wieder betrachten und annehmen, daſs die Ebene der x und y horizontal ist, und daſs der Anfangspunkt der z der höchste Punkt ist. Die Kraft β wird dann nach der Richtung der Koordinaten x, y, z folgende drey Kräfte hervorbringen

$$-\beta \cdot \frac{dx}{ds}; \quad -\beta \cdot \frac{dy}{ds}; \quad -\beta \cdot \frac{dz}{ds};$$

man wird folglich nach Satz 7.

$$P = -\beta \cdot \frac{dx}{ds}; \quad Q = -\beta \cdot \frac{dy}{ds}; \quad R = -\beta \cdot \frac{dz}{ds} + g$$

haben, und aus der Gleichung (f) wird folgende werden:

$$0 = \delta x \cdot \left(d \cdot \frac{dx}{dt} + \beta \cdot \frac{dx}{ds} \cdot dt\right) + \delta y \cdot \left(d \cdot \frac{dy}{dt} + \beta \cdot \frac{dy}{ds} \cdot dt\right)$$
$$+ \delta z \cdot \left(d \cdot \frac{dz}{dt} + \beta \cdot \frac{dz}{ds} \cdot dt - g dt\right).$$

Wenn der Körper gänzlich frey ist, so wird man folgende drey Gleichungen haben:

$$0 = d \cdot \frac{dx}{dt} + \beta \cdot \frac{dx}{ds} \cdot dt; \quad 0 = d \cdot \frac{dy}{dt} + \beta \cdot \frac{dy}{ds} \cdot dt;$$
$$0 = d \cdot \frac{dz}{dt} + \beta \cdot \frac{dz}{ds} \cdot dt - g\,dt.$$

Die beiden ersten geben [35])

$$\frac{dy}{dt} \cdot d \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot d \cdot \frac{dy}{dt} = o;$$

und hieraus erhält man, wenn man integrirt, $dx = f\,dy$, wo f eine willkührliche beständige Gröſse ist. Diese Gleichung ist die Gleichung einer geraden horizontalen Linie, und folglich bewegt sich der Körper in einer senkrechten Ebene. Nimmt man für diese Ebene die Ebene der x und z, so wird man $y = o$ haben; die beiden Gleichungen

$$o = d \cdot \frac{dx}{dt} + \beta \cdot \frac{dx}{ds} \cdot dt; \quad o = d \cdot \frac{dz}{dt} + \beta \cdot \frac{dz}{ds} \cdot dt - g \cdot dt;$$

werden, wenn man dx als beständig annimmt, geben [36])

$$\beta = \frac{ds \cdot d^2t}{dt^3}; \quad o = \frac{d^2z}{dt} - \frac{dz \cdot d^2t}{dt^2} + \beta \cdot \frac{dz}{ds} \cdot dt - g \cdot dt.$$

35) Wenn man die erste mit $\frac{dy}{dt}$, die zweyte mit $\frac{dx}{dt}$ multiplicirt, und die letztere von der erstern abzieht. Man dividire die so erhaltene, im Text gegebene, Gleichung durch $\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}$, so erhält man, weil $d \cdot \frac{dx}{dt}$ dividirt durch $\frac{dx}{dt}$ das Differenzial von $\log \cdot \frac{dx}{dt}$ ist,

$$d \cdot \left(\log \frac{dx}{dt}\right) - d \cdot \left(\log \frac{dy}{dt}\right) = o; \text{ integrirt man, so erhält man}$$

$$\log \frac{dx}{dt} - \log \frac{dy}{dt} = \text{Constans } f, \text{ oder wenn man Constans} = \log . f \text{ setzt,}$$

$$\log \frac{dx}{dt} = \log \frac{dy}{dt} + \log f = \log f \cdot \frac{dy}{dt}, \text{ folglich } \frac{dx}{dt} = f \cdot \frac{dy}{dt} \text{ und } dx = f \cdot dy.$$

36) Es ist nämlich, wenn dx beständig,

$$d \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{d^2t}{dt^2} \cdot dx.$$

Diesen Werth von $d \cdot \frac{dx}{dt}$ in die erste Gleichung gesetzt, giebt

$$\frac{d^2t}{dt^2} \cdot dx = \beta \cdot \frac{dx \cdot dt}{ds}, \text{ oder } \frac{d^2t \cdot dx \cdot ds}{dt^2 \cdot dx \cdot dt} = \beta, \text{ oder } \beta = \frac{d^2t \cdot ds}{dt^3}.$$

Um die zweyte Gleichung zu erhalten, muſs man in der gegebenen zweyten Gleichung statt $d \cdot \frac{dz}{dt}$ seinen Werth $\frac{d^2z}{dt} - \frac{d^2t \cdot dz}{dt^2}$, welchen man durch wirkliches Differenziiren der Gröſse $\frac{dz}{dt}$ erhält, substituiren.

Hieraus erhält man $g . dt^2 = d^2z$ [37]), und wenn man differenzirt $2g dt . d^2t = d^3z$; setzt man hier für d^2t seinen Werth $\frac{\beta\, dt^3}{ds}$, und statt dt^2 seinen Werth $\frac{d^2z}{g}$, so wird man erhalten

$$\frac{\beta}{g} = \frac{ds \,.\, d^3z}{2(d^2z)^2}.$$

Diese Gleichung enthält das Gesetz des Widerstandes β, welches, wenn der geworfene Körper eine bestimmte krumme Linie beschreiben soll, Statt haben muſs.

Wenn der Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, so ist β gleich $h \,.\, \frac{ds^2}{dt^2}$ und h ist für den Fall, wo die Dichtigkeit des Mittels gleichförmig ist, eine beständige Gröſse. Man hat alsdann

$$\frac{\beta}{g} = \frac{h \,.\, ds^2}{g \,.\, dt^2} = \frac{h \,.\, ds^2}{d^2z};$$

folglich

$$h \,.\, ds = \frac{d^3z}{2d^2z}.$$

Dieses giebt, wenn man integrirt [38]),

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2a \,.\, c^{2hs},$$

wo a eine willkührliche beständige Gröſse, und c die Zahl ist, deren hyperbolischer Logarithme gleich Eins ist. Setzt man den Widerstand des Mittels $= 0$, das

37) Es ist nämlich

$$\beta \,.\, \frac{dz}{ds} \,.\, dt = \frac{ds \,.\, d^2t}{dt^3} \,.\, \frac{dz}{ds} \,.\, dt = \frac{d^2t \,.\, dz}{dt^2}.$$

Dieser Ausdruck, in die zweyte Gleichung gesetzt, giebt

$$o = \frac{d^2z}{dt} - g \,.\, dt.$$

38) Es ist $\int h \,.\, ds = \frac{1}{2}\int . \frac{d \,.\, (d^2z)}{d^2z}$ oder $2hs = \log\,(d^2z) + \log \frac{1}{2a}$, wo $\log \frac{1}{2a}$ die durch die Integration eingeführte Constante ist. Da nun eine Gleichung nur unter Gröſsen einerley Art Statt finden kann, so sieht man leicht, daſs man $\log \frac{d^2z}{dx^2}$ statt $\log\,(d^2z)$ setzen muſs, weil dx das beständige Differenzial ist. Man bemerkt auch leicht, daſs der Divisor dx^2 nur durch die Multiplication des Zählers und Nenners des Bruchs $\frac{d^3z}{d^2z}$ weggefallen ist, denn es ist

$$\frac{d^3z}{d^2z} = \frac{d^3z}{dx^2} : \frac{d^2z}{dx^2}.$$

das heifst $h = o$, so erhält man durch Integriren die Gleichung für die Parabel [39])

$$z = ax^2 + bx + e;$$

wo b und e willkührliche beständige Gröfsen sind.

Die Differenzialgleichung $d^2z = g\,dt^2$ wird $dt^2 = \frac{2a}{g} \cdot dx^2$ geben; hieraus erhält man $t = x \cdot \sqrt{\frac{2a}{g}} + f'$. Wir wollen nun annehmen, dafs x, z und t zugleich anfangen, so hat man $e = o$, $f' = o$ und folglich

$$t = x \cdot \sqrt{\frac{2a}{g}}; \quad z = ax^2 + bx;$$

dieses giebt

$$z = \frac{gt^2}{2} + bt \cdot \sqrt{\frac{g}{2a}}$$

Diese drey Gleichungen enthalten die ganze Theorie der im leeren Raum geworfenen Körper; es folgt aus ihnen, dafs die Geschwindigkeit in horizontaler Richtung gleichförmig, in der senkrechten Richtung aber eben so grofs ist, als wenn der Körper nach der senkrechten Linie gefallen wäre.

Wenn der Körper vom Stande der Ruhe sich zu bewegen anfängt, so wird $b = o$ seyn, und man wird

$$\frac{dz}{dt} = gt; \quad z = \tfrac{1}{2} g t^2$$

haben; die erlangte Geschwindigkeit wächst also wie die Zeit, und der beschriebene Raum wie das Quadrat der Zeit.

Man kann vermittelst dieser Formeln die Centrifugalkraft leicht mit der Schwere vergleichen. Wir haben vorher gesehen, dafs, wenn v die Geschwindigkeit eines Körpers ist, der sich in einem Kreise bewegt, dessen Halbmesser r ist, die Centrifugalkraft gleich $\frac{v^2}{r}$ ist. Es sey h die Höhe, von welcher der Kör-

39) Man hat $\int \frac{d^2z}{dx} = \int 2a\,dx$ oder $\frac{dz}{dx} = 2ax + b$, oder $dz = 2ax\,dx + b\,dx$. Dies von neuem integrirt, giebt obige Gleichung.

per fallen müſste, um die Geschwindigkeit v zu erlangen, so hat man aus dem Vorhergehenden $v^2 = 2gh$; hieraus erhält man $\frac{v^2}{r} = g \cdot \frac{2h}{r}$. Wenn $h = \frac{1}{2} r$ ist, so wird die Centrifugalkraft der Schwere g gleich; folglich wird ein schwerer Körper, welcher auf einer horizontalen Ebene am Ende eines Fadens befestigt ist, dessen anderes Ende fest ist, diesen Faden mit eben der Kraft spannen, als wenn er senkrecht aufgehangen wäre, wofern er sich auf dieser Ebene mit einer Geschwindigkeit bewegt, welche er erlangen würde, wenn er von einer der halben Länge des Fadens gleichen Höhe gefallen wäre.

11. Wir wollen nun die Bewegung eines schweren Körpers in einer Kugelfläche betrachten. Wir wollen ihren Halbmesser r nennen, und ihren Mittelpunkt für den Anfangspunkt der Koordinaten x, y, z annehmen; dann wird man $r^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ haben. Vergleicht man diese Gleichung mit der $u = 0$, so erhält man $u = r^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Addirt man nun zur Gleichung (f) im 7ten Satz die Function δu multiplicirt mit der unbestimmten Gröſse $-\lambda dt$, so erhält man

$$0 = \delta x . \left(d . \frac{dx}{dt} + 2\lambda x . dt\right) + \delta y . \left(d . \frac{dy}{dt} + 2\lambda y . dt\right) + \delta z . \left(d . \frac{dz}{dt} + 2\lambda z . dt - g dt\right);$$

eine Gleichung, in welcher man die Coefficienten der Variationen δx, δy, δz einzeln gleich Null setzen kann, wodurch man die drey folgenden Gleichungen erhält:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= d . \frac{dx}{dt} + 2\lambda x . dt; \\ 0 &= d . \frac{dy}{dt} + 2\lambda y . dt; \\ 0 &= d . \frac{dz}{dt} + 2\lambda z . dt - g dt. \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Die unbestimmte Gröſse λ giebt den Druck zu erkennen, welchen der Körper gegen die Fläche ausübt. Dieser Druck ist nach dem 9ten Satz gleich $\lambda . \sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}$; er ist folglich gleich $2\lambda r$ [40]); man hat aber

40) Es ist $\left(\frac{du}{dx}\right) = 2x$, $\left(\frac{du}{dy}\right) = 2y$ und $\left(\frac{du}{dz}\right) = 2z$, folglich die Gröſse unter dem Wurzelzeichen gleich $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4r^2$.

nach dem 8ten Satz [41])

$$c + 2gz = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2};$$

wo c eine willkührliche beständige Gröſse ist. Man dividire die Gleichungen (A) mit dt und multiplicire die erste mit x, die zweyte mit y, die dritte mit z, zu ihrer Summe addire man die vorhergehende Gleichung, und bemerke noch, daſs man, da $o = xdx + ydy + zdz$ die Differenzialgleichung der Kugelfläche ist,

$$o = xd^2x + yd^2y + zd^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

hat; so findet [42]) man

$$2\lambda r = \frac{c + 3gz}{r}.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (A) mit $- y$, die zweyte mit x, und integrirt die Summe beider Gleichungen, so wird man

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = c'$$

41) Man hat nämlich $c + 2\varphi = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt}$, wo $\varphi = \int(P \,.\, \delta x + Q \,.\, \delta y + R \,.\, \delta z)$ ist. Nun ist die Ebene der x und der y horizontal, folglich δx und δy gleich Null, weil die Wirkung der Schwere stets senkrecht ist; man hat also $\varphi = \int . R\, \delta z$. Für die Schwere ist $R = g$ und beständig, also $\varphi = \int . g\, \delta z = g \,.\int dz = gz$.

42) Verrichtet man die vom Hrn. Verfasser vorgeschriebenen Operationen, wobey zu bemerken, daſs dt beständig, und folglich $d \,.\, \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt}$ ist, so erhält man

$$o = x \,.\, \frac{d^2x}{dt^2} \qquad + 2\lambda \,.\, x^2$$

$$o = y \,.\, \frac{d^2y}{dt^2} \qquad + 2\lambda \,.\, y^2$$

$$o = z \,.\, \frac{d^2z}{dt^2} \qquad + 2\lambda \,.\, z^2 - gz$$

$$o = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \qquad - 2gz - c$$

Summe $o = \quad o \quad + 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) - 3gz - c$

oder $o = 2\lambda r^2 - 3gz - c$.

Die Summe aller ersten Glieder der vier Gleichungen ist gleich Null, weil sie das zweyte Differenzial der Gleichung der Kugelfläche ist.

erhalten, wo c' eine neue willkührliche beständige Gröfse ist [43]).

Auf diese Art ist die Bewegung des Punkts auf drey Differenzialgleichungen der ersten Ordnung zurückgeführt:

$$x\,dx + y\,dy = -z\,dz;$$
$$x\,dy - y\,dx = c'\,dt;$$
$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = c + 2gz.$$

Quadrirt man jedes Glied der beiden ersten Gleichungen und addirt sie, so wird man

$$(x^2 + y^2) \cdot (dx^2 + dy^2) = c'^2\,dt^2 + z^2 \cdot dz^2$$

erhalten; setzt man statt $x^2 + y^2$ seinen Werth $r^2 - z^2$, und statt $\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$ seinen Werth $c + 2gz - \frac{dz^2}{dt^2}$, so erhält man, in der Voraussetzung, dafs der Körper sich von der senkrechten Linie entfernt,

$$dt = \frac{-r \cdot dz}{\sqrt{(r^2 - z^2) \cdot (c + 2gz) - c'^2}}.$$

Man kann der Funktion unter dem Wurzelzeichen folgende Gestalt geben: $(a - z) \cdot (z - b) \cdot (2gz + f)$, wo a, b, f durch folgende Gleichungen bestimmt werden [44]):

43) Um ein zweytes Integral zu erhalten, mufs man λ eliminiren; dies erhält man durch die vorgeschriebenen Multiplicationen, denn dann ist

$$o = -y \cdot \frac{d^2x}{dt} - 2\lambda\,xy \cdot dt$$
$$o = +x \cdot \frac{d^2y}{dt} + 2\lambda\,xy \cdot dt$$

$$\text{Summe } o = x \cdot \frac{d^2y}{dt} - y \cdot \frac{d^2x}{dt} = \frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt};$$

nun ist $\int x\,d^2y = x \cdot dy - \int dx \cdot dy$ und $-\int y\,d^2x = -y\,dx + \int dy \cdot dx$, folglich das Integral der vorigen Gleichung: $\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = \text{Constans}$.

44) Es mufs dann $(r^2 - z^2)(c + 2gz) - c'^2 = (a - z)(z - b)(2gz + f)$ seyn. Multiplicirt man wirklich, so erhält man:

$(r^2 c - c'^2) + 2gr^2 z - cz^2 - 2gz^3 = -abf + (af + bf - 2abg)\,z + (2ag + 2bg - f)\,z^2 - 2gz^3.$

Die Koefficienten der nämlichen Potenzen von z müssen einander gleich seyn, also:

$$f = \frac{2g \cdot (r^2 + ab)}{a + b}$$

$$c = \frac{2g \cdot (r^2 - a^2 - ab - b^2)}{a + b}$$

$$c'^2 = \frac{2g \cdot (r^2 - a^2) \cdot (r^2 - b^2)}{a + b}.$$

Man kann auf diese Art statt der willkührlichen Gröſsen c und c' die zwey neuen a und b setzen, wovon die erste der gröſste, die zweyte der kleinste Werth von z ist [45]). Setzt man hernach

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{a - z}{a - b}},$$

so wird die vorhergehende Differenzialgleichung sich in folgende verwandeln:

$$dt = \frac{r \cdot \sqrt{2(a + b)}}{\sqrt{g \cdot [(a+b)^2 + r^2 - b^2]}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \gamma^2 \cdot \sin\theta^2}}$$

wo γ^2 gleich $\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2 + r^2 - b^2}$ ist [46]).

1) $r^2 c - c'^2 = - abf$; oder $c'^2 = r^2 c + abf$; 2) $af + bf - 2abg = 2r^2 g$, oder $f = 2g \left(\frac{r^2 + ab}{a + b}\right)$; 3) $2ag + 2bg - f = - c$. Substituirt man statt f seinen Werth aus der 2ten Gleichung, so wird $- c = 2g(a + b) - 2g \cdot \left(\frac{r^2 + ab}{a + b}\right) = \frac{2g}{a+b}\left[(a+b)^2 - r^2 - ab\right] = \frac{2g}{a+b}[a^2 + b^2 + ab - r^2]$.

Der gefundene Werth von c und von f in die erste Gleichung gesetzt, giebt

$$c'^2 = \frac{-2g}{a+b}[a^2r^2 + b^2r^2 + abr^2 - r^4] + \frac{2g}{a+b}[r^2ab + a^2b^2] = \frac{2g}{a+b}[-a^2r^2 - b^2r^2 + a^2b^2 + r^4] = \frac{2g}{a+b}[(r^2 - a^2)(r^2 - b^2)].$$

45) Wenn z gröſser als a ist, so wird der Factor $(a - z)$ und also das Product negativ, und die Quadratwurzel des Products unmöglich. Eben so wird, wenn z kleiner als b ist, der Factor $(z - b)$ negativ und die Quadratwurzel des Products unmöglich. z kann also nicht kleiner als b und nicht gröſser als a werden.

46) Differenziirt man die Gleichung $\sin\theta = \sqrt{\frac{a-z}{a-b}}$, so erhält man $d\theta \cdot \cos\theta = \frac{-\frac{1}{2}\,dz}{\sqrt{a - z} \cdot \sqrt{a - b}}$; nun ist $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin\theta^2} = \sqrt{1 - \frac{a - z}{a - b}} = \sqrt{\frac{z - b}{a - b}}$; dies substituirt, giebt $2d\theta = \frac{-dz}{\sqrt{a - z} \cdot \sqrt{z - b}}$.

Hierdurch wird $dt = \frac{2r \cdot d\theta}{\sqrt{2gz + f}}$; aus obiger Gleichung für $\sin\theta$ folgt $a - (a - b)\sin\theta^2 = z$ und

$2gz + f = 2ga - 2g(a - b)\sin\theta^2 + 2g \cdot \frac{r^2 + ab}{a + b} = \frac{2g}{a+b}[r^2 + a^2 + 2ab - (a^2 - b^2)\sin\theta^2]$

Der Winkel θ giebt die Koordinate z vermittelst der Gleichung

$$z = a \cos \theta^2 + b \sin \theta^2,$$

und die Koordinate z mit r dividirt, drückt den Cosinus des Winkels aus, welchen der Halbmesser r mit der Verticallinie macht.

Es sey ϖ der Winkel, welchen die senkrechte, durch den Halbmesser r gelegte, Ebene mit der senkrechten, durch die Axe der x gelegten, Ebene macht; so wird man

$$x = \sqrt{r^2 - z^2} \,.\, \cos \varpi; \qquad y = \sqrt{r^2 - z^2} \,.\, \sin \varpi$$

haben; dieses giebt [47])

$$x\,dy - y\,dx = (r^2 - z^2) \,.\, d\varpi;$$

die Gleichung $x\,dy - y\,dx = c'\,dt$ wird also

$$d\varpi = \frac{c'\,dt}{r^2 - z^2}$$

geben; substituirt man statt z und dt ihre vorhergehenden in θ ausgedrückten Werthe, so wird man den Winkel ϖ als Function von θ erhalten; man findet so für jede gegebene Zeit die Winkel θ und ϖ, und dies ist hinreichend, um die Lage des beweglichen Punktes zu bestimmen.

Wir wollen nun die Zeit, welche der Körper anwendet, um vom gröfsten Werth von z bis zum kleinsten zu gelangen, seine halbe Schwingung nennen; diese Zeit sey $\frac{1}{2} T$. Um sie zu bestimmen, mufs man den vorhergehenden Werth von dt von $\theta = 0$ an, bis $\theta = \frac{1}{2}\pi$ integriren, wo π die halbe Peripherie für den Halbmesser Eins ist; man findet so [48])

$$T = \pi \,.\, \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \sqrt{\frac{2r(a+b)}{(a+b)^2 + r^2 - b^2}} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \gamma^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . \gamma^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . \gamma^6 + \text{etc.}\right]$$

$= \frac{2g}{a+b} [r^2 - b^2 + (a+b)^2 - (a^2 - b^2) \sin \theta^2]$, folglich $dt = \frac{r \,.\, \sqrt{2(a+b)} \,.\, d\theta}{\sqrt{g \,.\, [r^2 - b^2 + (a+b)^2 - (a^2 - b^2) \sin \theta^2]}}$, woraus sogleich der im Text gegebene Ausdruck folgt.

47) Man bezeichne $\sqrt{r^2 - z^2}$ mit u, so ist u die Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyecks, dessen beide Seiten x und y sind, woraus $x = u \cos \varpi$ und $y = u \sin \varpi$; ferner $dx = du \,.\, \cos \varpi - d\varpi \,.\, u \,.\, \sin \varpi$ und $dy = du \,.\, \sin \varpi + d\varpi \,.\, u \,.\, \cos \varpi$. Hieraus $- y\,dx = - u \,.\, du \,.\, \sin \varpi \,.\, \cos \varpi + u^2 \,.\, d\varpi \,.\, \sin \varpi^2$ und $x\,dy = u \,.\, du \,.\, \sin \varpi \,.\, \cos \,.\, \varpi + u^2 \,.\, d\varpi \,.\, \cos \varpi^2$. Die Summe der beiden letzten Gröfsen ist gleich $u^2\, d\varpi \,.\, (\sin \varpi^2 + \cos \varpi^2) = u^2\, d\varpi$.

48) Um das Integral $\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \gamma^2 \sin \theta^2}}$ zu erhalten, mufs man die Wurzelgröfse in eine nach den Cosinus oder Sinus der Vielfachen des Winkels θ fortgehende Reihe verwandeln. Nun ist nach dem binomischen

Gedenkt man sich den Punkt am Ende eines nicht schweren Fadens, dessen anderes Ende fest ist, aufgehangen; so wird er sich genau wie im Innern einer Kugelfläche bewegen, wenn die Länge des Fadens gleich r ist. Er wird mit dem Faden ein Pendel bilden, der Cosinus der gröſsten Abweichungen desselben von der senkrechten Linie wird $\frac{b}{r}$ seyn. Nimmt man nun an, daſs in diesem Zustande die Geschwindigkeit des beweglichen Punktes gleich Null ist, so wird er in einer senkrechten Ebene schwingen, und man wird für diesen Fall $a = r$; $\gamma^2 = \frac{r-b}{2r}$ haben. Der Bruch $\frac{r-b}{2r}$ ist das Quadrat des Sinus der Hälfte des gröſsten Winkels, welchen der Faden mit der senkrechten Linie macht; die ganze Dauer T der Schwingung des Pendels wird also seyn

$$T = \pi . \sqrt{\frac{r}{g}} . \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{r-b}{2r}\right) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 . \left(\frac{r-b}{2r}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 . \left(\frac{r-b}{2r}\right)^3 + \text{etc.} \right]$$

Lehrsatz, wenn man die Binomialcoeffizienten der Potenz n nach Hrn. Prof. Hindenburgs Art mit $^n\mathfrak{A}$, $^n\mathfrak{B}$, $^n\mathfrak{C}$, $^n\mathfrak{D}$... bezeichnet, $(1 - \gamma^2 \sin\theta^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{A}\, \gamma^2 \sin\theta^2 + {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{B}\, \gamma^4 \sin\theta^4 - {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{C}\, \gamma^6 \sin\theta^6 +$ etc. Statt $\sin\theta^2$, $\sin\theta^4$ etc. substituire man ihre Werthe nach der bekannten Formel $2^{2n-1} \sin\theta^{2n} = \frac{1}{2}\, {}^{2n}\mathfrak{N} - {}^{2n}\overset{-1}{\mathfrak{N}} \cos 2\theta + {}^{2n}\overset{-2}{\mathfrak{N}} \cos 4\theta - {}^{2n}\overset{-3}{\mathfrak{N}} \cos 6\theta +$ etc. wo $\mathfrak{N}$ der nte Binomialcoefficient ist. Man erhält dadurch für die Wurzelgröſse eine Reihe von folgender Form: $A + B \cos 2\theta + C \cos 4\theta + D \cos 6\theta +$ etc. Dies mit $d\theta$ multiplicirt und integrirt, giebt $A . \theta + \frac{1}{2} B \sin 2\theta + \frac{1}{4} C \sin 4\theta + \frac{1}{6} D \sin 6\theta +$ etc. Die Constante ist gleich Null, weil für $\theta = 0$ auch $t = 0$ ist. Setzt man $\theta = 90°$, wodurch alle Glieder, das erste ausgenommen, gleich Null werden, so erhält man $\frac{1}{2} A . \pi$ für den Werth des Integrals von $\theta = 0$ bis $\theta = \frac{1}{2}\pi$ und die Zeit $\frac{1}{2} T$ wird gleich seyn $\frac{r . \sqrt{2(a+b)}}{\sqrt{g . [(a+b)^2 + r^2 - b^2]}} . \frac{1}{2} A . \pi = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} . \sqrt{\frac{2r(a+b)}{(a+b)^2 + r^2 - b^2}} . \frac{1}{2} A$. Um den Werth der Gröſse A zu erhalten, bemerken wir, daſs das beständige Glied der Reihe für $\sin\theta\ 2n$ nämlich $\frac{1}{2^{2n}}\, {}^{2n}\mathfrak{N}$ gleich $\pm {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{N}$ ist, wo das Zeichen $-$ zu nehmen ist, wenn n eine ungerade Zahl ist. Substituirt man in der Reihe $1 - {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{A}\, \gamma^2 \sin\theta^2 + {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{B}\, \gamma^4 \sin\theta^4 + {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{C}\, \gamma^6 \sin\theta^6 + \ldots$ statt der Potenzen der Sinus die beständigen Gröſsen ihrer Werthe, so erhält man

$$1 + {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{A}\, {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{A}\, \gamma^2 + {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{B}\, {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{B}\, \gamma^4 + {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{C}\, {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{C}\, \gamma^6 + {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{D}\, {}^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{D}\, \gamma^8 +$$

welches der Werth der Gröſse A ist.

Wenn die Schwingung sehr klein ist, so ist $\frac{r--b}{2r}$ ein sehr kleiner Bruch, den man vernachläſsigen kann, und alsdann hat man

$$T = \pi . \sqrt{\frac{r}{g}} .$$

Sehr kleine Schwingungen sind also isochron oder von gleicher Dauer, was auch immer ihre Gröſse seyn mag; und man kann vermittelst dieser Dauer und der entsprechenden Pendellänge die Aenderungen der Intensität der Schwere an verschiedenen Orten der Erde bestimmen.

Es sey z die Höhe, um welche die Körper während der Zeit T vermöge der Schwere fallen, so wird man nach dem 10ten Satz $2z = g\ T^2$ und folglich $z = \frac{1}{2}\ \pi^2\ r$ haben. Man wird also auf diese Art vermittelst der Länge des Sekundenpendels den Raum, welchen die Schwere jeden Körper in der ersten Sekunde seines Falles beschreiben läſst, mit einer groſsen Genauigkeit erhalten. Da sehr genaue Versuche gezeigt haben, daſs die Sekundenpendellänge dieselbe ist, was für Körper man auch schwingen läſst, so erhellet hieraus, daſs die Schwere auf gleiche Art auf alle Körper wirkt, und daſs sie an demselben Orte und in der nämlichen Zeit allen dieselbe Geschwindigkeit mitzutheilen strebt.

12. Da der Isochronismus der Schwingungen des Pendels nur als Näherung wahr ist, so ist es wichtig, die krumme Linie kennen zu lernen, auf welcher ein schwerer Körper sich bewegen muſs, um in der nämlichen Zeit zum Punkt zu gelangen, wo seine Bewegung aufhört, was auch immer der Bogen sey, welchen er von dem niedrigsten Punkt an beschrieben hat. Um aber diese Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit zu umfassen, wollen wir annehmen, so wie dies in der Natur der Fall ist, daſs der bewegliche Punkt sich in einem widerstehenden Mittel bewegt. Es sey s der vom niedrigsten Punkt der krummen Linie an beschriebene Bogen; z die senkrechte von diesem Punkt an gezählte Abscisse; dt das Element der Zeit und g die Schwere. Die verzögernde Kraft längs des Bogens der krummen Linie wird bestehen 1. aus der nach der Richtung des Bogens ds zerlegten Schwere, welche also gleich $g . \frac{dz}{ds}$ ist; 2. aus dem Widerstand des Mittels, welchen wir durch $\phi\left(\frac{ds}{dt}\right)$ ausdrücken wollen,

len, wo $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ die Geschwindigkeit des beweglichen Punkts und $\phi\left(\frac{ds}{dt}\right)$ irgend eine Funktion dieser Geschwindigkeit ist. Das Differenzial dieser Geschwindigkeit wird nach dem 7ten Satz gleich $- g \,.\, \frac{dz}{ds} - \phi\left(\frac{ds}{dt}\right)$ seyn; setzt man also dt beständig, so wird man

$$o = \frac{d^2 s}{dt^2} + g \,.\, \frac{dz}{ds} + \phi\left(\frac{ds}{dt}\right) \text{ (i)}$$

haben. Wir wollen nun annehmen, daſs $\phi\left(\frac{ds}{dt}\right) = m \,.\, \frac{ds}{dt} + n \,.\, \frac{ds^2}{dt^2}$, und daſs $s = \psi(s')$ sey; bezeichnet man dann durch $\psi'(s')$ das Differenzial von $\psi(s')$ dividirt durch ds', und durch $\psi''(s')$ das Differenzial von $\psi'(s')$ dividirt durch ds', so erhält man

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds'}{dt} \,.\, \psi'(s')$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2 s'}{dt^2} \,.\, \psi'(s') + \frac{ds'^2}{dt^2} \,.\, \psi''(s');$$

und die Gleichung (i) wird dadurch

$$o = \frac{d^2 s'}{dt^2} + m \,.\, \frac{ds'}{dt} + \frac{ds'^2}{dt^2} \,.\, \left[\frac{\psi''(s') + n \,.\, [\psi'(s')]^2}{\psi'(s')}\right] + \frac{g \,.\, dz}{ds' \,.\, [\psi'(s')]^2} \,.\, \text{ (l)}$$

Man kann das Glied, welches mit $\frac{ds'^2}{dt^2}$ multiplicirt ist, vermittelst der folgenden Gleichung wegschaffen:

$$o = \psi''(s') + n\, [\psi'(s')]^2; \text{ [49]}$$

49) Es ist erlaubt, den Koefficienten von ds'^2 in der Gleichung (l) gleich Null zu setzen, weil die Gröſse s' unbestimmt ist. Die Gleichung, die man aus dieser Annahme erhält, dient dann zur Bestimmung von s'. Denn es sey z eine Function von s' und gleich $\psi'(s')$, so ist $\psi''(s') = \frac{d \,.\, \psi'(s')}{ds'} = \frac{dz}{ds'}$; dadurch verwandelt sich die Gleichung $o = \psi''(s') + n\,[\psi'(s')]^2$ in folgende:

$$o = \frac{dz}{ds'} + n\, z^2;$$ multiplicirt man mit $z^{-2}\, ds$ so erhält man

$$o = dz \,.\, z^{-2} + n\, ds',$$ und wenn man integrirt,

$$o = - z^{-1} + n s' + q',$$ wo q' eine beständige Gröſse ist.

Hieraus $z = (n s' + q')^{-2}$, da nun $z = \psi'(s') = \frac{d \,.\, \psi(s')}{ds'}$, so folgt hieraus $d \,.\, \psi(s') = ds' \,.\, (ns' + q')^{-1}$

aus welcher man durch Integriren

$$\psi(s') = \log . [h . (s'+q)^{\frac{1}{n}}] = s$$

erhält, wo h und q willkührliche beständige Gröſsen sind. Läſst man s' zugleich mit s anfangen, so wird man $h q^{\frac{1}{n}} = 1$ haben, und setzt man zur mehreren Vereinfachung $h = 1$, so wird man

$$s' = c^{ns} - 1$$

erhalten; wo c die Zahl ist, deren hyperbolischer Logarithme der Einheit gleich ist. Dadurch wird die Differenzialgleichung (1) sich in folgende verwandeln:

$$0 = \frac{d^2 s'}{dt^2} + m . \frac{ds'}{dt} + n^2 . g . \frac{dz}{ds'} . (1 + s')^2.$$

Setzt man s' sehr klein, so kann man das letzte Glied dieser Gleichung in eine nach den Potenzen von s' steigende Reihe entwickeln, welche folgende Form haben wird: $ks' + ls'^i$, wo i gröſser als die Einheit ist; dieses giebt

$$0 = \frac{d^2 s'}{dt^2} + m . \frac{ds'}{dt} + k s' + l s'^i + \text{etc.}$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $c^{\frac{mt}{2}} . (\cos \gamma t + \sqrt{-1} . \sin \gamma t)$ und inte-

und wenn man integrirt, $\psi(s') = \frac{1}{n} \int \frac{n\, ds'}{n s' + q'} = \frac{1}{n} \log (n s' + q') + \log h'$, wo $\log h'$ eine beständige Gröſse ist; folglich

$$\psi(s') = \log [h' . (ns' + q')^{\frac{1}{n}}].$$

Diese Gleichung scheint von der des Hrn. Verf. verschieden zu seyn. Man erhält dieselbe auf folgende Art: aus $0 = dz . z^{-2} + n\, ds'$ erhält man $0 = \frac{1}{n} . dz . z^{-2} + ds'$, und wenn man integrirt, $0 = -\frac{1}{n} z^{-1} + s' + q$, woraus $nz = (s' + q)^{-1}$ oder $n . d . \psi(s') = (s' + q)^{-1} ds$. Integrirt man von Neuem, so erhält man $n\, \psi(s') = \log (s' + q) + n . \log h$, wo $n . \log h$ die Constante ist. Hieraus $\psi(s') = \log [h . (s' + q)^{\frac{1}{n}}]$. Beide Werthe müssen also einander gleich seyn, und man muſs dieses durch die beständigen Gröſsen erhalten können. In der That, wenn man $q' = nq$ setzt, so wird $\frac{1}{n} \log (ns' + q') = \frac{1}{n} \log n . (s' + q) = \frac{1}{n} \log n + \frac{1}{n} \log (s' + q)$; folglich $\psi(s') = \frac{1}{n} \log (s' + q) + \frac{1}{n} \log n + \log h'$, welches gleich $\frac{1}{n} \log (s' + q) + \log h$ seyn muſs. Hieraus erhält man $\log h = \frac{1}{n} \log n + \log h'$, oder $h = h' . n^{\frac{1}{n}}$.

grirt dann, wo $\gamma = \sqrt{k - \frac{m^2}{4}}$ gesetzt wird, so erhält man [50])

$$c^{\frac{mt}{2}} \cdot \left(\cos\gamma t + \sqrt{-1} \cdot \sin\gamma t\right) \cdot \left[\frac{ds'}{dt} + \left(\frac{m}{2} - \gamma \cdot \sqrt{-1}\right) s'\right]$$

$$= -l \cdot \int s'^{i} \cdot dt \cdot c^{\frac{mt}{2}} \cdot (\cos\gamma t + \sqrt{-1} \cdot \sin\gamma t) - \text{etc.}$$

Sondert man die möglichen Theile von den unmöglichen und vergleicht sie unter einander, so wird man zwey Gleichungen erhalten, vermittelst welcher man

50) Man kann sich leicht durch Differenziiren von der Richtigkeit des Integrals versichern. Differenziirt man jeden der drey Factoren des ersten Theils der Integralgleichung, so erhält man

$$\frac{m}{2} dt \cdot c^{\frac{mt}{2}} \cdot \left(\cos\gamma t + \sqrt{-1} \cdot \sin\gamma t\right) \cdot \left(\frac{ds'}{dt} + \frac{m}{2} s' - \gamma\sqrt{-1} \cdot s'\right)$$

$$+ \gamma \cdot dt \cdot c^{\frac{mt}{2}} \cdot \left(-\sin\gamma t + \sqrt{-1} \cdot \cos\gamma t\right) \cdot \left(\frac{ds'}{dt} + \frac{m}{2} s' - \gamma\sqrt{-1} \cdot s'\right)$$

$$+ c^{\frac{mt}{2}} \cdot \left(\cos\gamma t + \sqrt{-1} \cdot \sin\gamma t\right) \cdot \left(\frac{d^2 s'}{dt} + \frac{m}{2} ds' - \gamma\sqrt{-1} \cdot ds'\right).$$

Multiplicirt man das zweyte Glied dieses Differenzials mit $-\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$, welches gleich 1 ist, so erhalten alle drey Glieder den gemeinschaftlichen Factor $c^{\frac{mt}{2}} \cdot (\cos\gamma t + \sqrt{-1} \cdot \sin\gamma t)$; läſst man diesen gemeinschaftlichen Factor auſser Acht, so ist die Summe der drey Glieder

$$\frac{m}{2} dt \cdot \left(\frac{ds'}{dt} + \frac{m}{2} s' - \gamma\sqrt{-1} \cdot s'\right) + \gamma\sqrt{-1} \cdot dt \left(\frac{ds'}{dt} + \frac{m}{2} s' - \gamma\sqrt{-1} \cdot s'\right) + \frac{d^2 s}{dt'} + \frac{m}{2} ds' - \gamma\sqrt{-1} \cdot ds'$$

$$= \left(\frac{m}{2} + \gamma\sqrt{-1}\right) \cdot dt \cdot \left[\frac{ds'}{dt} + \left(\frac{m}{2} - \gamma\sqrt{-1}\right) s'\right] + \frac{d^2 s}{dt'} + \left(\frac{m}{2} - \gamma\sqrt{-1}\right) ds'$$

$$= 2 \cdot \frac{m}{2} \cdot ds' + \left(\frac{m^2}{4} + \gamma^2\right) s' \, dt + \frac{d^2 s}{dt}.$$

Nun ist $\gamma^2 = k - \frac{m^2}{4}$, folglich $\gamma^2 + \frac{m^2}{4} = k$; dies substituirt, erhält man $m\,ds' + k\,s'\,dt + \frac{d^2 s}{dt}$.

Das Differenzial des zweyten Theils des obigen Integrals ist $-l\,s'^{i}\,dt$ multiplicirt in den obigen gemeinschaftlichen Factor; läſst man diesen also wie bey dem ersten Theil weg, so erhält man

$$m\,ds' + k\,s'\,dt + \frac{d^2 s}{dt} = -l\,s'^{i}\,dt,$$

woraus man, wenn man mit dt dividirt, das gegebene Differenzial erhält.

Das Integral selbst findet man bequem auf folgende Art. Die gegebene Gleichung ist

$\frac{d^2 s'}{dt} + m \cdot ds' + k\,s'\,dt = -l \cdot s'^{i} \cdot dt$, wo dt beständig ist; und wenn man integrirt

$\frac{ds'}{dt} + m \cdot s' + k \cdot \int s'\,dt = -l \cdot \int s'^{i}\,dt$. Soll $s\,dt$ der Integration fähig werden, so muſs man die

$\frac{ds'}{dt}$ eliminiren kann; hier ists aber hinreichend, bloſs die folgende zu betrachten:

$$c^{\frac{mt}{2}} \cdot \frac{ds'}{dt}.\sin\gamma t + c^{\frac{mt}{2}}.s'.\left(\frac{m}{2}.\sin\gamma t - \gamma.\cos\gamma t\right) = -l.\int s'^{i}.dt.c^{\frac{mt}{2}}.\sin\gamma t - \text{etc.}$$

gegebene Differenzialgleichung mit einer Funktion von t, welche wir mit X bezeichnen wollen, multipliciren; dann erhält man $X.\left(\frac{d^2s'}{dt} + m.ds'\right) + kXs'dt = -l.X.s'^{i}dt$. Nun ist bekanntlich, wenn man theilweise integrirt, $\int.X\left(\frac{d^2s'}{dt}+m.ds'\right) = X.\left(\frac{ds'}{dt}+ms'\right) - \int.\left(\frac{ds'}{dt}+ms'\right).dX$ $k\int.X.s'.dt = ks'.\int Xdt - k.\int.ds.\int Xdt$. Setzt man nun $\int Xdt = \alpha X$, so ist die Summe der vorhergehenden beiden Integrale gleich $X\left(\frac{ds'}{dt}+ms'+\alpha ks'\right)$ $-\int.\left[dX.\left(\frac{ds'}{dt}+ms'\right)+k\alpha.X.ds\right]$. . (1), welche Gröſse dem Integral des zweyten Theils der vorigen Differenzialgleichung, nämlich $-l.\int.Xs'^{i}dt$, gleich ist. Man muſs nun α durch Versuche so bestimmen, daſs die Gröſse unter dem Integralzeichen entweder gleich Null oder für sich der Integration fähig ist. Am natürlichsten ist es, zuerst α gleich einer beständigen Gröſse zu setzen; denn dann ist, da $\int.Xdt = \alpha X$, und folglich $Xdt = \alpha dX$, oder $\frac{1}{\alpha}.dt = \frac{dX}{X} = d.\log X$ ist, $\frac{1}{\alpha}t = \log X + \text{Constans}$. Es sey die beständige Gröſse gleich $\log\frac{1}{n}$, so hat man $nc^{\frac{1}{\alpha}t} = X$. Substituirt man in dem Integral $\int.\left[dX\left(\frac{ds'}{dt}+ms'\right)+\alpha k.X.ds'\right]$ statt dX und X ihre Werthe, so erhält man

$$n.\int.c^{\frac{1}{\alpha}}\left[\left(\frac{1+\alpha^2k}{\alpha}\right)ds' + \frac{m}{\alpha}s'.dt\right].$$

Nun ist

$$d.\left(ms'.c^{\frac{t}{\alpha}}\right) = m.c^{\frac{t}{\alpha}}.ds' + \frac{m}{\alpha}s'.dt.c^{\frac{t}{\alpha}}$$

Das vorhergehende Integral wird also gleich $nms'.c^{\frac{t}{\alpha}}$ seyn, wenn die Koeffizienten von ds' in beiden Ausdrücken einander gleich sind; man hat also

$$m = \frac{1+\alpha^2k}{\alpha}$$

woraus $\alpha = \frac{m\pm\sqrt{m^2-4k}}{2k}$ und $\frac{1}{\alpha} = \frac{+m\mp\sqrt{m^2-4k}}{2}$.

Substituirt man diese Werthe in die Gröſse (1) so erhält man:

$$n.c^{\frac{t}{2}(m\mp\sqrt{m^2-4k})}.\left[\frac{ds'}{dt}+\left(\frac{1}{2}m\pm\frac{1}{2}\sqrt{m^2-4k}\right)s'\right].$$

wo man annimmt, daſs die Integrale des zweyten Theils dieser Gleichung zugleich mit t anfangen. Nennt man ferner T den Werth von t am Ende der Bewegung, wo $\frac{ds}{dt} = 0$ ist [51]), so hat man für diesen Augenblick

$$c^{\frac{mT}{2}} \,.\, s' \,.\, \left(\frac{m}{2} \sin\gamma T - \gamma \,.\, \cos\gamma T\right) = -\, l \,.\, \int s'^{i} \,.\, dt \,.\, c^{\frac{mt}{2}} \sin vt - \text{etc.}$$

Setzt man s' unendlich klein, so verschwindet der zweyte Theil dieser Gleichung in Betracht des ersten, und man hat

$$0 = \frac{m}{2} \,.\, \sin \gamma T - \gamma \,.\, \cos \gamma T.$$

Hieraus erhält man

$$\text{tang } \gamma \, T = \frac{2\gamma}{m},$$

und da die Zeit T vermöge der Voraussetzung unabhängig vom beschriebenen Bogen ist, so hat dieser Werth der Tangente von γT für jeden Bogen Statt; dieses giebt, was auch immer s' für einen Werth hat,

$$0 = l \,.\, \int s'^{i} \,.\, dt \,.\, c^{\frac{mt}{2}} \,.\, \sin \gamma t + \text{etc.}$$

wo das Integral von $t = 0$ bis $t = T$ zu nehmen ist. Nimmt man an, daſs s' sehr klein ist, so wird von dieser Gleichung nur das erste Glied übrig bleiben,

Man wird sich leicht durch wirkliches Differenziiren versichern können, daſs dieses Integral der gegebenen Differenzialgleichung Genüge thut. Setzt man, wie im Text geschehen, $m^2 - 4k = -4\gamma^2$, so verwandelt sich dieses Integral im folgendes:

$$n \,.\, c^{t \,.\, \left(\frac{1}{2} m \mp \gamma \sqrt{-1}\right)} \,.\, \left[\frac{ds'}{dt} + \left(\frac{1}{2} m \pm \gamma \sqrt{-1}\right) s'\right].$$

Endlich ist

$$c^{t\left(\frac{1}{2} m \mp \gamma \sqrt{-1}\right)} = c^{\frac{1}{2} mt} \,.\, c^{\mp t\gamma\sqrt{-1}} = c^{\frac{1}{2} mt} \,.\, (\cos \gamma t \mp \sqrt{-1} \,.\, \sin\gamma t) \,.$$

51) Am Ende der Bewegung ist die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ gleich Null. Differenziirt man aber die Gleichung $s' = c^{ns} - 1$, so erhält man $ds' = n \,.\, ds \,.\, c^{ns} = n \,.\, ds \; (1 + s')$ und wenn man mit dt dividirt $\frac{ds'}{dt} = n \,.\, (1 + s') \,.\, \frac{ds}{dt}$. Ist also $\frac{ds}{dt}$ gleich Null, so ist auch $\frac{ds'}{dt} = 0$, und folglich das Glied $c^{\frac{mt}{2}} \frac{ds'}{dt} \,.\, \sin \gamma t$ der vorhergehenden Gleichung gleich Null.

und man kann ihr dann auf keine andere Art Genüge thun, als wenn man $l = o$ setzt; denn da der Factor $\frac{mt}{c^2}$. sin γt beständig positiv ist, von $t = o$ an bis $t = T$, so ist das vorhergehende Integral nothwendig innerhalb dieser Grenzen positiv. Es kann also Tavtochronismus nur in der Voraussetzung Statt finden, daſs

$$n^2 g . \frac{dz}{ds'} . (1 + s')^2 = k s'$$

ist; dieses giebt für die Gleichung der tavtochronischen krummen Linie

$$g\,dz = \frac{k\,ds}{n} . (1 - c^{-ns}) .$$

Im leeren Raum, und wenn der Widerstand bloſs der Geschwindigkeit proportional ist, ist $n = o$, und die vorhergehende Gleichung wird $g\,dz = k\,ds$, die Gleichung für die Cycloide.

Es ist merkwürdig, daſs der Koefficient n des Theils des Widerstandes, welcher dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, sich nicht im Ausdruck für die Zeit T findet, und es ist aus der vorhergehenden Analysis augenscheinlich, daſs dieser Ausdruck derselbe seyn würde, wenn man zum Gesetz des Widerstandes noch die Glieder $p . \frac{ds^3}{dt^3} + q . \frac{ds^4}{dt^4}$ + etc. hinzusetzen wollte.

Es sey im Allgemeinen R die retardirende Kraft längst der krummen Linie, so wird man

$$o = \frac{d^2 s}{dt^2} + R$$

haben; s ist eine Function der Zeit t und des ganzen beschriebenen Bogens, welcher folglich eine Function von t und s ist; differenziirt man die letztere Function, so wird man eine Differenzialgleichung von folgender Form erhalten:

$$\frac{ds}{dt} = V ,$$

wo V eine Function von t und s ist, welche nach der Bedingung der Aufgabe Null seyn soll, wenn t einen bestimmten, vom ganzen beschriebenen Bogen unabhängigen, Werth hat. Wir wollen zum Beyspiel $V = S . T$ setzen, wo S eine Function von s allein, und T eine Function von t allein ist, so hat man

$$\frac{d^2s}{dt^2} = T \cdot \frac{dS}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} + S \cdot \frac{dT}{dt} = \frac{dS}{S \cdot ds} \cdot \frac{ds^2}{dt^2} + S \cdot \frac{dT}{dt}.$$

Da aber die Gleichung $\frac{ds}{dt} = S \cdot T$, t und folglich $\frac{dT}{dt}$ einer Function von $\frac{ds}{S \cdot dt}$ gleich giebt, welche Function wir mit $\frac{ds^2}{S^2 \cdot dt^2} \cdot \psi\left(\frac{ds}{S \cdot dt}\right)$ bezeichnen wollen; so wird man haben

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{ds^2}{S \cdot dt^2} \cdot \left[\frac{dS}{ds} + \psi\left(\frac{ds}{S \cdot dt}\right)\right] = -R.$$

Dies ist der Ausdruck des Widerstandes, der mit der Differenzialgleichung $\frac{ds}{dt} = S \cdot T$ übereinstimmt, und man sieht leicht, daſs sie den Fall in sich begreift, wo der Widerstand den beiden ersten Potenzen der Geschwindigkeit, jede mit einem beständigen Koefficienten multiplicirt, proportional ist. Andere Differenzialgleichungen würden andere Gesetze des Widerstands geben.

Drittes Kapitel.

Vom Gleichgewicht eines Systems von Körpern.

13. Der einfachste Fall des Gleichgewichts mehrerer Körper ist der, wenn zwey materielle Punkte mit gleichen und vollkommen entgegengesetzten Geschwindigkeiten auf einander stoſsen; ihre gegenseitige Undurchdringlichkeit vernichtet offenbar ihre Geschwindigkeit und versetzt sie in den Zustand der Ruhe.

Wir wollen uns nun eine Anzahl m materieller, einander berührender, Punkte vorstellen, welche in gerader Linie geordnet sind, und alle die Geschwindigkeit u in der Richtung dieser geraden Linie haben. Wir wollen uns ferner eine Anzahl m' einander berührender Punkte denken, die auf der nämlichen Linie geordnet sind, und die Geschwindigkeit u' haben, welche der Geschwindigkeit u entgegengesetzt ist, so daſs beide Systeme auf einander stoſsen müssen. Für ihr Gleichgewicht muſs im Augenblick des Zusammenstoſsens ein Verhältniſs zwischen u und u' statt finden, welches zu bestimmen ist.

Hierzu bemerken wir, daſs das System m mit der Geschwindigkeit u und ein einzelner materieller Punkt mit der entgegengesetzten Geschwindigkeit mu, ein Gleichgewicht machen würden; denn jeder Punkt des Systems würde im einzelnen Punkt einen Theil der Geschwindigkeit gleich u zerstöhren, und folglich alle m Punkte die ganze Geschwindigkeit mu. Auf eine ähnliche Art kann man statt des Systems m' einen einzelnen Punkt mit der Geschwindigkeit $m'u'$ setzen; da man nun annimmt, daſs beide Systeme im Gleichgewicht sind, so müssen auch beide Punkte ein Gleichgewicht machen; dies erfordert, daſs ihre Geschwindigkeiten gleich sind, man hat also für die Bedingung des Gleichgewichts beider Systeme, $mu = m'u'$.

Die Masse eines Körpers ist die Anzahl seiner materiellen Punkte, und man nennt **Gröſse der Bewegung**, das Product der Masse und der Geschwindigkeit;

digkeit; dies versteht man auch unter dem Ausdruck Kraft eines bewegten Körpers. Zum Gleichgewicht zweyer Körper oder zweyer Systeme von Punkten, welche in entgegengesetzter Richtung auf einander stoſsen, müssen die Gröſsen der Bewegung oder die entgegengesetzten Kräfte gleich groſs seyn, und folglich die Geschwindigkeiten sich umgekehrt, wie die Massen verhalten.

Die Dichtigkeit der Körper hängt von der Anzahl der materiellen Punkte ab, welche sie in einem gegebenen Raum enthalten. Um ihre absolute Dichtigkeit zu haben, müſste man ihre Massen mit der einer Substanz ohne Zwischenräume vergleichen können; man kennt aber keine ähnliche Substanz, und wir können also nur die relative Dichtigkeit der Körper haben, das heiſst, das Verhältniſs ihrer Dichtigkeit zu der einer gegebenen Substanz. Es ist augenscheinlich, daſs die Masse im Verhältniſs des Raums und der Dichtigkeit ist; nennt man also M die Masse eines Körpers, U seinen körperlichen Inhalt und D seine Dichtigkeit, so hat man im Allgemeinen $M = DU$, eine Gleichung, bey welcher man bemerken muſs, daſs die Gröſsen M, D, U Verhältnisse zu den Einheiten ihrer Gattungen ausdrücken.

Das, was wir so eben gesagt haben, setzt voraus, daſs die Körper aus ähnlichen materiellen Punkten zusammengesetzt sind, und daſs ihre Verschiedenheit nur in der verschiedenen Lage dieser Punkte unter einander bestehe. Da uns aber die Natur der Körper unbekannt ist, so ist diese Annahme willkührlich, und es ist möglich, daſs wesentliche Unterschiede unter den Bestandtheilchen Statt finden. Glücklicherweise ist die Wahrheit dieser Voraussetzung für die Mechanik nicht nothwendig, und man kann, ohne irgend einen Irrthum zu fürchten, von ihr Gebrauch machen, wofern man nur durch ähnliche materielle Punkte solche versteht, welche, wenn sie mit gleichen und entgegengesetzten Geschwindigkeiten auf einander stoſsen, sich gegenseitig im Gleichgewicht halten, was auch immer ihre Natur seyn mag.

14. Zwey materielle Punkte, deren Massen m und m' sind, können nur nach der geraden Linie, die sie vereinigt, auf einander wirken. Wenn die beiden Punkte durch einen Faden vereinigt sind, der über eine feste Rolle geht, so ist es in der That möglich, daſs ihre gegenseitige Wirkung nicht die Richtung dieser geraden Linie habe; man kann aber die feste Rolle sich so vorstellen, als ob sie in ihrem Mittelpunkt eine Masse von unendlich groſser Dich-

tigkeit habe, welche auf die beiden Körper m und m' zurückwirkt, deren Wirkung auf einander alsdann bloſs indirect ist.

Wir nennen p die Wirkung, welche m auf m' vermittelst einer geraden, unbiegsamen und nicht schweren Linie ausübt, von welcher man annimmt, daſs sie die beiden Punkte vereinigt. Stellt man sich nun vor, daſs zwey gleiche und entgegengesetzte Kräfte p und $-p$ diese gerade Linie zu bewegen streben, so wird die Kraft $-p$ im Körper m eine mit p gleiche Kraft aufheben, und die Kraft p der geraden Linie wird sich ganz dem Körper m' mittheilen. Diesen Verlust von Kraft des Körpers m, der durch seine Wirkung auf m' verursacht wird, nennt man die Gegenwirkung von m'; folglich ist in der Mittheilung der Bewegungen die Gegenwirkung beständig der Wirkung gleich und entgegengesetzt. Beobachtungen zeigen, daſs dieses Grundgesetz in allen Wirkungen der Natur Statt hat.

Wir wollen uns nun zwey schwere Körper m und m' vorstellen, welche an den Endpunkten einer geraden, horizontalen, unbiegsamen und nicht schweren Linie befestigt sind, welche sich um einen ihrer Punkte frey drehen kann. Man muſs, um die Wirkung dieser Körper, wenn sie im Gleichgewicht sind, auf einander sich vorzustellen, annehmen, daſs die gerade Linie unendlich wenig am festen Punkt gebrochen ist, daſs sie aus zwey geraden Linien besteht, welche am festen Punkt einen Winkel machen, der nur um eine unendlich kleine Gröſse ω von zwey Rechten verschieden ist. Es sollen f und f' die Abstände der Körper m und m' vom festen Punkt seyn. Zerlegt man nun die Schwere von m in zwey Kräfte, in eine, welche auf den festen Punkt wirkt, und in eine andere, welche gegen m' gerichtet ist, so wird die letztere Kraft gleich $\frac{mg \,.\, (f + f')}{\omega f'}$ seyn, wo g die Schwere bedeutet. Auf eine ähnliche Art wird die Wirkung der Schwere von m' auf m gleich $\frac{m'g \,.\, (f + f')}{\omega f}$ seyn; des Gleichgewichts wegen muſs man beide Kräfte einander gleich setzen können, folglich $mf = m'f'$. Dies ist das bekannte Gesetz des Gleichgewichts am Hebel; und man begreift dadurch zu gleicher Zeit die gegenseitige Wirkung paralleler Kräfte.

Wir wollen nun das Gleichgewicht eines Systems von Punkten m, m', m'' etc. betrachten, auf welche was nur immer für Kräfte wirken, und welche auf einander zurückwirken. Es soll f der Abstand von m zu m', f' der Abstand

von m zu m'', f'' der Abstand von m' zu m'' seyn etc.; ferner p die gegenseitige Wirkung von m auf m', p' die von m auf m'', p'' die von m' auf m''; endlich sollen mS, $m'S'$, $m''S''$ etc. die Kräfte seyn, welche auf m, m', m'' etc. wirken, und s, s', s'' etc. die geraden Linien von ihrem Ursprung bis zu den Körpern m, m', m'' etc. Dieses vorausgesetzt, kann der Punkt m als vollkommen frey und im Gleichgewicht vermöge der Kraft mS und der Kräfte, welche ihm die Körper m', m'' etc. mittheilen, angesehen werden; wenn er aber gezwungen wäre, sich auf einer Fläche, oder auf einer krummen Linie zu bewegen, so müſste man zu diesen Kräften noch die Rückwirkung der Fläche oder der krummen Linie hinzusetzen. Es sey also δs die Variation von s und man bezeichne mit $\delta_{,} f$ die Variation von f, so genommen, daſs man m' als fest betrachtet; eben so bezeichne $\delta_{,} f'$ die Variation von f', so genommen, daſs man m'' als fest betrachtet etc. Es sollen R und R' die Gegenwirkungen der beiden Flächen seyn, welche durch ihren Durchschnitt die krumme Linie bilden, auf welcher der Punkt m sich bewegen muſs; und δr, $\delta r'$ die Variationen der Richtungen der letzten Kräfte, so wird die Gleichung (d) im 3ten Satz folgende geben:

$$0 = mS \,.\, \delta s + p \,.\, \delta_{,} f + p' \delta_{,} f' + \text{etc.} \quad + R \,.\, \delta r + R' \,.\, \delta r' + \text{etc.}$$

Auf eine ähnliche Art kann m' als ein vollkommen freyer Punkt angesehen werden, der im Gleichgewicht ist, vermöge der Kraft $m'S'$, vermöge der Wirkungen der Körper m und m'' etc. und der Rückwirkungen der Flächen, auf welchen er sich bewegen muſs, welche wir mit R'' und R''' bezeichnen wollen. Es sey dann $\delta s'$ die Variation von s', $\delta_{,,} f$ die Variation von f, so genommen, daſs man m als fest betrachtet; $\delta_{,} f''$ die Variation von f'', so genommen, daſs man m'' als fest ansieht etc.; es sollen ferner $\delta r''$ und $\delta r'''$ die Variationen der Richtungen von R'' und R''' seyn, so wird das Gleichgewicht von m' geben

$$0 = m' \; S' \,.\, \delta s' + p \,.\, \delta_{,,} f + p'' \,.\, \delta_{,} f'' + \text{etc.} \quad + R'' \delta r'' + R''' \delta r''' + \text{etc.};$$

ähnliche Gleichungen wird man vermöge des Gleichgewichts der Körper m'', m''' etc. haben; addirt man sie alle und bemerkt hierbey, daſs

$$\delta f = \delta_{,} f + \delta_{,,} f; \qquad \delta f' = \delta_{,} f' + \delta_{,,} f' \text{ etc.}$$

ist, wo δf, $\delta f'$ etc. die gänzlichen Variationen von f und f' etc. sind; so erhält man

$$0 = \Sigma \,.\, m \; S \,.\, \delta s + \Sigma \,.\, p \,.\, \delta f + \Sigma \,.\, R \,.\, \delta r; \quad \text{(k)}$$

eine Gleichung, in welcher die Variationen der Koordinaten der verschiedenen Körper des Systems gänzlich willkührlich sind. Hierbey ist zu bemerken, daſs man statt $m \,.\, S \,.\, \delta s$ vermöge der Gleichung (a) im 2ten Satz die Summe aller

einzelnen auf m wirkenden Kräfte, jede mit der Variation ihrer Richtung multiplicirt, setzen kann. Dies gilt auch von den Producten $m' S' . \delta s'$, $m'' S'' . \delta s''$ etc.

Wenn die Körper m, m', m'' etc. auf eine unveränderliche Art unter einander verbunden sind, so sind die Abstände f, f', f'' etc. beständig, und man hat als Bedingung der Verbindung der Theile des Systems $\delta f = 0$, $\delta f' = 0$, $\delta f'' = 0$ etc. Da die Variationen der Koordinaten in der Gleichung (k) willkührlich sind, so kann man sie so bestimmen, daſs sie den letztern Gleichungen Genüge thun, und alsdann verschwinden die Kräfte p, p', p'' etc., welche von der gegenseitigen Wirkung der Körper des Systems abhängen, aus der Gleichung (k). Man kann auch noch die Glieder $R \delta r$, $R' \delta r'$ etc. wegschaffen, wenn man die Variationen der Koordinaten so bestimmt, daſs sie den Gleichungen für die Flächen, auf welchen die Körper sich bewegen müssen, Genüge thun; dadurch wird die Gleichung (k) in folgende verwandelt:

$$0 = \Sigma . m S . \delta s ; \ldots (l).$$

Hieraus folgt, daſs im Fall des Gleichgewichts die Summe der Variationen der Producte der Kräfte mit den Elementen ihrer Richtungen gleich Null ist, auf welche Art man auch die Lage des Systems sich ändern läſst, wofern nur die Bedingungen des Zusammenhangs seiner Theile beobachtet werden.

Dieser Lehrsatz, zu welchem wir in der besondern Voraussetzung eines Systems von Körpern, welche auf eine unveränderliche Art unter einander verbunden sind, gelangt sind, ist allgemein, was auch immer die Bedingungen des Zusammenhangs der Theile des Systems seyn mögen. Es ist, um dies zu beweisen, hinreichend zu zeigen, daſs man, wenn man die Variation der Koordinaten diesen Bedingungen gemäſs bestimmt,

$$0 = \Sigma . p . \delta f + \Sigma . R . \delta r,$$

in der Gleichung (k) hat. Nun ist aber klar, daſs δr, $\delta r'$ etc. vermöge dieser Bedingungen Null sind; man darf also nur noch beweisen, daſs man auch $0 = \Sigma . p . \delta f$ hat, wenn man die Variationen der Koordinaten den nämlichen Bedingungen unterwirft.

Wir wollen uns vorstellen, daſs bloſs die Kräfte p, p', p'' etc. auf das System wirken, und annehmen, daſs die Körper gezwungen sind, sich auf krummen Linien zu bewegen, welche sie vermöge eben derselben Bedingungen beschreiben können. Alsdann werden diese Kräfte sich in folgende zerlegen: erstens in die

Kräfte q, q', q'' etc. nach der Richtung der geraden Linien f, f', f'' etc., welche sich gegenseitig zerstöhren werden, ohne eine Wirkung auf die beschriebenen krummen Linien hervorzubringen; zweytens, in die Kräfte T, T', T'' etc. senkrecht auf die beschriebenen krummen Linien; endlich in die Kräfte nach der Richtung der Tangenten der beschriebenen krummen Linien, vermittelst welcher das System bewegt werden wird. Man sieht aber leicht, daſs diese leztern Kräfte gleich Null sind; denn wenn man annimmt, daſs das System ihnen frey gehorchen kann, so können sie weder Druck auf die beschriebenen krummen Linien, noch Gegenwirkung der Körper unter einander hervorbringen; sie können folglich kein Gleichgewicht mit den Kräften $-p$, $-p'$, $-p''$ etc.; q, q', q'' etc.; T, T', T'' etc. machen; folglich müssen diese Kräfte gleich Null seyn, und das System muſs bloſs vermöge der Kräfte $-p$, $-p'$, $-p''$ etc.; q, q', q'' etc.; T, T', T'' etc. im Gleichgewicht seyn. Es sollen δi, $\delta i'$ etc. die Variationen der Richtungen der Kräfte T, T' etc. seyn, so wird man durch die Gleichung (k)

$$0 = \Sigma \,.\, (q - p) \,.\, \delta f + \Sigma \,.\, T \,.\, \delta i$$

haben; da man aber annimmt, daſs das System, wenn die Kräfte q, q' etc. allein wirkten, im Gleichgewicht ist, ohne daſs aus ihnen irgend eine Wirkung auf die beschriebenen krummen Linien entstehe, so giebt die Gleichung (k) auch noch $0 = \Sigma \,.\, q \,.\, \delta f$ und folglich

$$0 = \Sigma \,.\, p \,.\, \delta f - \Sigma \,.\, T \,.\, \delta i.$$

Bestimmt man die Variationen der Koordinaten so, daſs sie den beschriebenen krummen Linien Genüge thun, so hat man $\delta i = 0$, $\delta i' = 0$ etc.; alsdann ist also

$$0 = \Sigma \,.\, p \,.\, \delta f;$$

und da die beschriebenen krummen Linien selbst willkührlich, und nur den Bedingungen des Zusammenhangs der Theile des Systems unterworfen sind, so hat die vorhergehende Gleichung Statt, wofern nur diese Bedingungen erfüllt werden, und dadurch verwandelt sich die Gleichung (k) in die Gleichung (l). Diese Gleichung ist der analytische Ausdruck des folgenden Grundsatzes, der unter dem Namen des Grundsatzes der virtuellen Geschwindigkeiten bekannt ist:

„Wenn man die Lage eines Systems von Körpern unendlich wenig und „so ändert, daſs den Bedingungen, die es erfüllen soll, Genüge geschieht; „so ist im Fall des Gleichgewichts die Summe der Kräfte, welche es zu „bewegen streben, jede mit dem Raum multiplicirt, welchen der Körper, an „dem sie angebracht ist, nach ihrer Richtung durchläuft, gleich Null."

Dieser Grundsatz hat nicht nur im Fall des Gleichgewichts Statt, er ist auch ein sicheres Kennzeichen von dessen Daseyn. Wir nehmen, um dies zu zeigen, an, daſs, wenn die Gleichung (l) Statt hat, die Punkte m, m' etc. vermöge der Kräfte mS, $m'S'$ etc., die an ihnen angebracht sind, die Geschwindigkeiten v, v' etc. erhalten. Das System würde dann vermittelst der gegebenen Kräfte und der Kräfte $-mv$, $-m'v'$ etc. im Gleichgewicht seyn [52]). Bezeichnet man nun mit δv, $\delta v'$ etc. die Variationen der Richtungen dieser neuen Kräfte, so wird man nach dem Grundsatz der virtuellen Geschwindigkeiten

$$o = \Sigma \,.\, mS \,.\, \delta s - \Sigma \,.\, m \,.\, v\delta v$$

haben; man hat aber nach der Voraussetzung $o = \Sigma \,.\, mS \,.\, \delta s$, folglich auch $o = \Sigma \,.\, m \,.\, v\delta v$. Da die Variationen δv, $\delta v'$ etc. den Bedingungen des Systems Genüge thun müssen, so kann man sie gleich $v\,dt$, $v'dt$ etc. setzen, und alsdann hat man $o = \Sigma \,.\, mv^2$, eine Gleichung, welche $v = o$, $v' = o$ etc. giebt; das heiſst, das System ist vermöge der Kräfte mS, $m'S'$ etc. allein im Gleichgewicht.

Die Bedingungen des Zusammenhangs der Theile eines Systems können immer durch Gleichungen zwischen den Koordinaten dieser verschiedenen Körper ausgedrückt werden. Es sollen $u = o$, $u' = o$, $u'' = o$ etc. diese verschiedenen Gleichungen seyn, so wird man nach dem 3ten Satz der Gleichung (l) die Function $\lambda\delta u + \lambda'\delta u' +$ etc., oder $\Sigma \,.\, \lambda \,.\, \delta u$ hinzusetzen können, wo λ, λ' etc. unbestimmte Functionen der Koordinaten dieser Körper sind; dadurch wird sich diese Gleichung in folgende verwandeln:

$$o = \Sigma \,.\, mS \,.\, \delta s + \Sigma \,.\, \lambda \,.\, \delta u;$$

die Variationen aller Koordinaten werden dann willkührlich seyn, und man wird ihre Koefficienten gleich Null setzen können, wodurch man eben so viel Gleichungen als Variationen erhalten wird, vermittelst welcher man die Functionen λ, λ' etc. bestimmen wird. Vergleicht man ferner diese Gleichung mit der Gleichung (k), so wird man

$$\Sigma \,.\, \lambda \,.\, \delta u = \Sigma \,.\, p \,.\, df + \Sigma \,.\, R \,.\, \delta r$$

erhalten, woraus man leicht die gegenseitigen Wirkungen der Körper auf einander p, p' etc. und die Kräfte $-R$, $-R'$ etc., womit sie die Flächen, auf welchen sie sich bewegen, drücken, wird bestimmen können.

52) Hat der Körper, dessen Masse m ist, die Geschwindigkeit v, so ist mv die Gröſse der Bewegung und es ist eine Kraft $-mv$ nöthig, wenn er in Ruhe oder im Gleichgewicht bleiben soll.

15. Wenn alle Körper des Systems unveränderlich unter einander verbunden sind, so ist seine Lage durch die Lage von dreyen seiner Punkte, welche nicht in gerader Linie sind, bestimmt; die Lage jedes dieser Punkte hängt von drey Koordinaten ab; dieses giebt neun unbestimmte Gröſsen. Da aber die gegenseitigen Abstände der drey Punkte gegeben und unveränderlich sind, so kann man vermittelst derselben diese neun unbestimmte Gröſsen auf sechs bringen, welche in die Gleichung (1) substituirt, sechs willkührliche Variationen geben werden; setzt man ihre Koefficienten gleich Null, so wird man sechs Gleichungen haben, welche alle Bedingungen fürs Gleichgewicht des Systems in sich enthalten werden. Wir wollen diese Gleichungen entwickeln.

Wenn also x, y, z die Koordinaten von m; x', y', z' die von m'; x'', y'', z'' die von m'' etc. sind, so wird man folgende Gleichungen haben:

$$f = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2};$$
$$f' = \sqrt{(x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2};$$
$$f'' = \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2};$$
etc.

Setzt man nun
$$\delta x = \delta x' = \delta x'' = \text{etc.}$$
$$\delta y = \delta y' = \delta y'' = \text{etc.}$$
$$\delta z = \delta z' = \delta z'' = \text{etc.}$$
so wird man $\delta f = 0$, $\delta f' = 0$, $\delta f'' = 0$ etc. haben [53]); die Bedingungen, welchen man Genüge thun sollte, werden also erfüllt seyn, und man wird vermöge der Gleichung (1) folgende Gleichungen haben:

$$0 = \Sigma\,.\,mS\,.\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right); \quad 0 = \Sigma\,.\,mS\,.\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right); \quad 0 = \Sigma\,.\,mS\,.\left(\frac{\delta s}{\delta z}\right) \ldots \quad (m).$$

Dieses sind drey der sechs Gleichungen, welche die Bedingungen des Gleichgewichts des Systems in sich enthalten. Die zweyten Glieder dieser Gleichungen sind die Summen der Kräfte des Systems, parallel mit den drey Axen der x, y, z zerlegt; im Fall des Gleichgewichts muſs also jede dieser Summen gleich Null seyn.

Den Gleichungen $\delta f = 0$, $\delta f' = 0$, $\delta f'' = 0$ etc. wird noch Genüge geschehen, wenn man z, z', z'' etc. unveränderlich annimmt, und wenn man

53) Wenn in der Differenz zweyer Gröſsen beide Gröſsen um gleichviel zu- oder abnehmen, so bleibt die Differenz unverändert. Die Variation von f ist gleich Null, weil die Variationen seiner Theile $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ gleich Null sind.

$$\delta x = y \,.\, \delta\varpi; \qquad \delta y = -\, x \,.\, \delta\varpi;$$
$$\delta x' = y' \,.\, \delta\varpi; \qquad \delta y' = -\, x' \,.\, \delta\varpi;$$
etc.

setzt, wo $\delta\varpi$ irgend eine Variation ist. Setzt man diese Werthe in die Gleichung (1), so wird man folgende erhalten [54]):

$$0 = \Sigma \,.\, mS \,.\, \left[y \,.\, \left(\frac{\delta s}{\delta x}\right) - x \,.\, \left(\frac{\delta s}{\delta y}\right) \right].$$

Es ist augenscheinlich, daſs man in dieser Gleichung sowohl die Koordinaten x, x', x'' etc., als auch y, y', y'' etc. mit z, z', z'' etc. verwechseln kann; dieses wird zwey andere Gleichungen geben, welche mit der vorhergehenden vereinigt, folgendes System von Gleichungen bilden werden:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \Sigma \,.\, mS \,.\, \left[y \,.\, \left(\frac{\delta s}{\delta x}\right) - x \,.\, \left(\frac{\delta s}{\delta y}\right) \right] \\ 0 = \Sigma \,.\, mS \,.\, \left[z \,.\, \left(\frac{\delta s}{\delta x}\right) - x \,.\, \left(\frac{\delta s}{\delta z}\right) \right] \\ 0 = \Sigma \,.\, mS \,.\, \left[y \,.\, \left(\frac{\delta s}{\delta z}\right) - z \,.\, \left(\frac{\delta s}{\delta y}\right) \right] \end{array}\right\} ; \ldots \text{(n)}$$

Die Function $\Sigma \,.\, mS \,.\, y \,.\, \left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)$ ist nach dem 3ten Satz die Summe der Momente aller mit der Axe der x parallelen Kräfte, um das System um die Axe der z zu drehen. Eben so ist $\Sigma \,.\, mS \,.\, x \,.\, \left(\frac{\delta s}{\delta y}\right)$ die Summe der Momente aller mit der Axe der y parallelen Kräfte, um das System um die Axe der z, aber in entgegengesetzter Richtung mit den erstern Kräften, zu drehen; die erstere der Gleichungen (n) zeigt also an, daſs die Summe der Momente der Kräfte in Beziehung auf die Axe der z Null ist. Auf eben die Art zeigen die 2te und dritte dieser Gleichungen an, daſs die Summe der Momente der Kräfte gleich Null ist, sowohl in Beziehung auf die Axe der y, als auf die Axe der x. Vereinigt man diese drey Bedingungen mit den obigen, daſs die Summen

54) Es ist $f\delta f = (x' - x)(\delta x' - \delta x) + (y' - y)(\delta y' - \delta y)$. Substituirt man statt der Variationen $\delta x'$, δx, $\delta y'$, δy ihre Werthe, so erhält man

$$f\delta f = (x' - x)(y' - y)\,\delta\varpi - (y' - y)(x' - x)\,\delta\varpi = 0$$

und also $\delta f = 0$.

men der mit den Axen parallelen Kräfte in Beziehung auf jede derselben Null sind, so wird man die sechs Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems von Körpern haben, welche unveränderlich mit einander verbunden sind.

Wenn der Anfangspunkt der Koordinaten fest ist, und unveränderlich mit dem System zusammenhängt, so werden dadurch die mit den drey Axen parallelen Kräfte aufgehoben werden, und die Bedingungen des Gleichgewichts des Systems um diesen Anfangspunkt werden bloſs darinn bestehen, daſs die Summen der Momente der Kräfte, um es um die drey Axen zu drehen, in Beziehung auf jede dieser Axen gleich Null sind.

Wenn bloſs die Schwere auf die Körper m, m', m'' etc. wirkt, so wird man, weil ihre Wirkung auf alle Körper gleich groſs ist, und weil man annehmen kann, daſs ihre Richtung in der ganzen Ausdehnung des Systems unveränderlich ist, folgende Gleichungen haben:

$$S = S' = S'' = \text{etc.}$$

$$\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right) = \left(\frac{\delta s'}{\delta x'}\right) = \left(\frac{\delta s''}{\delta x''}\right) = \text{etc.}$$

$$\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right) = \left(\frac{\delta s'}{\delta y'}\right) = \left(\frac{\delta s''}{\delta y''}\right) = \text{etc.}$$

$$\left(\frac{\delta s}{\delta z}\right) = \left(\frac{\delta s'}{\delta z'}\right) = \left(\frac{\delta s''}{\delta z''}\right) = \text{etc.}$$

und die drey Gleichungen (n) werden sich dadurch in folgende verwandeln:

$$0 = \Sigma \,.\, mx; \quad 0 = \Sigma \,.\, my; \quad 0 = \Sigma \,.\, mz \;\ldots\; (o)$$

Nimmt man an, daſs der Anfangspunkt der Koordinaten unveränderlich ist, so werden dadurch die Kräfte $S \,.\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right).\Sigma \,.\, m$; $S \,.\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right).\Sigma \,.\, m$; $S \,.\left(\frac{\delta s}{\delta z}\right).\Sigma \,.\, m$ aufgehoben; durch die Zusammensetzung dieser drey Kräfte erhält man eine einzige Kraft, welche $S \,.\, \Sigma \,.\, m$, das heiſst dem Gewicht des Körpers gleich seyn wird.

Dieser Anfangspunkt der Koordinaten, um welchen der Annahme gemäſs das System im Gleichgewicht ist, ist ein sehr merkwürdiger Punkt des Systems, weil, wenn er unterstützt ist, das System, auf welches die Schwere allein wirkt, im Gleichgewicht bleibt, welche Lage man ihm auch um diesen Punkt herum

giebt; denn die Gleichungen (o) sind von den Werthen der Gröfsen $\left(\frac{ds}{dx}\right)$, $\left(\frac{\delta s}{\delta y}\right)$, $\left(\frac{\delta s}{\delta z}\right)$ und folglich von der Lage der Axen der x, y, z in Rücksicht auf die Richtung der Schwere unabhängig. Man nennt diesen Punkt den Schwerpunkt des Systems. Seine Lage ist durch die Bedingung bestimmt, dafs, wenn man durch diesen Punkt irgend eine Ebene legt, die Summe der Produkte jedes Körpers mit seiner Entfernung von dieser Ebene gleich Null ist; denn diese Entfernung ist eine linearische Function der Koordinaten des Körpers x, y, z. Multiplicirt man sie also mit der Masse des Körpers, so wird die Summe dieser Producte vermöge der Gleichungen (o) gleich Null seyn.

Um die Lage des Schwerpunkts zu bestimmen, mögen X, Y, Z seine drey Koordinaten in Beziehung auf irgend einen gegebenen Punkt seyn; x, y, z mögen die Koordinaten von m; x', y', z' die von m' u. s. w. seyn; die Gleichungen (o) werden

$$0 = \Sigma \, . \, m \, . \, (x - X)$$

geben. Man hat aber $\Sigma . m . X = X . \Sigma . m$, wo $\Sigma . m$ die ganze Masse des Systems ist; folglich hat man

$$X = \frac{\Sigma \, . \, mx}{\Sigma \, . \, m}.$$

Eben so wird man

$$Y = \frac{\Sigma \, . \, my}{\Sigma \, . \, m}; \quad Z = \frac{\Sigma \, . \, mz}{\Sigma \, . \, m}$$

erhalten. Da also die Koordinaten X, Y, Z nur einen einzigen Punkt bestimmen, so giebt es nur Einen Schwerpunkt in einem System von Körpern. Die drey vorhergehenden Gleichungen geben noch

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{(\Sigma \, . \, mx)^2 + (\Sigma \, . \, my)^2 + (\Sigma \, . \, mz)^2}{(\Sigma \, . \, m)^2},$$

eine Gleichung, welcher man folgende Gestalt geben kann [55]):

55) Giebt man den beiden Werthen von $X^2 + Y^2 + Z^2$ den gemeinschaftlichen Divisor $(\Sigma . m)^2$, so erhält man folgende zwey Zähler, welche einander gleich seyn müssen:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{\Sigma . m(x^2 + y^2 + z^2)}{\Sigma . m} - \frac{\Sigma . mm' . [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]}{(\Sigma . m)^2}$$

wo das endliche Integral $\Sigma . mm' . [(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]$ die Summe aller Producte ausdrückt, welche dem unter dem Zeichen Σ sich befindenden Product ähnlich sind, und welche man erhält, wenn man jedes Paar der Körper des Systems betrachtet. Auf diese Art wird man die Entfernung des Schwerpunkts von irgend einem festen Punkt, durch die Entfernungen der Körper des Systems von demselben festen Punkt und durch ihre gegenseitigen Abstände ausgedrückt, erhalten. Bestimmt man so den Abstand des Schwerpunkts von irgend drey festen Punkten, so wird man seine Lage im Raum haben; dies giebt ein neues Mittel ihn zu bestimmen.

Man hat die Benennung Schwerpunkt auch auf den Punkt irgend eines Systems schwerer oder nicht schwerer Körper erstreckt, welcher durch die drey Koordinaten X, Y, Z bestimmt wird.

16. Die vorhergehenden Resultate können leicht auf das Gleichgewicht eines festen Körpers von irgend einer Gestalt angewendet werden; man darf sich nur vorstellen, daſs er aus einer unendlichen Menge fest unter einander verbundener Punkte bestehe. Es sey also dm einer dieser Punkte oder ein unendlich kleiner Theil des Körpers; es sollen x, y, z die Koordinaten dieses

$(\Sigma . mx)^2 + (\Sigma . my)^2 + (\Sigma . mz)^2 =$
$\Sigma m . [\Sigma . m(x^2 + y^2 + z^2)] - \Sigma . mm' . [(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]$

Nun ist $(\Sigma . mx)^2 = m^2 x^2 + m'^2 x'^2 + m''^2 x''^2 \ldots + 2mm'xx' + 2mm''xx'' + 2m'm''x'x'' + \ldots$

$(\Sigma . my)^2 = m^2 y^2 + m'^2 y'^2 + m''^2 y''^2 \ldots + 2mm'yy' + 2mm''yy'' + 2m'm''y'y'' + \ldots$

$(\Sigma . mz)^2 = m^2 z^2 + m'^2 z'^2 + m''^2 z''^2 \ldots + 2mm'zz' + 2mm''zz'' + 2m'm''z'z'' + \ldots$

Die Summe ist gleich $m^2(x^2 + y^2 + z^2) + m'^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) + m''^2(x''^2 + y''^2 + z''^2) + \ldots$
$+ 2mm'(xx' + yy' + zz') + 2mm''(xx'' + yy'' + zz'') + 2m'm''(x'x'' + y'y'' + z'z'') + \ldots$
welche Summe man so bezeichnen kann: $\Sigma . m^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2\Sigma . mm'(xx' + yy' + zz')$.
Eben so ist das Product $\Sigma m . [\Sigma . m(x^2 + y^2 + z^2)] = \Sigma . m^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2\Sigma . mm'(x^2 + y^2 + z^2)$
und $-\Sigma . mm' . [(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2] = -2\Sigma . mm'(x^2 + y^2 + z^2) + 2\Sigma . mm'(xx' + yy' + zz')$
und die Summe dieser beiden Glieder ist $\Sigma . m^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2\Sigma . mm'(xx' + yy' + zz')$.
Die obige Gleichung hat also Statt.

Theils seyn; endlich P, Q, R die Kräfte, welche auf ihn parallel mit den Axen der x, y, z wirken; so werden die Gleichungen (m) und (n) des vorhergehenden Satzes sich in die folgenden verwandeln:

$$0 = \int P \, . \, dm; \quad 0 = \int Q \, . \, dm; \quad 0 = \int R \, . \, dm;$$

$$0 = \int (Py - Qx) \, . \, dm; \quad 0 = \int (Pz - Rx) \, . \, dm; \quad 0 = \int (Ry - Qz) \, . \, dm,$$

wo das Integralzeichen sich auf den unendlich kleinen Theil dm bezieht und auf die ganze Masse des festen Körpers erstreckt werden muſs.

Wenn der Körper sich nur um den Anfangspunkt der Koordinaten drehen kann, so reichen die drey letztern Gleichungen zum Gleichgewicht hin.

Viertes Kapitel.

Vom Gleichgewicht der Flüssigkeiten.

17. Um die Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung eines jeden Bestandtheils der Flüſsigkeiten zu haben, müſste man ihre Gestalt kennen, welches unmöglich ist; wir brauchen aber diese Gesetze nur für die Flüssigkeiten in Masse betrachtet zu bestimmen, und alsdann wird die Betrachtung der Gestalt ihrer Bestandtheile unnütz. Was auch immer diese Gestalten und die Anordnungen, die daraus in den Bestandtheilen entstehen, seyn mögen, so müssen doch alle Flüssigkeiten, in Masse genommen, die nämlichen Erscheinungen in ihrem Gleichgewicht und in ihren Bewegungen darbieten. Daher kömmt es auch, daſs die Beobachtung dieser Erscheinungen uns nichts über die Gestalt der flüssigen Bestandtheile lehren kann. Diese allgemeinen Erscheinungen gründen sich auf die vollkommene Bewegbarkeit dieser Bestandtheile, welche dadurch bey der geringsten Kraftäuſserung ausweichen. Diese Bewegbarkeit ist die unterscheidende Eigenschaft der flüſsigen Körper; sie unterscheidet sie von den festen und dient zu ihrer Definition. Es folgt daraus, daſs zum Gleichgewicht einer flüssigen Masse jeder Bestandtheil vermöge der Kräfte, die ihn zu bewegen streben, und des Drucks, welchen er von den umgebenden Bestandtheilen erfährt, im Gleichgewicht seyn muſs. Wir werden nun die Gleichungen, welche aus dieser Eigenschaft entstehen, entwickeln.

Zu diesem Zweck wollen wir ein System flüssiger Bestandtheile betrachten, welche ein rechtwinklichtes, unendlich kleines Parallelepipedum bilden. Es sollen x, y, z die rechtwinklichten Koordinaten der Ecke dieses Parallelepipedums seyn, welche dem Anfangspunkt der Koordinaten am nächsten ist. Es sollen dx, dy, dz die drey Abmessungen dieses Parallelepipedums seyn; wir nennen ferner p die

mittlere von allen Pressungen, welche die Seite $dy\,dz$ des Parallelepipedums erfährt, welche Seite dem Anfangspunkt der Koordinaten am nächsten ist, und p' die nämliche Gröfse in Beziehung auf die gegenüberstehende Fläche. Vermöge des Drucks, welchen das Parallelepipedum erfährt, wird eine Kraft, welche gleich $(p - p') \,.\, dy\,dz$ ist, dasselbe parallel mit der Axe der x in Bewegung zu setzen streben. Nun ist $p' - p$ das Differenzial von p, so genommen, dafs man nur x sich ändern läfst; denn ob schon der Druck p' hier in entgegengesetzter Richtung mit p wirkt, so kann man doch, da der Druck, welchen ein Punkt des Flüssigen erfährt, in allen Richtungen derselbe ist, $p' - p$ als den Unterschied zweyer unendlich nahen und in der nämlichen Richtung wirkenden Kräfte ansehen; man hat also $p' - p = \left(\frac{dp}{dx}\right) dx$ und $(p - p') \,.\, dy\,dz = -\left(\frac{dp}{dx}\right) . \, dx \,.\, dy \,.\, dz$. Es mögen nun P, Q, R die drey beschleunigenden Kräfte seyn, welche noch aufserdem auf die Bestandtheile des Flüssigen parallel mit den drey Axen der x, y, z wirken; man nenne ϱ die Dichtigkeit des Parallelepipedums, so wird seine Masse $\varrho \,.\, dx\,dy\,dz$, und das Product der Kraft P mit dieser Masse wird die ganze Kraft seyn, welche daraus, um es zu bewegen, entsteht; folglich wird die Kraft, welche diese Masse parallel mit der Axe der x in Bewegung zu setzen strebt, gleich $\left[\varrho P - \left(\frac{dp}{dx}\right)\right] . \, dx \,.\, dy \,.\, dz$ seyn. Eben so wird man für die Kräfte, welche parallel mit den Axen der y und der z auf sie wirken, $\left[\varrho\, Q - \left(\frac{dp}{dy}\right)\right] . \, dx \,.\, dy \,.\, dz$ und $\left[\varrho\, R - \left(\frac{dp}{dz}\right)\right] . \, dx \,.\, dy \,.\, dz$ finden. Man wird also vermöge der Gleichung (b) im 3ten Satz folgende Gleichung haben:

$$o = \left[\varrho P - \left(\frac{dp}{dx}\right)\right] . \, \delta x + \left[\varrho\, Q - \left(\frac{dp}{dy}\right)\right] . \, \delta y + \left[\varrho\, R - \left(\frac{dp}{dz}\right)\right] . \, \delta z$$

oder [56]

$$p = \varrho \,.\, [P \,.\, \delta x + Q \,.\, \delta y + R \,.\, \delta z].$$

56) Es ist einer der ersten Grundsätze der Variationsrechnung, dafs man die Variation einer Gröfse erhält, wenn man diese Gröfse differenziirt und dann statt des Differenzialzeichens d das Variationszeichen δ setzt. Hieraus folgt unmittelbar, dafs $\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{\delta p}{\delta x}\right)$ ist, und folglich

$$\left(\frac{dp}{dx}\right) \delta x + \left(\frac{dp}{dy}\right) \delta y + \left(\frac{dp}{dz}\right) \delta z = \delta p.$$

Der zweyte Theil dieser Gleichung muſs eben so wie der erste eine vollständige Variation seyn; dieses giebt folgende Gleichungen zwischen den partiellen Differenzialen [57]):

$$\left(\frac{d\,.\,\varrho P}{dy}\right)=\left(\frac{d\,.\,\varrho Q}{dx}\right);\quad \left(\frac{d\,.\,\varrho P}{dz}\right)=\left(\frac{d\,.\,\varrho R}{dx}\right);\quad \left(\frac{d\,.\,\varrho Q}{dz}\right)=\left(\frac{d\,.\,\varrho R}{dy}\right);$$

woraus man folgende erhält [58]):

$$o=P\,.\left(\frac{dQ}{dz}\right)-Q\,.\left(\frac{dP}{dz}\right)+R\,.\left(\frac{dP}{dy}\right)-P.\left(\frac{dR}{dy}\right)+Q.\left(\frac{dR}{dx}\right)-R.\left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Diese Gleichung drückt das Verhältniſs aus, welches zwischen den Kräften P, Q, R vorhanden seyn muſs, damit das Gleichgewicht möglich sey.

Wenn die Oberfläche des Flüssigen oder einige Theile derselben frey sind, so wird der Werth von p in diesen Theilen gleich Null seyn; man wird also $\delta p = o$ haben, wofern man nur δx, δy, δz so bestimmt, daſs sie dieser Fläche angehören; erfüllt man diese Bedingungen, so wird

$$o = P\,.\,\delta x + Q\,.\,\delta y + R\,.\,\delta z$$

seyn. Es sey $\delta u = o$ die Differenzialgleichung der Fläche, so wird man

$$P\,.\,\delta x + Q\,.\,\delta y + R\,.\,\delta z = \lambda\,.\,\delta u$$

haben, wo λ eine Function von x, y, z ist. Hieraus folgt vermöge des 3ten

57) Man sehe Euleri Instit. Calc. differentialis P. I. Cap. VII. §. 241. pag. 203. Lacroix traité du Calcul Differentiel. Chap. I. §. 84. pag. 178.

58) Differenziirt man actu die Producte ϱP, ϱQ, ϱR, so geben die vorhergehenden Gleichungen folgende drey:

$$o = P\,.\left(\frac{d\varrho}{dy}\right) - Q\,.\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) + \varrho\left[\left(\frac{dP}{dy}\right) - \left(\frac{dQ}{dx}\right)\right]$$

$$o = P\,.\left(\frac{d\varrho}{dz}\right) - R\,.\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) + \varrho\left[\left(\frac{dP}{dz}\right) - \left(\frac{dR}{dx}\right)\right]$$

$$o = Q\,.\left(\frac{d\varrho}{dz}\right) - R\,.\left(\frac{d\varrho}{dy}\right) + \varrho\left[\left(\frac{dQ}{dz}\right) - \left(\frac{dR}{dy}\right)\right].$$

Man kann vermittelst dieser drey Gleichungen die drey partiellen Differenziale von ϱ eliminiren; man multiplicire nämlich die erste mit R, die zweyte mit $-Q$, die dritte mit P, so erhält man

$$o = +RP\,.\left(\frac{d\varrho}{dy}\right) - RQ\,.\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) + \varrho\,.\left[+R.\left(\frac{dP}{dy}\right) - R.\left(\frac{dQ}{dz}\right)\right]$$

$$o = -\,QP\,.\left(\frac{d\varrho}{dz}\right) + QR\,.\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) + \varrho\,.\left[-Q.\left(\frac{dP}{dz}\right) + Q.\left(\frac{dR}{dx}\right)\right]$$

$$o = +PQ\,.\left(\frac{d\varrho}{dz}\right) - PR\,.\left(\frac{d\varrho}{dy}\right) + \varrho\,.\left[+P.\left(\frac{dQ}{dz}\right) - P.\left(\frac{dR}{dy}\right)\right].$$

Die Summe dieser drey Gleichungen hat den gemeinschaftlichen Factor ϱ; dividirt man mit ϱ, so erhält man die im Text gegebene Gleichungen.

Satzes, daſs die Zusammengesetzte der Kräfte P, Q, R senkrecht auf die Theile der Oberfläche seyn muſs, wo die Flüssigkeit frey ist.

Wir wollen annehmen, daſs die Variation $P . \delta x + Q . \delta y + R . \delta z$ vollständig sey, welches nach dem 2ten Satz dann Statt hat, wenn die Kräfte P, Q, R das Resultat von Attractionskräften sind. Wir wollen dann diese Variation $\delta \phi$ nennen, so wird man $\delta p = \varrho . \delta \phi$ haben; ϱ muſs also eine Function von p und ϕ seyn, und da man durch Integriren dieser Differenzialgleichung ϕ durch eine Function von p erhält, so wird man auch p durch eine Function von ϱ erhalten. Der Druck p ist also für alle Bestandtheile, welche gleiche Dichtigkeit haben, gleich groſs; folglich ist δp für die Oberfläche der Lagen des Flüssigen, in welchen die Dichtigkeit beständig ist, gleich Null, und man hat für diese Oberflächen

$$o = P . \delta x + Q . \delta y + R . \delta z.$$

Es folgt hieraus, daſs im Zustand des Gleichgewichts die Zusammengesetzte der Kräfte, welche auf jeden Bestandtheil des Flüssigen wirken, senkrecht auf die Oberflächen dieser Lagen sind, welche man deswegen Horizontallagen genannt hat. Diese Bedingung ist immer erfüllt, wenn die Flüssigkeit gleichartig ist und nicht zusammengedrückt werden kann, weil alsdann die Lagen, auf welchen diese Zusammengesetzte senkrecht ist, alle von derselben Dichtigkeit sind.

Zum Gleichgewicht einer flüssigen gleichartigen Masse, deren äuſsere Oberfläche frey ist, und welche einen unbeweglichen festen Kern von irgend einer Gestalt bedeckt, wird erfordert und ist hinreichend, erstens daſs $P . \delta x + Q . \delta y + R . \delta z$ ein vollständiges Differenzial sey; zweytens, daſs die Zusammengesetzte der Kräfte, die auf die äuſsere Oberfläche wirken, gegen diese Fläche gerichtet und auf ihr senkrecht sey.

Fünftes Kapitel.

Allgemeine Grundsätze der Bewegung eines Systems von Körpern.

18. Wir haben im 7ten Satz die Gesetze der Bewegung eines Punkts dadurch auf die Gesetze des Gleichgewichts gebracht, daſs wir seine augenblickliche Bewegung in zwey andere zerlegten, wovon die eine diejenige ist, welche übrig bleibt, die andere aber durch die Kräfte, welche auf den Punkt wirken, aufgehoben wird; das Gleichgewicht zwischen diesen Kräften und der vom Körper verlohrnen Bewegung hat uns die Differenzialgleichungen seiner Bewegung gegeben. Wir werden uns desselben Verfahrens bedienen, um die Bewegung eines Systems von Körpern m, m', m'' etc. zu bestimmen. Es sollen mP, mQ, mR die Kräfte seyn, welche auf m parallel mit den Axen seiner rechtwinklichten Koordinaten x, y, z wirken; ferner $m'P'$, $m'Q'$, $m'R'$ die Kräfte, welche parallel mit den nämlichen Axen auf m' wirken, und so weiter; endlich t die Zeit. Die partiellen Kräfte des Körpers m sind in jedem Augenblick $m\,.\,\frac{dx}{dt}$, $m\,.\,\frac{dy}{dt}$, $m\,.\,\frac{dz}{dt}$; in dem folgenden Augenblick werden sie seyn

$$m\,.\,\frac{dx}{dt} + m\,.\,d\,.\,\frac{dx}{dt} - m\,.\,d\,.\,\frac{dx}{dt} + mP\,.\,dt;$$

$$m\,.\,\frac{dy}{dt} + m\,.\,d\,.\,\frac{dy}{dt} - m\,.\,d\,.\,\frac{dy}{dt} + mQ\,.\,dt;$$

$$m\,.\,\frac{dz}{dt} + m\,.\,d\,.\,\frac{dz}{dt} - m\,.\,d\,.\,\frac{dz}{dt} + mR\,.\,dt;$$

und da bloſs die Kräfte

$$m\,.\,\frac{dx}{dt} + m\,.\,d\,.\,\frac{dx}{dt}; \quad m\,.\,\frac{dy}{dt} + m\,.\,d\,.\,\frac{dy}{dt}; \quad m\,.\,\frac{dz}{dt} + m\,.\,d\,.\,\frac{dz}{dt}$$

übrig bleiben, so werden die Kräfte

$$-m\,.\,d\,.\,\frac{dx}{dt}+mP\,.\,dt;\quad -m\,.\,d\,.\,\frac{dy}{dt}+mQ\,.\,dt;\quad -m\,.\,d\,.\,\frac{dz}{dt}+mR\,.\,dt$$

einander aufheben. Bezeichnet man in diesen Ausdrücken die Buchstaben m, x, y, z, P, Q, R nach und nach mit einem Strich, mit zwey Strichen u. s. w., so wird man die in den Körpern m', m'' etc. aufgehobenen Kräfte haben. Multiplicirt man nun diese Kräfte mit den Variationen ihrer Richtungen δx, δy, δz, $\delta x'$ etc., so wird der im 14ten Satz gegebene Grundsatz der virtuellen Geschwindigkeiten, wenn man dt als beständig annimmt, folgende Gleichung geben:

$$\left.\begin{array}{l} 0=m.\delta x.\left(\frac{d^2x}{dt^2}-P\right)+m.\delta y.\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Q\right)+m.\delta z.\left(\frac{d^2z}{dt^2}-R\right) \\ +m'.\delta x'.\left(\frac{d^2x'}{dt^2}-P'\right)+m'.\delta y'.\left(\frac{d^2y'}{dt^2}-Q'\right)+m'.\delta z'.\left(\frac{d^2z'}{dt^2}-R'\right) \end{array}\right\}\ldots(\mathrm{p}).$$

$$+\ \text{etc.}$$

Vermittelst der dem System eigenen Bedingungen wird man soviel Variationen aus dieser Gleichung eliminiren, als man Bedingungen hat; die Koefficienten der übrigbleibenden Variationen wird man einzeln gleich Null setzen. Hierdurch wird man alle zur Bestimmung der Bewegung der verschiedenen Körper des Systems nöthigen Gleichungen erhalten.

19. Die Gleichung (p) enthält verschiedene allgemeine Grundsätze der Bewegung, welche wir entwickeln wollen. Man wird offenbar die Variationen δx, δy, δz, $\delta x'$ etc. allen Bedingungen des Zusammenhangs der Theile des Systems unterwerfen, wenn man sie den Differenzialen dx, dy, dz, dx' etc. gleich setzt. Diese Voraussetzung ist also erlaubt, und alsdann giebt die Gleichung (p), wenn man sie integrirt,

$$\Sigma\,.\,m\,.\,\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=c+2\,.\,\Sigma\,.\int m\,.\,(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)\ldots(\mathrm{q})$$

wo c eine willkührliche beständige Gröſse ist, welche das Integriren erfordert.

Sind die Kräfte P, Q, R die Resultate von Attractionskräften, die auf feste Punkte gerichtet sind, und von den anziehenden Kräften der Körper unter einander, so ist die Function $\Sigma\,.\int m\,.\,(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)$ ein vollständiges Integral. Die Theile dieser Function, welche sich auf die anziehenden Kräfte beziehen, die auf feste Punkte gerichtet sind, sind in der That nach Satz 8. vollständige Integrale. Dies ist aber auch in Beziehung auf die Theile

wahr, welche von den gegenseitigen Wirkungen der Körper des Systems abhangen; denn wenn man f den Abstand zwischen m und m', $m'F$ die anziehende Kraft von m' auf m nennt, so wird der Theil von $m.(Pdx + Qdy + Rdz)$, der sich auf die Attraction von m' auf m bezieht, nach dem angeführten Satz 8. gleich $-mm'.Fdf$ seyn, wo das Differenzial df so zu nehmen ist, daſs man nur die Koordinaten x, y, z als veränderlich annimmt. Da aber die Gegenwirkung der Wirkung gleich und entgegengesetzt ist, so ist der Theil von $m'(P'dx' + Q'dy' + R'dz')$, welcher auf die Attraction von m auf m' Bezug hat, gleich $-mm'.Fdf$, wo man in df nur die Koordinaten x', y', z' als veränderlich betrachtet. Folglich ist der Theil der Function $\Sigma.m.(Pdx + Qdy + Rdz)$, welcher sich auf die gegenseitige Anziehung von m auf m' bezieht, gleich $-mm'.Fdf$, wo alles in f als veränderlich anzusehen ist. Diese Gröſse ist ein vollständiges Differenzial, wenn F eine Function von f ist, oder wenn die anziehende Kraft sich wie eine Function der Entfernung verhält, welches wir immer annehmen werden. Die Function $\Sigma.m.(Pdx + Qdy + Rdz)$ ist also allemahl ein vollständiges Differenzial, wenn die Kräfte, welche die Körper des Systems vereinigen, das Resultat ihrer gegenseitigen Anziehung oder der auf feste Punkte gerichteten anziehenden Kräfte sind. Es sey dann $d\phi$ dieses Differenzial, und man nenne v die Geschwindigkeit von m, v' die von m' etc., so wird man

$$\Sigma.mv^2 = c + 2\phi \quad \ldots \quad (r)$$

haben. Diese Gleichung ist der Gleichung (g) im 8ten Satz ähnlich; sie ist der analytische Ausdruck des Grundsatzes der Erhaltung der lebendigen Kräfte. Man nennt **lebendige Kraft** eines Körpers das Product seiner Masse in das Quadrat seiner Geschwindigkeit. Der Grundsatz, von dem hier die Rede ist, besteht darinn: daſs die Summe der lebendigen Kräfte, oder die totale lebendige Kraft des Systems beständig ist, wenn keine Kräfte auf das System wirken, und daſs wenn irgend eine Anzahl Kräfte auf die Körper wirken, die Summe der Vermehrungen der totalen lebendigen Kraft dieselbe ist, was auch immer für krumme Linien jeder dieser Körper beschrieben haben mag, wofern nur ihre Abgangs- und Ankunftspunkte dieselben sind.

Dieser Grundsatz hat nur in den Fällen Statt, wo die Bewegungen der Körper sich durch unmerkliche Abstuffungen ändern. Wenn die Bewegungen

der Körper plötzliche Aenderungen erfahren, so wird die lebendige Kraft um eine Gröſse vermindert, welche man auf folgende Art bestimmen wird. Die Analysis, welche uns zur Gleichung (p) des vorhergehenden Satzes geführt hat, giebt dann statt dieser Gleichung die folgende:

$$o = \Sigma . m . \left(\frac{\delta x}{dt} . \Delta . \frac{dx}{dt} + \frac{\delta y}{dt} . \Delta . \frac{dy}{dt} + \frac{\delta z}{dt} . \Delta . \frac{dz}{dt}\right) - \Sigma . m . (P . \delta x + Q . \delta y + R . \delta z),$$

wo $\Delta . \frac{dx}{dt}$, $\Delta . \frac{dy}{dt}$ und $\Delta . \frac{dz}{dt}$ die Differenzen von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ und $\frac{dz}{dt}$ von einem Augenblick zum andern sind, Differenzen, welche endlich werden, wenn die Bewegungen der Körper endliche Aenderungen in einem Augenblick erfahren. Man kann in dieser Gleichung

$$\delta x = dx + \Delta . dx; \quad \delta y = dy + \Delta . dy; \quad \delta z = dz + \Delta . dz$$

setzen, weil die Werthe von dx, dy, dz sich in dem folgenden Augenblick in $dx + \Delta . dx$, $dy + \Delta . dy$, $dz + \Delta . dz$ verwandeln; diese Werthe von δx, δy, δz thun den Bedingungen der Verbindung der Theile des Systems Genüge; man erhält so

$$o = \Sigma . m . \left[\left(\frac{dx}{dt} + \Delta . \frac{dx}{dt}\right) . \Delta . \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dy}{dt} + \Delta . \frac{dy}{dt}\right) . \Delta . \frac{dy}{dt} + \left(\frac{dz}{dt} + \Delta . \frac{dz}{dt}\right) . \Delta . \frac{dz}{dt}\right]$$
$$- \Sigma . m . [P . (dx + \Delta . dx) + Q . (dy + \Delta . dy) + R . (dz + \Delta . dz)].$$

Diese Gleichung muſs wie eine Gleichung mit endlichen Differenzen in Beziehung auf die Zeit t integrirt werden, deren Variationen unendlich klein sind, so wie die Variationen der x, y, z, x' etc. Wir wollen die endlichen Integrale, die aus dieser Integration entspringen, mit $\Sigma_{\prime}$ bezeichnen, um sie von den vorhergehenden endlichen Integralen zu unterscheiden, welche sich auf sämmtliche Körper des Systems beziehen [59]). Das Integral von $m P . (dx + \Delta . dx)$ ist augenscheinlich gleich $\int m P . dx$; man wird also folgende Gleichung haben [60]):

59) Das Zeichen Σ zeigt nämlich an, daſs man für jeden Körper des Systems einen ähnlichen Ausdruck wie für den Körper m hat, und daſs man die Summe aller dieser Theile nehmen muſs. Das Zeichen $\Sigma_{\prime}$ hingegen dient, um die Totalbewegung des Systems in der Zeit t zu bezeichnen; das gewöhnliche Integralzeichen $\int$ würde hinreichend seyn, wenn man nicht angenommen hätte, daſs die Geschwindigkeiten der Körper sich um endliche Gröſsen in der unendlich kleinen Zeit dt ändern.

60) Multiplicirt man die obige Gleichung mit 2 und setzt man statt $\Sigma_{\prime} . \left[2\left(\frac{dx}{dt} + \Delta . \frac{dx}{dt}\right) . \Delta . \frac{dx}{dt}\right]$ seinen Werth $\Sigma_{\prime} . \left[\frac{2dx}{dt} + \left(\Delta . \frac{dx}{dt}\right)^2\right] + \Sigma_{\prime} . \left(\Delta . \frac{dx}{dt}\right)^2$, wovon das erste Glied gleich

Beständige Gröſse

$$= \Sigma . m . \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} + \Sigma_{,} . \Sigma . m . \left[\left(\Delta . \frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\Delta . \frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\Delta . \frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$
$$- 2 \Sigma . \int . m . (P dx + Q dy + R dz);$$

bezeichnet man also mit v, v', v'' etc. die Geschwindigkeiten von m, m', m'' etc., so erhält man

$$\Sigma . m v^2 = \text{beständige Gröſse} - \Sigma_{,} . \Sigma . m \left[\left(\Delta . \frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\Delta . \frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\Delta . \frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$
$$+ 2 \Sigma . \int . m . (P dx + Q dy + R dz).$$

Da die unter dem Zeichen $\Sigma_{,}$ enthaltene Gröſse nothwendig positiv ist, so sieht man, daſs die lebendige Kraft des Systems durch die gegenseitige Wirkung der Körper abnimmt, so oft während der Bewegung einige der Variationen $\Delta . \frac{dx}{dt}$, $\Delta . \frac{dy}{dt}$ etc. endlich werden. Die vorhergehende Gleichung bietet übrigens ein sehr einfaches Mittel dar, diese Verminderung zu erhalten.

Bey jeder plötzlichen Aenderung der Bewegung des Systems kann man sich die Geschwindigkeit von m in zwey andere zerlegt vorstellen; die eine v, welche in dem folgenden Augenblick übrig ist; die zweyte V, welche durch die

$\Sigma . \left[\left(\frac{dx}{dt} + \Delta . \frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]$ oder $\Sigma . \Delta . \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ ist, so erhält man

$$0 = \Sigma m . \left[\Delta . \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \Delta . \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \Delta . \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] + \Sigma m . \left[\left(\Delta . \frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\Delta . \frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\Delta . \frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$
$$- 2 \Sigma m . [P (dx + \Delta . dx) + Q (dy + \Delta . dy) + R (dz + \Delta . dz)].$$

Bezeichnet man nun mit $x_{,}$ den unmittelbar auf x folgenden unendlich nahen Werth von x, so ist $dx + \Delta . dx = dx_{,}$ und $\int P (dx + \Delta . dx) = \int P dx_{,}$, welches offenbar gleich $\int P dx$ ist. Integrirt man also die vorhergehende Gleichung, so erhält man, wenn man statt $\Sigma_{,} . \Delta . \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ seinen Werth $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ setzt, folgende Gleichung:

$$0 = \Sigma . m . \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + \Sigma_{,} . \Sigma . m . \left[\left(\Delta . \frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\Delta . \frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\Delta . \frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$
$$- 2 \Sigma m \int (P dx + Q dy + R dz),$$

wo man nur noch statt $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$ seinen Werth v^2 zu substituiren hat, um die im Text gegebene Gleichung zu erhalten.

Wirkung der übrigen Kräfte aufgehoben wird. Da nun die Geschwindigkeit von m vor dieser Zerlegung $\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$ ist, und sich hernach in $\frac{\sqrt{(dx + \Delta . dx)^2 + (dy + \Delta . dy)^2 + (dz + \Delta . dz)^2}}{dt}$ verwandelt, so sieht man leicht,

dafs $$V^2 = \left(\Delta . \frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\Delta . \frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\Delta . \frac{dz}{dt}\right)^2$$

ist. Man kann also der vorhergehenden Gleichung folgende Gestalt geben:

$\Sigma . mv^2 =$ beständige Gröfse $- \Sigma, . \Sigma . m V^2 + 2 \Sigma . \int . m (P\, dx + Q\, dy + R\, dz)$.

20. Setzt man in der Gleichung (p) des 18ten Satzes

$$\delta x' = \delta x + \delta x,'; \quad \delta y' = \delta y + \delta y,'; \quad \delta z' = \delta z + \delta z,';$$
$$\delta x'' = \delta x + \delta x,''; \quad \delta y'' = \delta y + \delta y,''; \quad \delta z'' = \delta z + \delta z,'';$$

etc.

Substituirt man diese Variationen in die Ausdrücke der Variationen δf, $\delta f'$, $\delta f''$ etc. der gegenseitigen Abstände der Körper des Systems unter einander, deren Werthe wir im 15ten Satz gegeben haben; so sieht man, dafs die Variationen δx, δy, δz aus diesen Ausdrücken verschwinden. Ist das System frey, das heifst, hat keiner seiner Theile eine Verbindung mit fremden Körpern, so hängen die Bedingungen, welche sich auf die Verbindung der Körper unter einander beziehen, nur von ihren Abständen unter einander ab; die Variationen δx, δy, δz werden also von diesen Bedingungen unabhängig seyn. Es folgt hieraus, dafs die Koeffizienten der Variationen δx, δy, δz einzeln gleich Null gesetzt werden müssen, wenn man in der Gleichung (p) statt $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ etc. ihre vorhergehenden Werthe setzt, wodurch man folgende drey Gleichungen erhält:

$$0 = \Sigma . m . \left(\frac{d^2x}{dt^2} - P\right); \quad 0 = \Sigma . m . \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Q\right); \quad 0 = \Sigma . m . \left(\frac{d^2z}{dt^2} - R\right).$$

Wir wollen annehmen, dafs X, Y, Z die drey Koordinaten des Schwerpunkts des Systems sind, so wird man nach dem 15ten Satz

$$X = \frac{\Sigma . mx}{\Sigma . m}; \quad Y = \frac{\Sigma . my}{\Sigma . m}; \quad Z = \frac{\Sigma . mz}{\Sigma . m}$$

haben, und folglich

$$0 = \frac{d^2X}{dt^2} - \frac{\Sigma . mP}{\Sigma . m}; \quad 0 = \frac{d^2Y}{dt^2} - \frac{\Sigma . mQ}{\Sigma . m}; \quad 0 = \frac{d^2Z}{dt^2} - \frac{\Sigma . mR}{\Sigma . m}.$$

Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich also so, als ob alle Kräfte, welche auf das System wirken, an diesem Punkt, in welchem alle Körper m, m' etc. vereinigt sind, angebracht wären.

Ist das System nur der gegenseitigen Wirkung der Körper, aus welchen es besteht, und ihren wechselseitigen Anziehungen unterworfen, so wird man

$$o = \Sigma . mP; \quad o = \Sigma . mQ; \quad o = \Sigma . mR$$

haben. Denn wenn man durch p die gegenseitige Wirkung von m auf m', von welcher Beschaffenheit sie auch seyn mag, und durch f die Entfernung beider Körper von einander bezeichnet, so wird man vermöge dieser Wirkung allein folgende Gleichungen haben:

$$mP = \frac{p.(x-x')}{f}; \quad mQ = \frac{p.(y-y')}{f}; \quad mR = \frac{p.(z-z')}{f};$$

$$m'P' = \frac{p.(x'-x)}{f}; \quad m'Q' = \frac{p.(y'-y)}{f}; \quad m'R' = \frac{p.(z'-z)}{f}.$$

Hieraus erhält man

$$o = mP + m'P'; \quad o = mQ + m'Q'; \quad o = mR + m'R',$$

und es ist klar, daſs diese Gleichungen selbst in dem Fall Statt haben, wo diese Körper eine endliche Wirkung auf einander in einem Augenblick ausüben würden. Ihre gegenseitige Wirkung verschwindet also in den vorhergehenden Integralen $\Sigma . mP$, $\Sigma . mQ$, $\Sigma . mR$, welche also gleich Null sind, wenn keine äuſsere Kräfte auf das System wirken. In diesem Fall hat man also

$$o = \frac{d^2X}{dt^2}; \quad o = \frac{d^2Y}{dt^2}; \quad o = \frac{d^2Z}{dt^2},$$

und wenn man integrirt,

$$X = a + bt; \quad Y = a' + b't; \quad Z = a'' + b''t;$$

wo a, b, a', b', a'', b'' willkührliche beständige Gröſsen sind. Eliminirt man die Zeit t, so wird man eine Gleichung des ersten Grades sowohl zwischen X und Y, als zwischen X und Z haben; woraus folgt, daſs die Bewegung des Schwerpunkts geradlinicht ist. Auſserdem ist die Geschwindigkeit, nämlich

$\sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt}\right)^2}$ oder $\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2}$, beständig und folglich die Bewegung gleichförmig.

Es ist aus der vorhergehenden Analysis klar, daſs diese Unveränderlichkeit der Bewegung des Schwerpunkts eines Systems von Körpern, was auch im-

mer ihre gegenseitige Wirkung seyn mag, selbst in dem Fall Statt hat, wo einige dieser Körper eine endliche Bewegung in einem Augenblick durch diese Wirkung verliehren.

21. Setzt man

$$\delta x' = \frac{y' \cdot \delta x}{y} + \delta x_,'; \quad \delta x'' = \frac{y'' \cdot \delta x}{y} + \delta x_,'' \text{ etc.}$$

$$\delta y = \frac{-x \cdot \delta x}{y} + \delta y_,; \quad \delta y' = \frac{-x' \cdot \delta x}{y} + \delta y_,'; \quad \delta y'' = \frac{-x'' \cdot \delta x}{y} + \delta y_,'' \text{ etc.}$$

so verschwindet ebenfalls δx in den Ausdrücken von δf, $\delta f'$, $\delta f''$ etc. Nimmt man also an, daſs das System frey ist, wo die Bedingungen, welche auf die Verbindung der Theile des Systems Bezug haben, nur auf die Variationen δf, $\delta f'$ etc. Einfluſs haben, so wird die Variation δx von ihnen unabhängig und also willkührlich seyn. Wenn man daher in die Gleichung (p) des 18ten Satzes statt $\delta x'$, $\delta x''$ etc. δy, $\delta y'$, $\delta y''$ etc. ihre vorhergehenden Werthe setzt, so muſs man den Koefficienten von δx besonders gleich Null setzen; dieses giebt

$$0 = \Sigma \cdot m \cdot \frac{(x\, d^2y - y\, d^2x)}{dt^2} + \Sigma \cdot m\,(Py - Qx),$$

woraus man, wenn man in Beziehung auf die Zeit t integrirt,

$$c = \Sigma \cdot m \cdot \frac{(x\, dy - y\, dx)}{dt} + \Sigma \cdot \int \cdot m \cdot (Py - Qx) \cdot dt$$

erhält, wo c eine willkührliche beständige Gröſse ist.

Man kann in diesem Integral die Koordinaten y, y' etc. mit z, z' etc. verwechseln, wofern man nur auch statt der mit der Axe der y parallelen Kräfte Q, Q' etc. die mit der Axe der z parallelen Kräfte R, R' etc. setzt; dieses giebt

$$c' = \Sigma \cdot m \cdot \frac{(x\, dz - z\, dx)}{dt} + \Sigma \cdot \int \cdot m \cdot (Pz - Rx) \cdot dt,$$

wo c' eine neue beständige Gröſse ist. Auf eben die Art wird man

$$c'' = \Sigma \cdot m \cdot \frac{(y\, dz - z\, dy)}{dt} + \Sigma \cdot \int \cdot m \cdot (Qz - Ry) \cdot dt$$

erhalten, wo c'' eine dritte beständige Gröſse ist.

Nimmt man nun an, daſs die Körper des Systems bloſs ihrer gegenseitigen Wirkung und einer auf den Anfangspunkt der Koordinaten gerichteten Kraft unterworfen sind, und nennt man wie vorher p die gegenseitige Wirkung von m und m', so wird man vermöge dieser einzelnen Wirkung

0 =

$$o = m.(Py - Qx) + m'.(P'y' - Q'x')$$

haben; die wechselseitige Wirkung der Körper verschwindet also aus dem endlichen Integral $\Sigma.m.(Py - Qx)$. Es sey S die Kraft, welche m gegen den Anfangspunkt der Koordinaten zu bewegen strebt, so wird man vermöge dieser Kraft allein folgende Gleichungen haben:

$$P = \frac{-S.x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad Q = \frac{-S.y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Die Kraft S verschwindet daher im Ausdruck $Py - Qx$; und man hat in dem Fall, wo die verschiedenen Körper des Systems nur durch ihre gegenseitige Wirkung und Anziehung und durch Kräfte, welche nach dem Anfangspunkt der Koordinaten gerichtet sind, bewegt werden, folgende Gleichungen:

$$c = \Sigma.m.\left(\frac{xdy - ydx}{dt}\right); \quad c' = \Sigma.m.\left(\frac{xdz - zdx}{dt}\right); \quad c'' = \Sigma.m.\left(\frac{ydz - zdy}{dt}\right) \ldots (z)$$

Projicirt man den Körper m auf die Ebene der x und y, so wird das Differenzial $\frac{xdy - ydx}{2}$ die Winkelfläche seyn, welche der vom Anfangspunkt der Koordinaten zur Projection von m gezogene Radius vector während des Augenblicks dt beschreibt; die Summe dieser Winkelflächen, jede mit der Masse ihres Körpers multiplicirt, ist dem Element der Zeit proportional; woraus folgt, daſs sie in einer endlichen Zeit der Zeit proportional ist. Hierinn besteht der Grundsatz der Erhaltung der Winkelflächen.

Da die feste Ebene der x und y willkührlich ist, so hat dieser Grundsatz für jede Ebene Statt, und wenn die Kraft S gleich Null ist, das heiſst, wenn die Körper nur ihrer Wirkung und ihrer gegenseitigen Anziehung unterworfen sind, so ist der Anfangspunkt der Koordinaten willkührlich, und man kann den festen Punkt nach Willkühr annehmen. Man sieht endlich leicht aus dem Vorhergehenden, daſs dieser Grundsatz selbst dann noch Statt hat, wenn durch die gegenseitige Wirkung der Körper des Systems plötzliche Aenderungen in ihren Bewegungen entstehen.

Es existirt eine Ebene, für welche c' und c'' gleich Null sind, und welche um dieser Ursache willen verdient gekannt zu werden; denn es ist augenscheinlich, daſs der Umstand, daſs c' und c'' gleich Null sind, groſse Vereinfachungen in der Untersuchung der Bewegung eines Systems von Körpern hervor-

bringen muſs. Man muſs, um diese Ebene zu bestimmen, die Koordinaten x, y, z auf drey andere Axen beziehen, welche mit den vorhergehenden den nämlichen Anfangspunkt haben. Es sey also θ die Neigung der gesuchten Ebene, welche durch zwey neue Axen gegeben ist, auf die Ebene der x und y, und ψ der Winkel, welchen die Axe der x mit der Durchschnittslinie der beiden Ebenen bildet; so daſs, wenn π der halbe Umkreis ist, $\frac{\pi}{2} - \theta$ die Neigung der dritten neuen Axe auf die Ebene der x und y ist, und daſs $\frac{\pi}{2} - \psi$ der Winkel ist, welchen ihre Projection auf die nämliche Ebene mit der Axe der x macht.

Um den Gedanken einen bestimmten Gegenstand zu geben, wollen wir uns vorstellen, daſs der Anfangspunkt der Koordinaten im Mittelpunkt der Erde ist; daſs die Ebene der x und der y die der Ekliptik, und daſs die Axe der z die vom Mittelpunkt der Erde zum Nordpol der Ekliptik gezogene Linie ist. Wir wollen uns ferner vorstellen, daſs die gesuchte Ebene die des Aequators ist, und daſs die dritte neue Axe die nach dem Nordpol gerichtete Umdrehungsaxe der Erde ist; so wird θ die Schiefe der Ekliptik und ψ die Länge der festen unbeweglichen Axe der x vom beweglichen Frühlingsnachtgleichepunkt an gezählt, seyn. Die beiden ersten neuen Axen werden in der Ebene des Aequators seyn, und nennt man ϕ den Winkelabstand der erstern dieser Axen von der Nachtgleiche, so wird ϕ die Umdrehung der Erde von der nämlichen Nachtgleiche angerechnet, vorstellen, und $\frac{\pi}{2} + \phi$ wird der Winkelabstand der zweyten dieser Axen von der nämlichen Nachtgleiche seyn. Wir werden diese drey neuen Axen Hauptaxen nennen.

Dieses festgesetzt, sollen $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ die Koordinaten von m seyn, und zwar erstens in Bezug auf die vom Anfangspunkt der Koordinaten zur Frühlingsnachtgleiche gezogene Linie, wo die $x_{,}$ positiv sind, welche auf der Seite dieser Nachtgleiche genommen werden; zweytens in Beziehung auf die Projection der dritten Hauptaxe auf die Ebene der x und der y; drittens in Beziehung auf die Axe der z; so hat man[61])

61) Man kann die folgenden Verwandlungen auch auf folgende Art erhalten: es sey eines gegebenen Punktes Breite gleich l, seine Länge gleich L, und r sein Abstand vom Anfangspunkt der Koordinaten; ferner x, y, z die drey rechtwinklichten Koordinaten desselben Punktes; so ist $L - \psi$ der Winkel, welchen die Axe der x mit dem auf die Ekliptik projicirten Radius vector r macht. Dann ist bekanntlich

$$x = x_{,} \cdot \cos\psi + y_{,} \cdot \sin\psi;$$
$$y = y_{,} \cdot \cos\psi - x_{,} \cdot \sin\psi;$$
$$z = z_{,} \,.$$

Es sollen ferner $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$ die Koordinaten seyn, erstens in Beziehung auf die Linie der Frühlingsnachtgleiche; zweytens in Beziehung auf eine Senk-

(1) $r \cdot \sin l = z$, (2) $r \cdot \cos l \cdot \sin(L - \psi) = y$ und (3) $r \cdot \cos l \cdot \cos(L - \psi) = x$; aus (2) und (3) folgt (4) $x \cdot \sin\psi + y \cdot \cos\psi = r \cdot \cos l \cdot \sin L$, und (5) $x \cdot \cos\psi - y \cdot \sin\psi = r \cdot \cos l \cdot \cos L$. Es sey desselben Punktes gerade Aufsteigung gleich A, seine Abweichung gleich D, $x_{,,,}$, $y_{,,,}$, $z_{,,,}$ seine drey rechtwinklichten Koordinaten; so ist $A - \varphi$ der Winkel zwischen der Axe der $x_{,,,}$ und dem auf den Aequator projicirten Radius vector. Verwechselt man dann L mit A; l mit D; ψ mit φ; x, y, z mit $x_{,,,}$, $y_{,,,}$, $z_{,,,}$, so geben die vorhergehenden Formeln (1), (4) und (5) folgende: (6) $r \cdot \sin D = z_{,,,}$; (7) $x_{,,,} \cdot \sin\varphi + y_{,,,} \cdot \cos\varphi = r \cdot \cos D \cdot \sin A$; (8) $x_{,,,} \cdot \cos\varphi - y_{,,,} \cdot \sin\varphi = r \cdot \cos D \cdot \cos A$. Die Formeln (1) und (6) geben $z_{,,,} \cdot \frac{\sin l}{\sin D} = z$. Man substituire statt $\frac{\sin l}{\sin D}$ seinen Werth, welchen die sphärische Trigonometrie giebt, so erhält man

$$z_{,,,} \cdot \cos\theta - z_{,,,} \cdot \frac{\sin A \cdot \cos D}{\sin D} \sin\theta = z.$$

Nun ist $\frac{z_{,,,}}{\sin\theta} = r$ nach (6) und $r \cdot \sin A \cdot \cos D = x_{,,,} \cdot \sin\varphi + y_{,,,} \cdot \cos\varphi$ nach (7); substituirt man diese Werthe, so erhält man:

$$z_{,,,} \cdot \cos\theta - x_{,,,} \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta - y_{,,,} \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta = z \ldots (9).$$

Da ferner $\cos l \cdot \cos L$ gleich $\cos D \cdot \cos A$ ist, so geben die Gleichungen (5) und (8) folgende:

$$x_{,,,} \cdot \cos\varphi - y_{,,,} \cdot \sin\varphi = x \cdot \cos\psi - y \cdot \sin\psi \ldots (10).$$

Die sphärische Trigonometrie giebt $\sin L \cdot \cos l = \frac{\sin D}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \sin l$, und $\sin l = \cos\theta \cdot \sin D - \sin\theta \cdot \cos D \cdot \sin A$; setzt man den Werth von $\sin l$ in die erstere Gleichung, so erhält man $\sin L \cdot \cos l = \frac{\sin D}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta^2}{\sin\theta} \sin D + \cos\theta \cdot \cos D \cdot \sin A = \sin D \cdot \sin\theta + \cos\theta \cdot \cos D \cdot \sin A$. Substituirt man diesen Werth von $\sin L \cdot \cos l$ in die Gleichung (4), so erhält man

$$r \cdot \sin D \cdot \sin\theta + r \cdot \cos\theta \cdot \cos D \cdot \sin A = x \cdot \sin\psi + y \cdot \cos\psi.$$

Nun ist nach (6) $r \cdot \sin D = z_{,,,}$ und $r \cdot \cos D \cdot \sin A = x_{,,,} \cdot \sin\varphi + y_{,,,} \cdot \cos\varphi$ nach (7); dadurch verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in folgende:

$$z_{,,,} \cdot \sin\theta + y_{,,,} \cdot \cos\varphi \cdot \cos\theta + x_{,,,} \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta = x \cdot \sin\psi + y \cdot \cos\psi \ldots (11).$$

Multiplicirt man die Gleichung (10) mit $\cos\psi$ und (11) mit $\sin\psi$, so giebt ihre Summe die Grösse x; multiplicirt man ferner (10) mit $-\sin\psi$ und (11) mit $\cos\psi$, so giebt ihre Summe die Grösse y. Um $x_{,,,}$, $y_{,,,}$, $z_{,,,}$ zu erhalten, multiplicire man die Gleichung (9) mit $-\sin\theta$ und (11) mit $\cos\theta$; so giebt ihre Summe

$$x_{,,,} \cdot \sin\varphi + y_{,,,} \cdot \cos\varphi = x \cdot \sin\psi \cdot \cos\theta + y \cdot \cos\psi \cdot \cos\theta - z \cdot \sin\theta \ldots (12).$$

Man multiplicire (10) mit $\cos\varphi$ und (12) mit $\sin\varphi$, ihre Summe giebt $x_{,,,}$; ferner (10) mit $-\sin\varphi$ und (12) mit $\cos\varphi$, so giebt ihre Summe $y_{,,,}$. Vermittelst dieser Werthe wird man $x_{,,,}$ und $y_{,,,}$ aus der Gleichung (9) oder aus (11) eliminiren, und dadurch $z_{,,,}$ erhalten.

rechte auf diese Linie in der Ebene des Aequators; drittens in Beziehung auf die dritte Hauptaxe, so hat man

$$x_{,} = x_{,,}$$
$$y_{,} = y_{,,} \,.\, \cos\theta + z_{,,} \,.\, \sin\theta$$
$$z_{,} = z_{,,} \,.\, \cos\theta - y_{,,} \,.\, \sin\theta.$$

Endlich sollen $x_{,,,}$, $y_{,,,}$, $z_{,,,}$ die Koordinaten von m in Beziehung auf die erste, zweyte und dritte Hauptaxe seyn; so hat man

$$x_{,,} = x_{,,,} \,.\, \cos\phi - y_{,,,} \,.\, \sin\phi$$
$$y_{,,} = y_{,,,} \,.\, \cos\phi + x_{,,,} \,.\, \sin\phi$$
$$z_{,,} = z_{,,,}.$$

Hieraus kann man leicht schliefsen

$$x = x_{,,,} \,.\, (\cos\theta \,.\, \sin\psi \,.\, \sin\phi + \cos\psi \,.\, \cos\phi)$$
$$+ y_{,,,} \,.\, (\cos\theta \,.\, \sin\psi \,.\, \cos\phi - \cos\psi \,.\, \sin\phi) + z_{,,,} \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\psi;$$
$$y = x_{,,,} \,.\, (\cos\theta \,.\, \cos\psi \,.\, \sin\phi - \sin\psi \,.\, \cos\phi)$$
$$+ y_{,,,} \,.\, (\cos\theta \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\phi + \sin\psi \,.\, \sin\phi) + z_{,,,} \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\psi;$$
$$z = z_{,,,} \,.\, \cos\theta - y_{,,,} \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\phi - x_{,,,} \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\phi.$$

Multiplicirt man jeden dieser Werthe von x, y, z mit seinem Koefficienten von $x_{,,,}$, so erhält man

$$x_{,,,} = x\,(\cos\theta \,.\, \sin\psi \,.\, \sin\phi + \cos\psi \,.\, \cos\phi)$$
$$+ y\,(\cos\theta \,.\, \cos\psi \,.\, \sin\phi - \sin\psi \,.\, \cos\phi) - z \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\phi.$$

Multiplicirt man auf eben diese Art jeden der Werthe von x, y, z mit seinem Koefficienten von $y_{,,,}$ und alsdann mit seinem Koefficienten von $z_{,,,}$, so wird man folgende Gleichungen erhalten:

$$y_{,,,} = x \,.\, (\cos\theta \,.\, \sin\psi \,.\, \cos\phi - \cos\psi \,.\, \sin\phi)$$
$$+ y \,.\, (\cos\theta \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\phi + \sin\psi \,.\, \sin\phi) - z \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\psi;$$
$$z_{,,,} = x \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\psi + y \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\psi + z \,.\, \cos\theta.$$

Diese verschiedenen Verwandlungen der Koordinaten werden uns in der Folge sehr nützlich seyn. Bezeichnet man die Koordinaten x, y, z, $x_{,,,}$, $y_{,,,}$, $z_{,,,}$ oberwärts mit einem Strich, zwey Strichen u. s. w., so wird man die den Körpern m', m'' etc. zugehörenden Koordinaten erhalten.

Hieraus kann man leicht Folgendes schliefsen, wenn man c, c', c'' anstatt

$$\Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(xdy - ydx)}{dt}, \quad \Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(xdz - zdx)}{dt}, \quad \Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(ydz - zdy)}{dt}$$ setzt [62]):

$$\Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(x_{,,,} \,.\, dy_{,,,} - y_{,,,} \,.\, dx_{,,,})}{dt} = c \,.\, \cos\theta - c' \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\psi + c'' \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\psi;$$

$$\Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(x_{,,,} \,.\, dz_{,,,} - z_{,,,} \,.\, dx_{,,,})}{dt} = c \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\phi + c' .(\sin\psi \,.\, \sin\phi + \cos\theta \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\phi)$$
$$+ c'' .(\cos\psi \,.\, \sin\phi - \cos\theta \,.\, \sin\psi \,.\, \cos\phi);$$

$$\Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(y_{,,,} \,.\, dz_{,,,} - z_{,,,} \,.\, dy_{,,,})}{dt} = -c .\sin\theta \,.\, \sin\phi + c' .(\sin\psi \,.\, \cos\psi - \cos\theta \,.\, \cos\psi \,.\, \sin\phi)$$
$$+ c'' .(\cos\psi \,.\, \cos\phi + \cos\theta \,.\, \sin\psi \,.\, \sin\phi).$$

Bestimmt man ψ und θ so, daſs man

$$\sin\theta \,.\, \sin\psi = \frac{c''}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}; \qquad \sin\theta \,.\, \cos\psi = \frac{-c'}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}$$

hat, welches $\cos\theta = \dfrac{c}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}$ giebt, so erhält man [63])

62) Die Werthe von $x_{,,,}$ und $y_{,,,}$ sind nur in Rücksicht auf φ verschieden; setzt man
$x \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\psi + y \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\psi - z \,.\, \sin\theta = A$ und $x \,.\, \cos\psi - y \,.\, \sin\psi = B$, so ist
$x_{,,,} = A \,.\, \sin\varphi + B \,.\, \cos\varphi$ und $y_{,,,} = A \,.\, \cos\varphi - B \,.\, \sin\varphi$; man erhält also $x_{,,,}$ aus $y_{,,,}$, wenn man φ in $90^\circ + \varphi$ verwandelt. Dies gilt auch von den Differenzialen dieser Gröſsen, weil φ eine beständige Gröſse ist. Nun ist $x_{,,,} \,.\, dy_{,,,} = (A \,.\, \sin\varphi + B \,.\, \cos\varphi)\ (dA \,.\, \cos\varphi - dB \,.\, \sin\varphi)$
$= A \,.\, dA \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\varphi + B \,.\, dA \,.\, \cos\varphi^2 - A \,.\, dB \,.\, \sin\varphi^2 - B \,.\, dB \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\varphi.$
Eben so:
$- y_{,,,} \,.\, dx_{,,,} = - A.dA \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\varphi + B.dA \,.\, \sin\varphi^2 - A \,.\, dB \,.\, \cos\varphi^2 + B \,.\, dB \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\varphi$
Folglich ist

$$x_{,,,} \,.\, dy_{,,,} - y_{,,,} \,.\, dx_{,,,} = B \,.\, dA - A \,.\, dB.$$

$$B.dA = (x.\cos\psi - y.\sin\psi)\ (dx \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\psi + dy \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\psi - dz \,.\, \sin\theta)$$
$$- A.dB = (- dx \,.\, \cos\psi + dy \,.\, \sin\psi)\ (x.\cos\theta \,.\, \sin\psi + y.\cos\theta \,.\, \cos\psi - z \,.\, \sin\theta)$$

$B \,.\, dA - A.dB = (xdy - ydx)\cos\theta - (xdz - zdx)\sin\theta \,.\, \cos\psi + (ydz - zdy) \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\psi.$
Multiplicirt man diese Gleichung mit m, und integrirt man in Beziehung auf Σ, so erhält man die erste der im Text gegebenen Gleichungen.

Auf eine ähnliche Art erhält man die zweyte dieser Gleichungen, und aus dieser sogleich die dritte, wenn man φ in $90^\circ + \varphi$ verwandelt. Denn dadurch verwandelt sich $x_{,,,}$ und $dx_{,,,}$ in $y_{,,,}$ und $dy_{,,,}$ und $z_{,,,}$, $dz_{,,,}$ bleiben unverändert.

63) Der zweyte Theil der vorhergehenden zweyten Gleichung ist gleich
$(c \,.\, \sin\theta + c' \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\psi - c'' \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\psi)\cos\varphi + (c' \,.\, \mathrm{tang}\,\psi + c'')\cos\psi \,.\, \sin\varphi.$

$$\Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(x_{,,,} \,.\, dy_{,,,} - y_{,,,} \,.\, dx_{,,,})}{dt} = \sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2};$$

$$\Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(x_{,,,} \,.\, dz_{,,,} - z_{,,,} \,.\, dx_{,,,})}{dt} = 0;$$

$$\Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(y_{,,,} \,.\, dz_{,,,} - z_{,,,} \,.\, dy_{,,,})}{dt} = 0.$$

Die Werthe von c' und c'' sind also für die auf diese Art bestimmte Ebene der $x_{,,,}$ und der $y_{,,,}$ gleich Null. Es giebt nur Eine Ebene, welche diese Eigenschaft besitzt; denn wenn man annimmt, daſs es die Ebene der x und der y ist, so wird man

$$\Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(x_{,,,} \, dz_{,,,} - z_{,,,} \,.\, dx_{,,,})}{dt} = c \,.\sin\theta \,.\, \cos\phi;$$

$$\Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(y_{,,,} \,.\, dz_{,,,} - z_{,,,} \,.\, dy_{,,,})}{dt} = - c \,.\sin\theta \,.\sin\phi$$

haben. Setzt man diese beiden Functionen gleich Null, so erhält man $\sin\theta = 0$, das heiſst die Ebene der $x_{,,,}$ und $y_{,,,}$ wird alsdann mit der Ebene der x und der y zusammen fallen.

Da der Werth von $\Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(x_{,,,} \,.\, dy_{,,,} - y_{,,,} \,.\, dx_{,,,})}{dt}$ gleich $\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}$ ist, was auch die Ebene der x und der y ist, so folgt daraus, daſs die Gröſse $c^2 + c'^2 + c''^2$ dieselbe ist, was auch immer die Lage dieser Ebene ist, und daſs die nach dem Vorhergehenden bestimmte Ebene der $x_{,,,}$ und der $y_{,,,}$ diejenige ist, in Beziehung auf welche die Function $\Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(x_{,,,} \,.\, dy_{,,,} - y_{,,,} \,.\, dx_{,,,})}{dt}$ ein Gröſstes ist. Die Ebene, von welcher die Rede ist, hat also folgende merk-

Nun ist $\tang \psi = - \frac{c''}{c'}$ also $c' . \tang \psi + c'' = - c'' + c'' = 0$. Man multiplicire $c . \sin\theta + c' . \cos\theta . \cos\psi - c'' . \cos\theta . \sin\psi$ mit $\sin\theta$, so erhält man: $c . \sin\theta^2 + (c' . \sin\theta . \cos\psi - c'' . \sin\theta . \sin\psi) \cos\theta$. Man substituire statt der trigonometrischen Linien ihre Werthe so erhält man

$$\frac{(c'^2 + c''^2) . c}{c^2 + c'^2 + c''^2} - \left(\frac{c' c' + c'' c''}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}}\right) \frac{c}{\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}},$$

welches offenbar gleich Null ist. Man sieht, daſs der Werth des zweyten Theils der zweyten Gleichung unabhängig von φ gleich Null ist. Da man nun den zweyten Theil der dritten Gleichung dadurch erhält, daſs man in der zweyten Gleichung φ in $90° + \varphi$ verwandelt, so folgt hieraus unmittelbar, daſs er auch gleich Null ist.

würdige Eigenschaften: erstens daſs die Summe der von dem projicirten Radius vector jedes Körpers beschriebenen Winkelfläche, jede mit der Masse des Körpers multiplicirt, die möglichst gröſste ist; zweytens daſs die nämliche Summe in Beziehung auf jede andere, auf die vorige senkrechte, Ebene gleich Null ist, weil der Winkel ϕ unbestimmt bleibt. Vermittelst dieser Eigenschaften wird man leicht in jedem Augenblick diese Ebene wieder finden können, was auch immer für Aenderungen in der gegenseitigen Lage der Körper durch ihre gegenseitigen Wirkungen entstanden seyn mögen, so wie man zu jeder Zeit leicht die Lage des Schwerpunkts des Systems finden kann. Aus diesem Grunde ist es eben so natürlich, die x und y auf diese Ebene zu beziehen, als es natürlich ist, für den Anfangspunkt der Koordinaten den Schwerpunkt zu nehmen.

22. Die Grundsätze der Erhaltung der lebendigen Kräfte und der Winkelflächen finden auch noch dann Statt, wenn man annimmt, daſs der Anfangspunkt der Koordinaten eine geradlinichte und gleichförmige Bewegung im Raum hat. Wir nennen, um dies zu beweisen X, Y, Z die Koordinaten dieses Anfangspunkts, welchen wir in Beziehung auf einen festen Punkt im Raum beweglich setzen, und wir nehmen an, daſs

$$x = X + x_{,}\,; \quad y = Y + y_{,}\,; \quad z = Z + z_{,}\,;$$
$$x' = X + x_{,}'; \quad y' = Y + y_{,}'; \quad z' = Z + z_{,}';$$
etc.

ist, wo $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, $x_{,}'$ etc. die Koordinaten von m, m' etc. in Beziehung auf den beweglichen Anfangspunkt sind. Durch diese Voraussetzung erhält man

$$d^2X = 0; \quad d^2Y = 0; \quad d^2Z = 0.$$

Man hat aber aus der Natur des Schwerpunkts, wenn das System frey ist,

$$0 = \Sigma\,.\,m\,.\,(d^2x + d^2x_{,}) - \Sigma\,.\,m\,.\,P\,.\,dt^2$$
$$0 = \Sigma\,.\,m\,.\,(d^2y + d^2y_{,}) - \Sigma\,.\,m\,.\,Q\,.\,dt^2$$
$$0 = \Sigma\,.\,m\,.\,(d^2z + d^2z_{,}) - \Sigma\,.\,m\,.\,R\,.\,dt^2;$$

dadurch wird die Gleichung (p) im 18ten Satz, wenn man in ihr $\delta X + \delta x_{,}$, $\delta Y + \delta y_{,}$ etc. statt δx, δy etc. setzt, sich in folgende verwandeln:

$$0 = \Sigma.m.\delta x_{,}.\left(\frac{d^2x_{,}}{dt^2} - P\right) + \Sigma.m.\delta y_{,}.\left(\frac{d^2y_{,}}{dt^2} - Q\right) + \Sigma.m.\delta z_{,}.\left(\frac{d^2z_{,}}{dt^2} - R\right),$$

eine Gleichung, welche genau die nämliche Form, wie die Gleichung (p) hat, wenn die Kräfte P, Q, R nur von den Koordinaten $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, $x_{,}'$ etc. abhän-

gen. Vermittelst der vorhergehenden Analysis wird man also aus dieser Gleichung die Grundsätze der Erhaltung der lebendigen Kräfte und der Winkelflächen in Beziehung auf den beweglichen Anfangspunkt der Koordinaten erhalten.

Wenn das System keine Wirkung von fremden Kräften erfährt, so wird sein Schwerpunkt eine geradlinichte und gleichförmige Bewegung im Raum haben, wie wir im 20sten Satz gesehen haben; wenn man also den Ursprung der Koordinaten x, y, z im Schwerpunkt fest setzt, so werden diese Grundsätze immer Statt haben. Sind dann X, Y, Z die Koordinaten des Schwerpunkts, so wird man vermöge der Natur dieses Punkts

$$0 = \Sigma \,.\, m \,.\, x_{,}\,; \qquad 0 = \Sigma \,.\, m \,.\, y_{,}\,; \qquad 0 = \Sigma \,.\, m \,.\, z_{,}$$

haben; dieses giebt

$$\Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(xdy - ydx)}{dt} = \frac{XdY - YdX}{dt} \,.\, \Sigma \,.\, m + \Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(x_{,}dy_{,} - y_{,}dx_{,})}{dt^2}$$

$$\Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} = \frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2}{dt^2} \,.\, \Sigma \,.\, m + \Sigma \,.\, m \,.\, \frac{dx_{,}^2 + dy_{,}^2 + dz_{,}^2}{dt^2}.$$

Die Gröfsen, welche aus den vorhergehenden Grundsätzen entspringen, bestehen also erstens aus Gröfsen, welche Statt haben würden, wenn alle Körper des Systems in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkt vereinigt wären; zweytens aus Gröfsen, welche sich auf den als beweglich angenommenen Schwerpunkt beziehen; und da die erstern dieser Gröfsen beständig sind, so sieht man den Grund, warum die Grundsätze, wovon die Rede ist, in Beziehung auf den Schwerpunkt Statt haben. Setzt man also beständig den Anfangspunkt der Koordinaten x, y, z, x' etc. der Gleichungen (z) des vorhergehenden Satzes in diesen Punkt, so werden sie beständig Statt haben. Hieraus folgt, dafs die Ebene, welche beständig durch den Schwerpunkt geht, und in Beziehung auf welche die Function $\Sigma \,.\, m \,.\, \frac{(xdy - ydx)}{dt}$ ein Gröfstes ist, immer parallel mit sich selbst während der Bewegung des Systems bleibt, und dafs eben diese Function für jede andere auf der vorigen senkrechte Ebene gleich Null ist.

Die Grundsätze der Erhaltung der Winkelflächen und der lebendigen Kräfte können durch Verhältnisse zwischen den Koordinaten der Abstände der Körper des Systems unter einander ausgedrückt werden. Setzt man in der That den

den Anfangspunkt der x, y, z immer im Schwerpunkt, so kann man den Gleichungen (z) des vorhergehenden Satzes die folgende Gestalt geben[64]):

$$c \,.\, \Sigma \,.\, m \,.= \Sigma \,.\, m m' \,.\, \left[\frac{(x'-x)\,.\,(dy'-dy)-(y'-y)\,.\,(dx'-dx)}{dt}\right];$$

$$c' \,.\, \Sigma \,.\, m \,.= \Sigma \,.\, m m' \,.\, \left[\frac{(x'-x)\,.\,(dz'-dz)-(z'-z)\,.\,(dx'-dx)}{dt}\right];$$

$$c'' \,.\, \Sigma \,.\, m \,.= \Sigma \,.\, m m' \,.\, \left[\frac{(y'-y)\,.\,(dz'-dz)-(z'-z)\,.\,(dy'-dy)}{dt}\right].$$

Man kann bemerken, daſs die zweyten Theile dieser mit dt multiplicirten Gleichungen die Summe der projicirten Elemente der Winkelflächen ausdrücken,

64) Die erste der Gleichungen (z) giebt $c \,.\, \Sigma m = \Sigma m \,.\, \Sigma \,.\, \frac{mx\,dy - my\,dx}{dt}$, welches gleich $\Sigma m \,.\, \Sigma mx \frac{dy}{dt} - \Sigma m \,.\, \Sigma my \frac{dx}{dt}$ ist. Nun enthält $\Sigma m \,.\, \Sigma mx\, dy$ folgende in $m^{(r)}$ und $m^{(p)}$ multiplicirte Gröſsen: $\left(m^{(r)}\right)^2 x^{(r)}\, dy^{(r)} + \left(m^{(p)}\right)^2 . \, x^{(p)}\, dy^{(p)} + m^{(r)} m^{(p)} \left(x^{(r)}\, dy^{(r)} + x^{(p)}\, dy^{(p)}\right)$; der Factor von $m^{(r)} m^{(p)}$ ist gleich $\left(x^{(r)} - x^{(p)}\right)\left(dy^{(r)} - dy^{(p)}\right) + x^{(r)}\, dy^{(p)} + x^{(p)}\, dy^{(r)}$. Das Product $\Sigma m \,.\, \Sigma m\, xdy$ enthält also folgende drey Arten von Gröſsen: $\left(m^{(r)}\right)^2 . \, x^{(r)}\, dy^{(r)}$; $m^{(r)} m^{(p)} \left(x^{(r)} - x^{(p)}\right)\left(dy^{(r)} - dy^{(p)}\right)$; $m^{(p)} m^{(r)} x^{(r)}\, dy^{(p)}$, und folglich ist

$$\Sigma m \,.\, \Sigma m x\, dy = \Sigma \left(m^{(r)}\right)^2 x^{(r)}\, dy^{(r)} + \Sigma m^{(r)} m^{(p)} . \left(x^{(r)} - x^{(p)}\right)\left(dy^{(r)} - dy^{(p)}\right)$$
$$+ \Sigma m^{(p)} m^{(r)} x^{(r)}\, dy^{(p)},$$

wo r und p jeden Werth haben können, aber nicht einander gleich seyn dürfen. Nimmt man aber an, daſs r und p auch einander gleich seyn können, so stellt das Glied $\Sigma m^{(p)} m^{(r)} x^{(r)}\, dy^{(p)}$ die beiden vorhergehenden Glieder $\Sigma \left(m^{(r)}\right)^2 x^{(r)}\, dy^{(r)} + \Sigma m^{(p)} m^{(r)} x^{(r)}\, dy^{(p)}$ vor; und dann enthält $\Sigma m^{(p)} m^{(r)} x^{(r)}\, dy^{(p)}$ alle mögliche Verbindungen von $m^{(p)}\, dy^{(p)}$ und $m^{(r)} x^{(r)}$, und ist also dem Product von $\Sigma m^{(p)}\, dy^{(p)} . \, \Sigma m^{(r)} x^{(r)}$ gleich. Nun ist aber $\Sigma m^{(r)} x^{(r)}$ oder $\Sigma m x$ vermöge der Natur des Schwerpunkts gleich Null, also auch $\Sigma m^{(p)} m^{(r)} x^{(r)}\, dy^{(p)}$ gleich Null und

$$\Sigma m \,.\, \Sigma m x\, dy = \Sigma m^{(r)} m^{(p)} . \left(x^{(r)} - x^{(p)}\right)\left(dy^{(r)} - dy^{(p)}\right).$$

Verwechselt man x mit y und y mit x, so erhält man

$$\Sigma m \,.\, \Sigma m y\, dx = \Sigma m^{(r)} m^{(p)} \left(y^{(r)} - y^{(p)}\right)\left(dx^{(r)} - dx^{(p)}\right),$$

woraus man sogleich den Werth von $c \Sigma m$ erhält. Aus diesem Werth erhält man $c' \Sigma m$, wenn man y mit z verwechselt, und $c'' \Sigma m$, wenn man in $c' \Sigma m$, x mit y verwechselt.

welche jede gerade Linie, die zwey Körper des Systems vereinigt, beschreibt. Man nimmt hierbey an, daſs der eine Körper sich um den andern, welchen man als unbeweglich betrachtet, bewegt; und man muſs jede Winkelfläche mit dem Product der zwey Massen, welche durch die gerade Linie vereinigt werden, multipliciren.

Bringt man an die vorhergehenden Gleichungen die Analysis des 21sten Satzes an, so wird man sehen, daſs die Ebene, welche beständig durch irgend einen der Körper des Systems geht, und in Beziehung auf welche die Function $\Sigma \,.\, mm' \,.\, \left[\frac{(x'-x)\,.\,(dy'-dy)-(y'-y)\,.\,(dx'-dx)}{dt}\right]$ ein Gröſstes ist, beständig mit sich selbst parallel während der Bewegung des Systems bleibt, und daſs diese Ebene parallel mit der Ebene ist, welche durch den Schwerpunkt geht, und in Beziehung auf welche die Function $\Sigma \,.\, m \,.\, \left(\frac{xdy - ydx}{dt}\right)$ ein Gröſstes ist. Man wird noch sehen, daſs die zweyten Theile der vorigen Gleichungen in Beziehung auf jede Ebene, welche durch den nämlichen Körper geht, und welche auf der Ebene, von der die Rede ist, senkrecht steht, gleich Null sind.

Man kann der Gleichung (q) des 19ten Satzes folgende Gestalt geben [65]):

65) Die Gleichung (q) des 19ten Satzes ist folgende:

$$\Sigma\, m^{(r)} \,.\, \left(\frac{dx^{(r)^2} + dy^{(r)^2} + dz^{(r)^2}}{dt}\right) = c + 2\Sigma \int m^{(r)} \left(P\,dx^{(r)} + Q\,dy^{(r)} + R\,dz^{(r)}\right),$$

wo man statt r nach und nach alle ganze Zahlen setzen muſs. Nimmt man nun für den Anfangspunkt der Koordinaten den Körper m an, und multiplicirt man die vorige Gleichung mit m, welcher Factor bey allen Werthen von r derselbe ist, und also hinter das Summenzeichen Σ gesetzt werden kann, so erhält man:

$$\Sigma \,.\, m^{(r)}\, m \,.\, \frac{\left(dx^{(r)} - dx\right)^2 + \left(dy^{(r)} - dy\right)^2 + \left(dz^{(r)} - dz\right)^2}{dt^2} = cm$$

$$+ m\,\Sigma \int m^{(r)} \left[P\left(dx^{(r)} - dx\right) + Q\left(dy^{(r)} - dy\right) + R\left(dz^{(r)} - dz\right)\right].$$

Nimmt man so nach und nach die Körper m', m'', m''' . . . statt des Anfangspunktes der Koordinaten an, so wird man ähnliche Gleichungen erhalten. Die Summe aller dieser Gleichungen wird sich so darstellen lassen:

$$\Sigma\, m^{(r)}\, m^{(p)} \,.\, \left[\frac{\left(dx^{(r)} - dx^{(p)}\right)^2 + \left(dy^{(r)} - dy^{(p)}\right)^2 + \left(dz^{(r)} - dz^{(p)}\right)^2}{dt^2}\right] =$$

$$c\,\Sigma m^{(p)} + \Sigma \,.\, m^{(p)} \,.\, \Sigma \int m^{(r)} \,.\, \left[P\left(dx^{(r)} - dx^{(p)}\right) + Q\left(dy^{(r)} - dy^{(p)}\right) + R\left(dz^{(r)} - dz^{(p)}\right)\right]$$

$$\Sigma . mm' . \left[\frac{(dx'-dx)^2+(dy'-dy)^2+(dz'-dz)^2}{dt^2}\right] = \text{beständige Gr.} + 2\Sigma . m . \Sigma \int mm' . Fdf;$$

eine Gleichung, welche sich blofs auf die Koordinaten der Abstände der Körper unter einander bezieht, und in welcher das erste Glied die Summe der Quadrate der relativen Geschwindigkeiten, welche die Körper des Systems um einander haben, ausdrückt, wenn man sie paarweise betrachtet, und einen von beiden unbeweglich setzt, und jedes Quadrat mit dem Product der beiden Massen, welche man betrachtet, multiplicirt.

23. Wir wollen nun die Gleichung (r) des 19ten Satzes wieder vornehmen. Differenziirt man sie in Beziehung auf die Charakteristik δ, so erhält man

$$\Sigma . mv . \delta v = \Sigma . m . (P . \delta x + Q . \delta y + R . \delta z);$$

dadurch wird die Gleichung (p) des 18ten Satzes sich in folgende verwandeln:

$$0 = \Sigma . m . \left(\delta x . d . \frac{dx}{dt} + \delta y . d . \frac{dy}{dt} + \delta z . d . \frac{dz}{dt}\right) - \Sigma . mdt . v\delta v .$$

Es sey ds das Element der von m beschriebenen krummen Linie; ds' das Element der von m' beschriebenen krummen Linie u. s. w., so hat man:

$$vdt = ds; \quad v'dt = ds' \text{ etc. } ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \text{ etc.},$$

woraus man, wenn man der Analysis des 8ten Satzes folgt, nachstehende Gleichung erhalten wird:

$$\Sigma . m . \delta (v ds) = \Sigma . m . d . \frac{(dx . \delta x + dy . \delta y + dz . \delta z)}{dt} .$$

Integrirt man in Beziehung auf das Differenzialzeichen d und erstreckt man die Integrale auf die ganzen von den Körpern m, m' etc. beschriebenen krummen Linien, so wird man

wo man statt r und p nach und nach alle ganze positive Zahlen setzen mufs, und wo P, Q, R die mit den Axen der x, y, z parallelen Wirkungen des Körpers $m^{(p)}$ auf den Körper $m^{(r)}$ vorstellen. Wenn aber $f^{(r,p)}$ die Entfernung des Körpers $m^{(p)}$ von $m^{(r)}$ bezeichnet, und wenn F eine Function von $f^{(r,p)}$ bezeichnet, so ist die Totalwirkung des Körpers $m^{(p)}$ auf $m^{(r)}$ gleich $m^{(p)} . F . df^{(r,p)}$. Substituirt man diesen Ausdruck statt der Gröfse

$$P\left(dx^{(r)} - dx^{(p)}\right) + Q\left(dy^{(r)} - dy^{(p)}\right) + R\left(dz^{(r)} - dz^{(p)}\right)$$

in die vorhergehende Gleichung, so erhält man sogleich die im Text gegebene Gleichung, weil $c\,\Sigma\, m^{(r)}$ eine beständige Gröfse ist.

$$\Sigma . \delta . \int m v\, ds = \text{beständige Größe} + \Sigma . m . \frac{(dx . \delta x + dy . \delta y + dz . \delta z)}{dt}$$

haben, wo die Variationen δx, δy, δz etc., so wie auch die beständige Gröſse des zweyten Theils dieser Gleichung sich auf die äuſsersten Punkte der von den Körpern m, m' etc. beschriebenen krummen Linien beziehen.

Es folgt hieraus, daſs wenn man annimmt, daſs diese Punkte unveränderlich sind,

$$0 = \Sigma . \delta . \int m v\, ds$$

ist, das heiſst, die Function $\Sigma . \int m v\, ds$ ist ein Kleinstes. Hierinn besteht der Grundsatz der kleinsten Wirkung in der Bewegung der Körper; ein Grundsatz, welcher, wie man sieht, nur ein mathematisches Resultat der Grundgesetze des Gleichgewichts und der Bewegung der Materie ist. Man sieht zu gleicher Zeit, daſs dieser Grundsatz mit dem der lebendigen Kräfte verbunden, die Gleichung (p) des 18ten Satzes giebt, welche alles in sich enthält, was zur Bestimmung der Bewegungen eines Systems nöthig ist. Man sieht endlich aus dem 22sten Satz, daſs dieser Grundsatz noch dann Statt hat, wenn der Anfangspunkt der Koordinaten beweglich ist, wofern nur seine Bewegung geradlinicht und gleichförmig, und das System frey ist.

Sechstes Kapitel.

Von den Gesetzen der Bewegung eines Systems von Körpern in allen mathematisch möglichen Verhältnissen zwischen Kraft und Geschwindigkeit.

24. Wir haben im 5ten Satz bemerkt, daſs es eine unendliche Menge Arten giebt, die Kraft durch die Geschwindigkeit auszudrücken, welche keinen Widerspruch enthalten. Die einfachste von allen ist diejenige, wo die Kraft sich wie die Geschwindigkeit verhält, und wir haben gesehen, daſs dies das Gesetz der Natur ist. Wir haben im vorhergehenden Kapitel die Differenzialgleichungen für die Bewegung eines Systems von Körpern diesem Gesetze gemäſs gegeben; es ist aber leicht, die Analysis, deren wir uns bedient haben, auf alle zwischen Geschwindigkeit und Kraft mathematisch mögliche Gesetze zu erstrecken, und so aus einem neuen Gesichtspunkt die allgemeinen Grundsätze der Bewegung darzustellen. Wir nehmen hierbey an, daſs man, wenn F die Kraft und v die Geschwindigkeit ist, $F = \phi(v)$ hat, wo $\phi(v)$ jede Function von v ausdrückt; man bezeichne ferner mit $\phi'(v)$ das Differenzial von $\phi(v)$ durch dv dividirt. Behält man immer die Benennungen der vorhergehenden Sätze bey, so wird auf den Körper m parallel mit der Axe der x die Kraft $\phi(v) \cdot \frac{dx}{ds}$ wirken. Im nächstfolgenden Augenblick wird diese Kraft sich in $\phi(v) \cdot \frac{dx}{ds} + d \cdot \left(\phi(v) \cdot \frac{dx}{ds}\right)$ verwandeln, welches gleich $\phi(v) \cdot \frac{dx}{ds} + d \cdot \left(\frac{\phi(v)}{v} \cdot \frac{dx}{dt}\right)$ ist, weil $\frac{ds}{dt} = v$ ist. Wenn nun P, Q, R die Kräfte sind, welche auf den Körper m parallel mit den Axen der Koordinaten wirken; so wird das System nach dem 18ten Satz vermöge dieser Kräfte und den mit entgegengesetzten Zeichen genommenen

Differenzialien $d \,.\left(\frac{dx}{dt} \,.\, \frac{\phi(v)}{v}\right)$, $d \,.\left(\frac{dy}{dt} \,.\, \frac{\phi(v)}{v}\right)$, $d \,.\left(\frac{dz}{dt} \,.\, \frac{\phi(v)}{v}\right)$ im Gleichgewicht seyn; man wird also statt der Gleichung (p) des nämlichen Satzes folgende haben:

$$o = \Sigma . m . \left[\delta x . \left[d . \left(\frac{dx}{dt} . \frac{\phi(v)}{v}\right) - P dt\right] + \delta y . \left[d . \left(\frac{dy}{dt} . \frac{\phi(v)}{v}\right) - Q dt\right] + \delta z . \left[d . \left(\frac{dz}{dt} . \frac{\phi(v)}{v}\right) - R dt\right]\right] \; . \; . \; . \; (s)$$

welche von derselben nur darinn unterschieden ist, daſs $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ mit der Function $\frac{\phi(v)}{v}$ multiplicirt sind, welche man, wenn die Kraft der Geschwindigkeit proportional ist, der Einheit gleich setzen kann. Dieser Unterschied macht aber die Auflösung der Aufgaben der Mechanik sehr schwer. Unterdessen kann man aus der Gleichung (s) Grundsätze ableiten, welche denen der Erhaltung der lebendigen Kräfte, der Winkelflächen, und des Schwerpunkts ähnlich sind.

Verwandelt man δx in dx, δy in dy, δz in dz u. s. w., so erhält man

$$\Sigma . m . \left[\delta x . d . \left(\frac{dx}{dt} . \frac{\phi(v)}{v}\right) + \delta y . d . \left(\frac{dy}{dt} . \frac{\phi(v)}{v}\right) + \delta z . d . \left(\frac{dz}{dt} . \frac{\phi(v)}{v}\right)\right]$$

$= \Sigma . m . v dv . dt . \phi'(v)$, und folglich

$\Sigma . \int m v dv . \phi'(v) =$ beständige Gröſse $+ \Sigma . \int m . (P dx + Q dy + R dz)$. Nimmt man nun an, daſs $\Sigma . m . (P dx + Q dy + R dz)$ ein vollständiges Differenzial und also gleich $d\lambda$ ist, so wird man

$$\Sigma . \int m v dv . \phi'(v) = \text{beständige Gröſse} + \lambda$$

haben; eine Gleichung, welche der Gleichung (r) des 19ten Satzes ähnlich ist, und welche sich in dieselbe verwandelt, wenn man $\phi'(v) = 1$ setzt, wie dies in der Natur der Fall ist. Der Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte hat also in allen zwischen Kraft und Geschwindigkeit mathematisch möglichen Gesetzen Statt, wofern man nur durch lebendige Kraft eines Körpers das Product seiner Masse und des doppelten Integrals seiner Geschwindigkeit, welche durch das Differenzial der Function der Geschwindigkeit, welche die Kraft ausdrückt, multiplicirt worden ist, versteht.

Setzt man in der Gleichung (s) $\delta x' = \delta x + \delta x_,'$; $\delta y' = \delta y + \delta y_,'$; $\delta z' = \delta z + \delta z_,'$; $\delta x'' = \delta x + \delta x_,''$ etc., so erhält man, wenn man die Koefficienten von δx, δy, δz einzeln gleich Null setzt,

$$o = \Sigma . m . \left[d . \left(\frac{dx}{dt} . \frac{\phi(v)}{v} \right) - P\,dt \right]; \quad o = \Sigma . m . \left[d . \left(\frac{dy}{dt} . \frac{\phi(v)}{v} \right) - Q\,dt \right]$$

$$o = \Sigma . m . \left[d . \left(\frac{dz}{dt} . \frac{\phi(v)}{v} \right) - R\,dt \right].$$

Diese drey Gleichungen sind denen des 20sten Satzes ähnlich, aus welchen wir die Erhaltung der Bewegung des Mittelpunkts der Schwere für den Fall, der in der Natur Statt hat, geschlossen haben, wenn das System keinen andern Kräften, als denen der Wirkung und gegenseitigen Anziehung der Körper des Systems unterworfen ist. In diesem Fall sind $\Sigma . mP$, $\Sigma . mQ$, $\Sigma . mR$ gleich Null und man hat

$$\text{Best. Gr.} = \Sigma . m . \frac{dx}{dt} . \frac{\phi(v)}{v}; \quad \text{best. Gr.} = \Sigma . m . \frac{dy}{dt} . \frac{\phi(v)}{v}; \quad \text{best. Gr.} = \Sigma . m . \frac{dz}{dt} . \frac{\phi(v)}{v}.$$

Nun ist $m . \frac{dx}{dt} . \frac{\phi(v)}{v}$ gleich $m . \phi(v) . \frac{dx}{ds}$, und diese letztere Gröſse ist die Endkraft (force finie) des Körpers, parallel mit der Axe der x zerlegt, weil die Kraft eines Körpers dem Product seiner Masse in die Function der Geschwindigkeit, welche die bewegende Kraft ausdrückt, gleich ist. Folglich ist die Summe der parallel mit einer der Axen zerlegten Endkräfte eine beständige Gröſse, was auch immer das Verhältniſs der Kraft zur Geschwindigkeit ist, und der Zustand der Bewegung ist vom Zustand der Ruhe dadurch unterschieden, daſs im letztern diese Summe gleich Null ist. Diese Resultate sind allen zwischen Kraft und Geschwindigkeit mathematisch möglichen Gesetzen gemein; der Schwerpunkt bewegt sich aber nur beym Gesetz der Natur in gerader Linie und gleichförmig.

Wir wollen noch in der Gleichung (s)

$$\delta x' = \frac{y' . \delta x}{y} + \delta x_,'; \quad \delta x'' = \frac{y'' . \delta x}{y} + \delta x_,'' \text{ etc.}$$

$$\delta y = \frac{-x . \delta x}{y} + \delta y_,; \quad \delta y' = \frac{-x' . \delta x}{y} + \delta y_,' \text{ etc.}$$

setzen, so wird die Variation δx in den Variationen der gegenseitigen Abstände f, f' etc. der Körper des Systems und der Kräfte, welche von diesen Gröſsen

abhängen, verschwinden. Ist das System von äufsern Hindernissen frey, so erhält man, indem man den Koeffizienten von δx gleich Null setzt,

$$o = \Sigma . m . \left[x . d . \left(\frac{dy}{dt} . \frac{\phi(v)}{v} \right) - y . d \left(\frac{dx}{dt} . \frac{\phi(v)}{v} \right) \right] + \Sigma . m . (Py - Qx) . dt .$$

Hieraus erhält man durch Integriren

$$c = \Sigma . m . \left(\frac{xdy - ydx}{dt} \right) . \frac{\phi(v)}{v} + \Sigma . \int m . (Py - Qx) . dt .$$

Auf eine ähnliche Art erhält man

$$c' = \Sigma . m . \left(\frac{xdz - zdx}{dt} \right) . \frac{\phi(v)}{v} + \Sigma . \int m . (Pz - Rx) . dt ;$$

$$c'' = \Sigma . m . \left(\frac{ydz - zdy}{dt} \right) . \frac{\phi(v)}{v} + \Sigma . \int m . (Qz - Ry) . dt ;$$

wo c, c', c'' willkührliche beständige Gröfsen sind.

Ist das System nur der gegenseitigen Wirkung seiner Theile unterworfen, so hat man nach dem 21sten Satz $\Sigma . m . (Py - Qx) = o$; $\Sigma . m . (Pz - Rx) = o$; $\Sigma . m . (Qz - Ry) = o$; aufserdem ist $m \left(x . \frac{dy}{dt} - y . \frac{dx}{dt} \right) . \frac{\phi(v)}{v}$ das Moment der endlichen Kraft des Körpers m, parallel mit der Ebene der x und y zerlegt, mit welcher er das System um die Axe der z zu drehen strebt; das endliche Integral $\Sigma . m . \left(\frac{xdy - ydx}{dt} \right) . \frac{\phi(v)}{v}$ ist also die Summe der Momente aller endlichen Kräfte der Körper des Systems, welche es um die nämliche Axe zu drehen streben; diese Summe ist also eine beständige Gröfse. Sie ist im Zustande des Gleichgewichts gleich Null; folglich findet hier der nämliche Unterschied zwischen den beiden Zuständen Statt, welcher vorher für die Summe der mit irgend einer Axe parallelen Kräfte Statt fand. Diese Eigenschaft zeigt im Gesetz der Natur an, dafs die Summe der um einen festen Punkt von den Projectionen der Radius vectors beschriebenen Winkelflächen, in gleichen Zeiten immer dieselbe ist; aber diese Gleichheit der beschriebenen Winkelflächen hat in andern Gesetzen nicht Statt.

Wenn man die Function $\Sigma . \int m . \phi(v) . ds$ in Beziehung auf die Charakteristik δ differenziirt, so wird man

$$\delta . \Sigma . \int m . \phi(v) . ds = \Sigma . \int m . \phi(v) . \delta ds + \Sigma . \int m . \delta v . \phi'(v) . ds$$

erhalten; man hat aber

δds

$$\delta\, ds = \frac{dx.\delta dx + dy.\delta dy + dz.\delta dz}{ds} = \frac{1}{v}.\left(\frac{dx}{dt}.d.\delta x + \frac{dy}{dt}.d.\delta y + \frac{dz}{dt}.d.\delta z\right);$$

hieraus erhält man, wenn man theilweise integrirt,

$$\delta.\Sigma.\int m.\phi(v).ds = \Sigma.\frac{m\phi(v)}{v}.\left(\frac{dx}{dt}.\delta x + \frac{dy}{dt}.\delta y + \frac{dz}{dt}.\delta z\right)$$

$$-\Sigma.\int m.\left[\delta x.d.\left(\frac{dx}{dt}.\frac{\phi(v)}{v}\right) + \delta y.d.\left(\frac{dy}{dt}.\frac{\phi(v)}{v}\right) + \delta z.d.\left(\frac{dz}{dt}.\frac{\phi(v)}{v}\right)\right]$$

$$+\Sigma.\int m.\delta v.\phi'(v).ds.$$

Nimmt man nun die äufsersten Punkte der von den Körpern des Systems beschriebenen krummen Linien als unveränderlich an, so verschwindet das Glied aufserhalb des Zeichens $\int$ in dieser Gleichung; man wird also vermöge der Gleichung (s)

$$\delta.\Sigma.\int m.\phi(v).ds = \Sigma.\int m.\delta v.\phi'(v).ds - \Sigma.\int m\, dt.(P\delta x + Q\delta y + R\delta z)$$

haben. Differenziirt man aber die Gleichung (T) in Beziehung auf δ, so erhält man

$$\Sigma.\int m.\delta v.\phi'(v).ds = \Sigma.\int m\, dt.(P\delta x + Q\delta y + R\delta z);$$

man hat also

$$0 = \delta.\Sigma.\int m.\phi(v).\delta s.$$

Diese Gleichung entspricht dem im Gesetz der Natur Statt habenden Grundsatz der kleinsten Wirkung. Da $m.\phi(v)$ die ganze Kraft des Körpers m ist, so läfst sich dieser Grundsatz allgemein so ausdrücken: die Summe der Integrale der endlichen Kräfte der Körper des Systems, jede Kraft mit dem Element seiner Richtung multiplicirt, ist ein Kleinstes. Auf diese Art dargestellt, erstreckt er sich auf alle zwischen Kraft und Geschwindigkeit mathematisch mögliche Gesetze. Im Zustand des Gleichgewichts ist vermöge des Grundsatzes der virtuellen Kräfte die Summe der mit den Elementen ihrer Richtungen multiplicirten Kräfte gleich Null. Der Unterschied zwischen dem Zustand der Ruhe und der Bewegung besteht also in dieser Rücksicht darinn, dafs dieselbe Differenzialfunction, welche im Zustand der Ruhe gleich Null ist, im Zustand der Bewegung, wenn man sie integrirt, ein Kleinstes wird.

Siebentes Kapitel.

Von den Bewegungen eines festen Körpers von jeder Gestalt.

25. Die Differenzialgleichungen für die Bewegungen der Fortschreitung und der Umdrehung eines festen Körpers können sehr leicht aus denjenigen hergeleitet werden, welche wir im 5ten Kapitel entwickelt haben; sie sind aber in der Theorie des Weltsystems so wichtig, daſs wir sie umständlich entwickeln wollen.

Wir wollen uns vorstellen, daſs auf alle Theile eines festen Körpers gegebene willkührliche Kräfte wirken. Man nenne x, y, z die senkrechten Koordinaten seines Schwerpunkts; $x + x'$, $y + y'$, $z + z'$ die Koordinaten irgend eines Theilchens dm des Körpers, so daſs x', y', z' die Koordinaten dieses Theilchens in Beziehung auf den Schwerpunkt des Körpers sind. Es sollen überdies P, Q, R die Kräfte seyn, welche auf das Theilchen parallel mit den Axen der x, der y und der z wirken. Nimmt man das Differenzial der Zeit dt als beständig an, so werden die Kräfte, welche in jedem Augenblick in dem Theilchen dm parallel mit diesen Axen zerstöhrt werden, nach dem 18ten Satz folgende seyn:

$$-\left(\frac{d^2x + d^2x'}{dt}\right) . dm + P . dt . dm ;$$

$$-\left(\frac{d^2y + d^2y'}{dt}\right) . dm + Q . dt . dm ;$$

$$-\left(\frac{d^2z + d^2z'}{dt}\right) . dm + R . dt . dm .$$

Es müssen also alle Theilchen, auf welche ähnliche Kräfte wirken, sich gegenseitig im Gleichgewicht halten. Hierzu wird, wie wir im 15ten Satz gesehen haben, erfordert, daſs die Summe der mit einer Axe parallelen Kräfte gleich Null ist;

dieses giebt die folgenden drey Gleichungen:

$$S \cdot \left(\frac{d^2x + d^2x'}{dt^2}\right) \cdot dm = S \cdot P\,dm;$$

$$S \cdot \left(\frac{d^2y + d^2y'}{dt^2}\right) \cdot dm = S \cdot Q\,dm;$$

$$S \cdot \left(\frac{d^2z + d^2z'}{dt^2}\right) \cdot dm = S \cdot R\,dm,$$

wo der Buchstabe S ein Integralzeichen in Beziehung auf das Theilchen dm ist, und auf die ganze Masse des Körpers erstreckt werden muſs. Da die veränderlichen Gröſsen x, y, z für alle Theilchen dieselben sind, so kann man sie auſserhalb des Zeichens S setzen; bezeichnet man also mit m die Masse des Körpers, so erhält man

$$S \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \cdot dm = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}; \quad S \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \cdot dm = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}; \quad S \cdot \frac{d^2z}{dt^2} \cdot dm = m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Man hat noch überdies durch die Natur des Schwerpunkts

$$S \cdot x' \cdot dm = 0; \quad S \cdot y' \cdot dm = 0; \quad S \cdot z' \cdot dm = 0;$$

folglich

$$S \cdot \frac{d^2x'}{dt^2} \cdot dm = 0; \quad S \cdot \frac{d^2y'}{dt^2} \cdot dm = 0; \quad S \cdot \frac{d^2z'}{dt^2} \cdot dm = 0;$$

man erhält also

$$\left.\begin{array}{l} m \cdot \dfrac{d^2x}{dt^2} = S \cdot P\,dm \\ m \cdot \dfrac{d^2y}{dt^2} = S \cdot Q\,dm \\ m \cdot \dfrac{d^2z}{dt^2} = S \cdot R\,dm \end{array}\right\} \ldots (A).$$

Diese drey Gleichungen bestimmen die Bewegung des Schwerpunkts des Körpers; sie entsprechen den Gleichungen, welche im 20sten Satz für die Bewegung des Schwerpunkts eines Systems von Körpern gegeben worden sind.

Man hat im 15ten Satz gesehen, daſs zum Gleichgewicht eines festen Körpers erfordert wird, daſs die Summe der mit der Axe der x parallelen Kräfte, jede mit ihrem Abstand von der Axe der z multiplicirt, weniger der Summe der mit der Axe der y parallelen Kräfte, jede mit ihrem Abstand von der Axe der z multiplicirt, gleich Null ist; man wird also

$$S \, . \left[(x + x') \, . \left(\frac{d^2y + d^2y'}{dt^2} \right) - (y + y') \, . \left(\frac{d^2x + d^2x'}{dt^2} \right) \right] . \, dm$$
$$= S \, . \, [(x + x') \, . \, Q - (y + y') \, . \, P] \, . \, dm \; . \, . \, . \quad (1)$$

haben: nun hat man

$$S \, . \, (x \, . \, d^2y - y \, . \, d^2x) \, . \, dm = m \, . \, (xd^2y - yd^2x);$$

auf eine ähnliche Art erhält man

$$S \, . \, (Qx - Py) \, . \, dm = x \, . \, S \, . \, Qdm - y \, . \, S \, . \, Pdm;$$

man hat endlich

$$S \, . \, (x'd^2y + xd^2y' - y'd^2x - yd^2x') \, . \, dm = d^2y \, . \, S \, . \, x'dm - d^2x \, . \, S \, . \, y'dm$$
$$+ \, x \, . \, S \, . \, d^2y' \, . \, dm - y \, . \, S \, . \, d^2x' \, . \, dm;$$

und durch die Natur des Schwerpunkts ist jedes Glied des zweyten Theils dieser Gleichung gleich Null; die Gleichung (1) wird also vermöge der Gleichungen (A) sich in folgende verwandeln:

$$S \, . \left(\frac{x'd^2y' - y'd^2x'}{dt^2} \right) . \, dm = S \, . \, (Qx' - Py') \, . \, dm \, .$$

Integrirt man diese Gleichung in Beziehung auf die Zeit t, so erhält man

$$S \, . \left(\frac{x'dy' - y'dx'}{dt} \right) . \, dm = S \, . \int (Qx' - Py') \, . \, dt \, . \, dm \, ,$$

wo das Integralzeichen $\int$ sich auf die Zeit t bezieht. Hieraus kann man leicht schliefsen, dafs man, wenn man

$$S \, . \int (Qx' - Py') \, . \, dt \, . \, dm = N;$$
$$S \, . \int (Rx' - Pz') \, . \, dt \, . \, dm = N';$$
$$S \, . \int (Ry' - Qz') \, . \, dt \, . \, dm = N''$$

setzt, die folgenden drey Gleichungen erhält:

$$\left. \begin{aligned} S \, . \left(\frac{x'dy' - y'dx'}{dt} \right) . \, dm &= N \\ S \, . \left(\frac{x'dz' - z'dx'}{dt} \right) . \, dm &= N' \\ S \, . \left(\frac{y'dz' - z'dy'}{dt} \right) . \, dm &= N'' \end{aligned} \right\} \; . \, . \, . \quad (B)$$

Diese drey Gleichungen enthalten den Grundsatz der Erhaltung der Flächen, und sie reichen zu, um die Umdrehungsbewegung des Körpers um seinen Schwerpunkt zu bestimmen. Vereinigt man sie mit den Gleichungen (A), so bestim-

men sie vollkommen die Bewegungen der Fortschreitung und der Umdrehung des Körpers.

Ist der Körper genöthigt, sich um einen festen Punkt zu drehen, so folgt aus dem 15ten Satz, daſs die Gleichungen (B) hierzu zureichen; man muſs aber alsdann diesen Punkt für den Anfangspunkt der Koordinaten x', y', z' annehmen.

26. Wir wollen nun diese Gleichungen besonders in der Voraussetzung betrachten, daſs dieser Anfangspunkt in irgend einem Punkt, er sey der Schwerpunkt oder nicht, unveränderlich ist. Wir wollen die Lage jedes Theilchens auf drey auf einander senkrechte Axen beziehen, welche im Körper unveränderlich, im Raum aber beweglich sind. Es sey θ die Neigung der Ebene der beiden ersten Axen mit der Ebene der x und der y; es sey ϕ der Winkel, welchen die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen mit der ersten Axe macht; es sey endlich ψ der Winkel, welchen die Axe der x mit der auf die Ebene der x und y projicirten dritten Axe bildet. Wir werden diese drey neuen Axen Hauptaxen und x'', y'', z'' die drey Koordinaten des Theilchens dm in Beziehung auf diese Axen nennen; man wird also nach dem 21sten Satz folgende Gleichungen haben:

$$x' = x'' . (\cos\theta . \sin\psi . \sin\phi + \cos\psi . \cos\phi)$$
$$+ y'' . (\cos\theta . \sin\psi . \cos\phi - \cos\psi . \sin\phi) + z'' . \sin\theta . \sin\psi;$$
$$y' = x'' . (\cos\theta . \cos\psi . \sin\phi - \sin\psi . \cos\phi)$$
$$+ y'' . (\cos\theta . \cos\psi . \cos\phi + \sin\psi . \sin\phi) + z'' . \sin\theta . \cos\psi;$$
$$z' = z'' . \cos\theta - y'' . \sin\theta . \cos\phi - x'' . \sin\theta . \sin\phi .$$

Man wird vermittelst dieser Gleichungen die ersten Theile der Gleichungen (B) in Functionen von θ, ψ und ϕ und ihrer Differenzialen ausdrücken. Die Rechnung wird aber sehr beträchtlich abgekürzt, wenn man bemerkt, daſs die Lage der drey Hauptaxen von drey willkührlichen Gröſsen abhängt, welche man so bestimmen kann, daſs sie den drey folgenden Gleichungen Genüge thun:

$$S . x'' y'' . dm = 0; \quad S . x'' z'' . dm = 0; \quad S . y'' z'' . dm = 0 .$$

Es sey alsdann

$$S . (y''^2 + z''^2) . dm = A; \quad S . (x''^2 + z''^2) . dm = B; \quad S . (x''^2 + y''^2) . dm = C,$$

und man setze der Kürze wegen

$$d\phi - d\psi . \cos\theta = p\,dt;$$
$$d\psi . \sin\theta . \sin\phi - d\theta . \cos\phi = q\,dt;$$
$$d\psi . \sin\theta . \cos\phi + d\theta . \sin\phi = r\,dt.$$

Dann werden nach allen Reductionen die Gleichungen (B) sich in folgende drey verwandeln [66]):

$$\left.\begin{array}{l} Aq \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\Phi + Br \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\Phi - Cp \,.\, \cos\theta = -N; \\ \cos\psi \,.\, (Aq \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\Phi + Br \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\Phi + Cp \,.\, \sin\theta) \\ \qquad + \sin\psi \,.\, (Br \,.\, \sin\Phi - Aq \,.\, \cos\Phi) = -N'; \\ \cos\psi \,.\, (Br \,.\, \sin\Phi - Aq \,.\, \cos\Phi) \\ - \sin\psi \,.\, (Aq \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\Phi + Br \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\Phi + Cp \,.\, \sin\theta) = -N''; \end{array}\right\} \ldots (C)$$

66) Man kann aus der zweyten der Gleichungen (C) sehr leicht die dritte herleiten. Denn es sey $x'' \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\varphi + y'' \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\varphi + z'' \,.\, \sin\theta = A'$ und $x'' \,.\, \cos\varphi - y'' \,.\, \sin\varphi = B'$, so ist $x' = A' \,.\, \sin\psi + B' \,.\, \cos\psi$ und $y' = A' \,.\, \cos\psi - B' \,.\, \sin\psi$; man erhält also y' aus x', wenn man ψ in $90^\circ + \psi$ verwandelt. Durch dieselbe Verwandlung erhält man $y'dz' - z'dy'$ aus $x'dz' - z'dx'$ und also auch N'' aus N'; oder die dritte Gleichung aus der zweyten, wenn man ψ in $90^\circ + \psi$ verwandelt, wodurch sich p, q, r nicht ändern.

Wir wollen nun für die erste dieser Gleichungen die Rechnung vollständig geben. Man hat

$$dx' = dA' \,.\, \sin\psi + dB' \,.\, \cos\psi + d\psi \,.\, (A' \,.\, \cos\psi - B' \,.\, \sin\psi)$$
$$dy' = dA' \,.\, \cos\psi - dB' \,.\, \cos\psi - d\psi \,.\, (A' \,.\, \sin\psi + B' \,.\, \cos\psi),$$

und folglich $x'dy' - y'dx' = B' \,.\, dA' - A' \,.\, dB' - d\psi \,.\, (A'A' + B'B')$.

Nun ist $dA' = (x'' \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\varphi - y'' \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\varphi) \,.\, d\varphi + (-x'' \,.\, \sin\varphi \,.\, \sin\theta - y'' \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\theta + z'' \,.\, \cos\theta) \,.\, d\theta$

$- dB' = + (x'' \,.\, \sin\varphi + y'' \,.\, \cos\varphi) \,.\, d\varphi$.

Bey der Substitution dieser Werthe, um die Gröſsen BdA, AdB, AA und BB zu erhalten, muſs man alle Glieder, welche die Producte $x''y''$, $x''z''$, $z''y''$ enthalten, weglassen. Denn diese Glieder müssen, um N zu erhalten, mit dm multiplicirt, und in Beziehung auf S integrirt werden. Nun ist aber angenommen worden, daſs $S \,.\, x''y'' \,.\, dm$, $S \,.\, x''z'' \,.\, dm$, $S \,.\, z''y'' \,.\, dm$ gleich Null sind; die Glieder, welche diese Gröſsen enthalten, verschwinden daher aus dem Werth von N. Durch diese Bemerkung erhält man

$$A'A' = x''^2 \,.\, \cos\theta^2 \,.\, \sin\varphi^2 + y''^2 \,.\, \cos\theta^2 \,.\, \cos\varphi^2 + z''^2 \,.\, \sin\theta^2.$$
$$B'B' = x''^2 \,.\, \cos\varphi^2 + y''^2 \,.\, \sin\varphi^2.$$

Man multiplicire die Glieder $y''^2 \,.\, \sin\varphi^2$, $x''^2 \,.\, \cos\varphi^2$ mit $\sin\theta^2 + \cos\theta^2$ und $z'' \,.\, \sin\theta^2$ mit $\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2$, wodurch ihr Werth nicht geändert wird, so erhält man

$$A'A' + B'B' = (x''^2 + y''^2) \cos\theta^2 + (x''^2 + z''^2) \cos\varphi^2 \,.\, \sin\theta^2 + (y''^2 + z''^2) \sin\varphi^2 \,.\, \sin\theta^2.$$

Dies ist der Koefficient des Differenzials $d\psi$. Auf eben diese Art erhält man

$$- A'dB' = (x''^2 \,.\, \sin\varphi^2 \,.\, \cos\theta + y''^2 \,.\, \cos\varphi^2 \,.\, \cos\theta) \,.\, d\varphi.$$

$$B'dA' = (x''^2 \,.\, \cos\varphi^2 \,.\, \cos\theta + y''^2 \,.\, \sin\varphi^2 \,.\, \cos\theta) \,.\, d\varphi + (-x''^2 \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\theta + y''^2 \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\theta) \,.\, d\theta$$

und also $B'dA' - A'dB' = (x''^2 + y''^2) \cos\theta \,.\, d\varphi + (y''^2 - x''^2) \sin\varphi \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\theta \,.\, d\theta$.

Nun ist $y''^2 - x''^2 = (y''^2 + z''^2) - (x''^2 + z''^2)$; folglich

$$B'dA' - A'dB' = (x''^2 + y''^2) \cos\theta \,.\, d\varphi + [(y''^2 + z''^2) - (x''^2 + z''^2)] \sin\varphi \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\theta \,.\, d\theta.$$

Substituirt man die für $AA + BB$ und $BdA - AdB$ gefundenen Werthe, so erhält man

$$x'dy' - y'dx' = (x''^2 + y''^2)\,(-\cos\theta^2 \,.\, d\psi + \cos\theta \,.\, d\varphi)$$
$$- (x''^2 + z''^2)(+\cos\varphi^2 \,.\, \sin\theta^2 \,.\, d\psi + \sin\varphi \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\theta \,.\, d\theta) + (y''^2 + z''^2) \,.\, (-\sin\varphi^2 \,.\, \sin\theta^2 \,.\, d\psi + \sin\varphi \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\theta \,.\, d\theta).$$

Differenziirt man diese drey Gleichungen, und setzt nach den Differenziationen $\psi = 0$, welches eben so viel ist, als ob man die Axe der x' unendlich nahe bey der Durchschnittslinie der Ebene der x' und y' mit der Ebene der x'' und y'' nimmt, so erhält man

$$d\theta \,.\, \cos\theta \,.\, (Br \,.\, \cos\phi + Aq \,.\, \sin\phi) + \sin\theta \,.\, d \,.\, (Br \,.\, \cos\phi + Aq \,.\, \sin\phi) \\ - d \,.\, (Cp \,.\, \cos\theta) = - dN;$$

$$d\psi \,.\, (Br \,.\, \sin\phi - Aq \,.\, \cos\phi) - d\theta \,.\, \sin\theta \,.\, (Br \,.\, \cos\phi + Aq \,.\, \sin\phi) \\ + \cos\theta \,.\, d \,.\, (Br \,.\, \cos\phi + Aq \,.\, \sin\phi) + d \,.\, (Cp \,.\, \sin\theta) = - dN';$$

$$d \,.\, (Br \,.\, \sin\phi - Aq \,.\, \cos\phi) - d\psi \,.\, \cos\theta \,.\, (Br \,.\, \cos\phi + Aq \,.\, \sin\phi) \\ - Cp\, d\psi \,.\, \sin\theta = - dN''.$$

Setzt man nun

$$Cp = p'; \qquad Aq = q'; \qquad Br = r',$$

so geben diese drey Differenzialgleichungen folgende drey [67]):

$$\left.\begin{aligned} dp' + \frac{(B-A)}{AB} \,.\, q'r' \,.\, dt &= dN \,.\, \cos\theta - dN' \,.\, \sin\theta; \\ dq' + \frac{(C-B)}{CB} \,.\, r'p' \,.\, dt &= - (dN \,.\, \sin\theta + dN' \,.\, \cos\theta) \,.\, \sin\phi \\ &\qquad + dN'' \,.\, \cos\phi; \\ dr' + \frac{(A-C)}{AC} \,.\, p'q' \,.\, dt &= - (dN \,.\, \sin\theta + dN' \,.\, \cos\theta) \,.\, \cos\phi \\ &\qquad - dN'' \,.\, \sin\phi. \end{aligned}\right\} \ldots \text{(D)}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{dm}{dt}$ und integrirt man in Beziehung auf S, so erhält man, wenn man im zweyten Theile statt $S \,.\, (x''^2 + y''^2) \,.\, dm$, $S \,.\, (x''^2 + z''^2) \,.\, dm$, $S \,.\, (y''^2 + z''^2) \,.\, dm$ ihre Werthe C, B, A substituirt:

$$N = C \,.\, \cos\theta \,.\, \left(\frac{d\varphi - d\psi \,.\, \cos\theta}{dt}\right) - B \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\varphi \left(\frac{d\psi . \sin\theta . \cos\varphi + d\theta . \sin\varphi}{dt}\right) + A \,.\, \sin\theta . \sin\varphi . \left(\frac{-d\psi . \sin\varphi \sin\theta + d\theta . \cos\varphi}{dt}\right)$$

oder $N = C \,.\, \cos\theta \,.\, p - B \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\varphi \,.\, r - A \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\varphi \,.\, q$.

Man erhält auf eben diese Art die zweyte der Gleichungen (C) und aus dieser vermöge der oben gegebenen Bemerkung die dritte.

67) Man multiplicire die erste der gegebenen Gleichungen mit $-\cos\theta$, die zweyte mit $\sin\theta$, so erhält man

$$+ dN . \cos\theta = - d\theta . \cos\theta^2 (r' . \cos\varphi + q' . \sin\varphi) - \sin\theta . \cos\theta . d . (r' . \cos\varphi + q' . \sin\varphi) + \cos\theta . d . (p' . \cos\theta)$$

$$- dN' . \sin\theta = - d\theta . \sin\theta^2 (r' . \cos\varphi + q' . \sin\varphi) + \sin\theta . \cos\theta . d . (r' . \cos\varphi + q' . \sin\varphi) + \sin\theta . d . (p' . \sin\theta) \\ + d\psi \,.\, \sin\theta \,(r' \,.\, \sin\varphi - q' \,.\, \cos\varphi).$$

Die Summe beider Gleichungen, nämlich $dN \,.\, \cos\theta - dN' \,.\, \sin\theta$, ist gleich

$$- d\theta . (r' . \cos\varphi + q' . \sin\varphi) + \sin\theta . d . (p' . \sin\theta) + \cos\theta . d\, (p' . \cos\theta) + d\psi . \sin\theta . (r' . \sin\varphi - q' . \cos\varphi) \ldots (\gamma).$$

Verwandelt man in der ersten Gleichung $\cos\theta$ in $-\sin\theta$, und in der zweyten $\sin\theta$ in $\cos\theta$, so erhält man

Diese Gleichungen sind sehr bequem, um die Umdrehungsbewegung eines Körpers zu bestimmen, wenn er sich sehr nahe um eine der Hauptaxen dreht, welches der Fall der himmlischen Körper ist.

27.

$$-(dN \,.\, \sin\theta + dN' \,.\, \cos\theta) =$$
$$d\,.\,(r'.\cos\varphi + q'.\sin\varphi) - \sin\theta\,.\,d\,(p'.\cos\theta) + \cos\theta\,.\,d\,.\,(p'.\sin\theta) + d\psi\,.\cos\theta\,(r'.\sin\varphi - q'.\cos\varphi).$$

Sammlet man im zweyten Theil der Gleichung (γ) die Glieder, welche den gemeinschaftlichen Factor r' haben, so erhält man $r'(-d\theta\,.\cos\varphi + d\psi\,.\sin\theta.\sin\varphi)$, welcher Ausdruck gleich $r'q\,dt$ oder gleich $\frac{r'q'dt}{A}$ ist. Eben so sind die in q' multiplicirten Glieder gleich $q'(-d\theta\,.\sin\varphi - d\psi\,.\sin\theta\,.\cos\varphi)$, welcher Ausdruck gleich $-q'r\,dt$ oder gleich $\frac{-q'r'dt}{B}$ ist. Man hat ferner

$\sin\theta\,.\,d\,(p'.\sin\theta) + \cos\theta\,.\,d\,(p'.\cos\theta) = dp'.(\sin\theta^2 + \cos\theta^2) = dp'$. Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (γ), so erhält man

$$dN'.\cos\theta - dN'.\sin\theta = dp' + r'q'dt\,.\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right) = dp' + r'q'dt\,.\left(\frac{B-A}{AB}\right),$$

welches die erste der Gleichungen (D) ist.

Man setze ferner der Kürze halber $-(dN.\sin\theta + dN'.\cos\theta) = P$; dann ist vermöge der vorhergehenden für P und für dN'' gegebenen Gleichungen

$$P.\sin\varphi = \sin\varphi\,.\,d\,(r'.\cos\varphi + q'.\sin\varphi) + p'\,.\,d\theta\,.\sin\varphi + d\psi\,.\cos\theta\,.\sin\varphi\,(r'.\sin\varphi - q'.\cos\varphi);$$
$$dN''.\cos\varphi = -\cos\varphi.d(r'.\sin\varphi - q'.\cos\varphi) + d\psi\,.\cos\varphi.\cos\theta\,(r'.\cos\varphi + q'.\sin\varphi) + p'.\cos\varphi.\sin\theta.d\psi.$$

Nun ist $\sin\varphi\,.\,d\,(r'.\cos\varphi + q'.\sin\varphi) - \cos\varphi\,.\,d\,(r'.\sin\varphi - q'.\cos\varphi) = -r'd\varphi + dq'$;
ferner $d\psi.\cos\theta\,.\sin\varphi\,(r'.\sin\varphi - q'.\cos\varphi) + d\psi.\cos\varphi.\cos\theta\,(r'.\cos\varphi + q'.\sin\varphi) = d\psi\,.r'.\cos\theta$.
Dadurch erhält man

$$P\sin\varphi + dN''.\cos\varphi = -r'.d\varphi + dq' + p'.d\theta.\sin\varphi + d\psi\,(r'.\cos\theta + p'.\cos\varphi.\sin\theta)\;\ldots\;(\alpha).$$

Eben so:

$$P\cos\varphi - dN''.\sin\varphi = dr' + q'd\varphi + p'd\theta.\cos\varphi - d\psi\,(q'.\cos\theta + p'.\sin\varphi.\sin\theta)\;\ldots\;(\beta).$$

Nun ist $-r'd\varphi + d\psi\,.\,r'.\cos\theta = -r'(d\varphi - d\psi.\cos\theta) = -r'.p.dt = \frac{-r'.p'.dt}{C}$,

und $p'd\theta.\sin\varphi + p'.d\psi.\cos\varphi.\sin\theta = p'.(d\theta.\sin\varphi + d\psi.\cos\varphi.\sin\theta) = p'r.dt = \frac{p'.r'.dt}{B}$.

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (α), so erhält man

$$P\sin\varphi + dN''.\cos\varphi = dq' + p'r'dt\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right) = dq' + p'r'dt\,.\left(\frac{C-B}{BC}\right).$$

Eben so ist $q'd\varphi - d\psi\,.\,q'.\cos\theta = q'p\,dt = \frac{q'p'dt}{C}$;

und $p'd\theta.\cos\varphi - p'.d\psi\,\sin\varphi.\sin\theta = -p'q\,dt = \frac{-p'q'.dt}{A}$;

dadurch verwandelt sich die Gleichung (β) in folgende:

$$P\cos\varphi - dN''.\sin\varphi = dr' + q'p'dt\,.\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right) = dr' + q'p'dt\,.\left(\frac{A-C}{AC}\right).$$

27. Die drey Hauptaxen, auf welche wir die Winkel θ, ψ und ϕ bezogen haben, verdienen eine besondere Aufmerksamkeit; wir wollen ihre Lage für jeden festen Körper bestimmen. Die Werthe von x', y', z' im vorhergehenden Satz geben nach Satz 21. die folgenden:

$$x'' = x' . (\cos\theta . \sin\psi . \sin\phi + \cos\psi . \cos\phi)$$
$$+ y' . (\cos\theta . \cos\psi . \sin\phi - \sin\psi . \cos\phi) - z' . \sin\theta . \sin\phi;$$
$$y'' = x' . (\cos\theta . \sin\psi . \cos\phi - \cos\psi . \sin\phi)$$
$$+ y' . (\cos\theta . \cos\psi . \cos\phi + \sin\psi . \sin\phi) - z' . \sin\theta . \cos\phi;$$
$$z'' = x' . \sin\theta . \sin\psi + y' . \sin\theta . \cos\psi + z' . \cos\theta .$$

Hieraus erhält man [68])

$$x'' . \cos\phi - y'' . \sin\phi = x' . \cos\psi - y' . \sin\psi;$$
$$x'' . \sin\phi + y'' . \cos\phi = x' . \cos\theta . \sin\psi + y' . \cos\theta . \cos\psi - z' . \sin\theta .$$

Es sey

$$S . x'^2 . dm = a^2; \quad S . y'^2 . dm = b^2; \quad S . z'^2 . dm = c^2;$$
$$S . x'y' . dm = f; \quad S . x'z' . dm = g; \quad S . y'z' . dm = h;$$

so wird man folgende Gleichungen haben [69]):

$$\cos\phi . S . x''z'' . dm - \sin\phi . S . y''z'' . dm = (a^2 - b^2) . \sin\theta . \sin\psi . \cos\psi$$
$$+ f . \sin\theta . (\cos\psi^2 - \sin\psi^2) + \cos\theta . (g . \cos\psi - h . \sin\psi);$$
$$\sin\phi . S . x''z'' . dm + \cos\phi . S . y''z'' . dm$$
$$= \sin\theta . \cos\theta . (a^2 . \sin\psi^2 + b^2 . \cos\psi^2 - c^2 + 2f . \sin\psi . \cos\psi)$$
$$+ (\cos\theta^2 - \sin\theta^2) . (g . \sin\psi + h . \cos\psi) .$$

Setzt man die zweyten Theile dieser beiden Gleichungen gleich Null, so erhält man

68) Wir haben die folgenden zwey Gleichungen schon in der 61sten Anmerkung gefunden; man sehe die 10te und 12te der daselbst gegebenen Gleichungen.

69) Multiplicirt man den ersten Theil der Gleichung $x'' . \cos\varphi - y'' . \sin\varphi = x' . \cos\psi - y' . \sin\psi$ mit z'', den zweyten Theil mit dem Werth von z'', so erhält man

$$x''z'' . \cos\varphi - y''z'' . \sin\varphi = (x' . \cos\psi - y' . \sin\psi)(x' . \sin\theta . \sin\psi + y' . \sin\theta . \cos\psi + z' . \cos\theta).$$

Entwickelt man das Product im zweyten Theil dieser Gleichung, so findet man

$$(x'^2 - y'^2)\cos\psi . \sin\psi . \sin\theta + x'y' . \sin\theta(\cos\psi^2 - \sin\psi^2) + x'z' . \cos\psi . \cos\theta - y'z' . \cos\theta . \sin\psi .$$

Multiplicirt man nun die Gleichung mit dm, und integrirt man sie in Beziehung auf S, wobey man statt $S . x'^2\, dm$, $S . y'^2\, dm$ etc., ihre angenommenen Werthe a^2, b^2 etc. setzen muſs, so erhält man unmittelbar die erste der im Text gegebenen Gleichungen. Auf eben diese Art erhält man die zweyte dieser Gleichungen aus der Gleichung

$$x'' . \sin\varphi + y'' . \cos\varphi = x' . \cos\theta . \sin\psi + y' . \cos\theta . \cos\psi - z' . \sin\theta .$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{h \cdot \sin\psi - g \cdot \cos\psi}{(a^2 - b^2) \cdot \sin\psi \cdot \cos\psi + f \cdot (\cos\psi^2 - \sin\psi^2)};$$

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tang} 2\theta = \frac{g \cdot \sin\psi + h \cdot \cos\psi}{c^2 - a^2 \cdot \sin\psi^2 - b^2 \cdot \cos\psi^2 - 2f \cdot \sin\psi \cdot \cos\psi};$$

man hat aber

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tang} 2\theta = \frac{\operatorname{tang}\theta}{1 - \operatorname{tang}\theta^2};$$

setzt man diese beiden Werthe von $\frac{1}{2}$ tang 2θ einander gleich, und substituirt man in der letztern statt tang θ ihren vorhergehenden durch ψ gegebenen Werth, so wird man nach allen Reductionen, wenn man der Kürze wegen tang $\psi = u$ setzt, folgende Gleichung des dritten Grades finden [70]:

$$0 = (gu + h) \cdot (hu - g)^2$$
$$+ [(a^2 - b^2) \cdot u + f(1 - u^2)] \cdot [(hc^2 - ha^2 + fg)u + gb^2 - gc^2 - hf].$$

Da diese Gleichung wenigstens eine reelle Wurzel hat, so sieht man, daſs es immer möglich ist, die beiden folgenden Gröſsen zu gleicher Zeit gleich Null zu machen:

70) Man hat tang θ . cos $\psi = \dfrac{hu - g}{(a^2 - b^2)u + f - fu^2}$, und wenn man statt $\dfrac{c^2}{\cos\psi^2}$ oder $c^2 \cdot \sec\psi^2$ seinen Werth $c^2(1 + u^2)$ setzt

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{tang} 2\theta \cdot \cos\psi = \frac{gu + h}{c^2(1 + u^2) - a^2u^2 - b^2 - 2fu} = \frac{gu + h}{(c^2 - a^2)u^2 - 2fu + c^2 - b^2}.$$

Nun ist $\tfrac{1}{2}\operatorname{tang} 2\theta \cdot \cos\psi = \dfrac{\operatorname{tang}\theta \cdot \cos\psi}{1 - \operatorname{tang}\theta^2} = \dfrac{[\operatorname{tang}\theta \cdot \cos\psi]}{1 - (\operatorname{tang}\theta \cdot \cos\psi)^2 \cdot \sec\psi^2}$

$$= \frac{[\operatorname{tang}\theta \cdot \cos\psi]}{1 - [\operatorname{tang}\theta \cdot \cos\psi]^2 \cdot [1 + u^2]}, \text{ oder}$$

$$0 = [\tfrac{1}{2}\operatorname{tang} 2\theta \cdot \cos\psi] - (1 + u^2)[\operatorname{tang}\theta \cdot \cos\psi]^2 [\tfrac{1}{2}\operatorname{tang} 2\theta \cdot \cos\psi] - [\operatorname{tang}\theta \cdot \cos\psi].$$

Substituirt man statt der in Klammern [] eingeschlossenen Gröſsen ihre vorhergegebenen Werthe, so erhält man, wenn man mit dem Product der beiden Divisoren multiplicirt,

$$0 = (gu + h)[(a^2 - b^2)u + f - fu^2] - \frac{(1 + u^2)[hu - g]^2 \cdot [gu + h]}{(a^2 - b^2)u + f - fu^2} - (hu - g)[(c^2 - a^2)u^2 - 2fu + c^2 - b^2].$$

Das erste Glied des zweyten Theils dieser Gleichung ist gleich $-fgu^3 + (-fh - gb^2 + ga^2)u^2 + (fg + ha^2 - hb^2)u + fh$, und das dritte Glied ist gleich $(-hc^2 + ha^2)u^3 + (c^2g - a^2g + 2fh)u^2 + (hb^2 - hc^2 - 2fg)u + c^2g - b^2g$. Die Summe dieser beiden Glieder ist gleich $(u^2 + 1)[(-fg - hc^2 + ha^2)u + c^2g - gb^2 + fh]$, und die vorhergehende Gleichung wird

$$(u^2 + 1)[(-fg - hc^2 + ha^2)u + c^2g - gb^2 + fh] - \frac{(u^2 + 1)[hu - g]^2 \cdot [gu + h]}{(a^2 - b^2)u + f - fu^2} = 0.$$

Sie ist vom dritten Grade, und hat wenigstens eine reelle Wurzel, da die Anzahl der unmöglichen Wurzeln immer eine gerade Zahl ist.

$$\cos\phi \,.\, S \,.\, x''z'' \,.\, dm - \sin\phi \,.\, S \,.\, y''z'' \,.\, dm\,;$$
$$\sin\phi \,.\, S \,.\, x''z'' \,.\, dm + \cos\phi \,.\, S \,.\, y''z'' \,.\, dm\,;$$

folglich wird auch die Summe ihrer Quadrate $(S\,.\,x''z''\,.\,dm)^2 + (S\,.\,y''z''\,.\,dm)^2$ gleich Null seyn; dieses erfordert, daſs man einzeln hat

$$S\,.\,x''z''\,.\,dm = o\,; \qquad S\,.\,y''z''\,.\,dm = o.$$

Der Werth von u giebt den des Winkels ψ und folglich den der tang θ und des Winkels θ. Es ist also nur noch der Winkel ϕ zu bestimmen; dies wird man vermittelst der Bedingung $S\,.\,x''y''\,.\,dm = o$, welcher noch Genüge geschehen muſs, erhalten. Hierzu bemerken wir, daſs, wenn man in $S\,.\,x''y''\,.\,dm$ statt x'', y'' ihre vorhergehenden Werthe setzt, diese Funktion folgende Gestalt erhalten wird [71]): $H\,.\,\sin 2\phi + L\,.\,\cos 2\phi$, wo H und L Funktionen der Winkel θ und ψ und der beständigen Gröſsen a^2, b^2, c^2, f, g, h sind. Setzt man diesen Ausdruck gleich Null, so erhält man

$$\text{tang } 2\phi = \frac{-L}{H}.$$

Die drey Axen, welche durch die vorhergehenden Werthe von θ, ψ und ϕ bestimmt sind, thun folgenden drey Gleichungen Genüge:

$$S\,.\,x''y''\,.\,dm = o\,; \qquad S\,.\,x''y''\,.\,dm = o\,; \qquad S\,.\,x''z''\,.\,dm = o.$$

Die Gleichung des 3ten Grades für u scheint drey dem vorhergehenden ähnliche Systeme von Hauptaxen anzuzeigen; man muſs aber bemerken, daſs u die Tangente des Winkels ist, welchen die Axe der x' mit der Durchschnittslinie der Ebene der x' und y' und der Ebene der x'' und y'' macht; nun ist es aber klar, daſs man die drey Axen der x'', der y'' und der z'' mit einander verwechseln kann, weil den drey vorhergehenden Gleichungen beständig Genüge geschehen

71) Wir haben schon in einer vorhergehenden Anmerkung bemerkt, daſs wenn man

$$A = x'\,.\,\cos\theta\,.\,\sin\psi + y'\,.\,\cos\theta\,.\,\cos\psi - z'\,.\,\sin\theta \quad \text{und}$$
$$B = x'\,.\,\cos\psi - y'\,.\,\sin\psi$$

setzt, daſs dann $x'' = A\,.\,\sin\varphi + B\,.\,\cos\varphi$ und $y'' = A\,.\,\cos\varphi - B\,.\,\sin\varphi$ ist; das Product $x''\,y''$ ist also gleich

$$(A^2 - B^2)\,\sin\varphi\,.\,\cos\varphi + B\,A\,.\,(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2)$$

$$\text{oder } \left(\frac{A^2 - B^2}{2}\right)\sin 2\varphi + A\,B\,\cos 2\varphi,$$

$$\text{und also tang } 2\varphi = \left(\frac{B^2 - A^2}{2\,A\,B}\right).$$

wird; die Gleichung für u muſs also auf eine gleiche Art die Tangente der drey Winkel bestimmen, welche die Axe der x' mit der Durchschnittslinie der Ebene der x' und y' und der folgenden drey Ebenen macht: 1) der Ebene der x'' und der y''; 2) der Ebene der x'' und der z''; 3) der Ebene der y'' und der z''. Die drey Wurzeln der Gleichung für u sind also reell und gehören einem und demselben System der Axen zu.

Es folgt hieraus, daſs ein fester Körper im Allgemeinen nur ein einziges System von Axen hat, welche die Eigenschaft, wovon hier die Rede ist, besitzen. Man hat diese Axen Hauptumdrehungsaxen wegen einer ihnen eigenthümlichen Eigenschaft genannt, von der wir in der Folge sprechen werden.

Man nennt Moment der Trägheit eines Körpers, in Beziehung auf jede Axe, die Summe der Producte jedes Theilchens des Körpers in das Quadrat seines Abstandes von dieser Axe. Die Gröſsen A, B, C sind die Momente der Trägheit des Körpers, den wir betrachtet haben, in Beziehung auf die Axen der x'', der y'' und der z''. Wir nennen nun C' das Moment der Trägheit des nämlichen Körpers in Beziehung auf die Axe der z', so wird man vermittelst der Werthe von x' und y' des vorhergehenden Satzes [72])

72) Man hat, wie schon mehrmals bemerkt worden ist, $x' = A^{\backprime} . \sin\psi + B^{\backprime} . \cos\psi$ und $y' = A^{\backprime} . \cos\psi - B^{\backprime} . \sin\psi$; wo $A^{\backprime} = x'' . \cos\theta . \sin\varphi + y'' . \cos\theta . \cos\varphi + z'' . \sin\theta$, und $B^{\backprime} = x'' . \cos\varphi - y'' . \sin\varphi$ ist. Folglich ist $x'^2 + y'^2 = A^{\backprime 2} + B^{\backprime 2}$. Nun ist, wenn man alle Producte wegläſst, nämlich $x''y''$, $y''z''$, $x''z''$, welche am Ende verschwinden, weil $S . x''y'' . dm$ etc., gleich Null sind,

$$A^{\backprime 2} = x''^2 . \cos\theta^2 . \sin\varphi^2 + y''^2 . \cos\theta^2 . \cos\varphi^2 + z''^2 . \sin\theta^2;$$
$$B^{\backprime 2} = x''^2 . \cos\varphi^2 + y''^2 . \sin\varphi^2 .$$

Multiplicirt man das letzte Glied des Werths von $A^{\backprime 2}$ und die zwey Glieder von $B^{\backprime 2}$ mit der Summe der Quadrate des Sinus und des Cosinus des Winkels θ oder φ, so daſs jedes Glied beide Winkel enthält, so erhält man

$$A^{\backprime 2} + B^{\backprime 2} = (x''^2 + y''^2)(\cos\varphi^2 . \cos\theta^2 + \sin\varphi^2 . \cos\theta^2) + (x''^2 + y''^2)\cos\varphi^2 . \sin\theta^2 + (y''^2 + z''^2)\sin\varphi^2 . \sin\theta^2$$

oder $(A^{\backprime 2} + B^{\backprime 2})$ d. h. $x'^2 + y'^2 = (x''^2 + y''^2)\cos\theta^2 + (x''^2 + z''^2)\cos\varphi^2 . \sin\theta^2 + (y''^2 + z''^2)\sin\varphi^2 . \sin\theta^2$

folglich

$$S(x'^2 + y'^2)\,dm = S(x''^2 + y''^2)\,dm . \cos\theta^2 + S(x''^2 + z''^2)\,dm . \cos\varphi^2 . \sin\theta^2 + S(y''^2 + z''^2)\,dm . \sin\varphi^2 . \sin\theta^2$$

oder $C' = C . \cos\theta^2 + B . \cos\varphi^2 . \sin\theta^2 + A . \sin\varphi^2 . \sin\theta^2$.

Es sey nun die Ebene der x'' und y'' der Aequator; die Axe der z'' ist dann gegen den Nordpol des Aequators gerichtet; die Ebene der x' und y' sey die Ekliptik und also die Axe der z' gegen den Nordpol der Ekliptik gerichtet; dann ist θ die Schiefe der Ekliptik, φ die gerade Aufsteigung der Axe der x'' und $90^\circ + \varphi$ die gerade Aufsteigung der Axe der y''.

$$C' = A \cdot \sin\theta^2 \cdot \sin\phi^2 + B \cdot \sin\theta^2 \cdot \cos\phi^2 + C \cdot \cos\theta^2$$

haben. Die Gröſsen $\sin\theta^2 \cdot \sin\phi^2$, $\sin\theta^2 \cdot \cos\phi^2$, und $\cos\theta^2$ sind die Quadrate der Cosinus der Winkel, welche die Axen der x'', der y'' und der z'' mit der Axe der z' machen; hieraus folgt im Allgemeinen, daſs, wenn man das Moment der Trägheit in Beziehung auf jede Hauptumdrehungsaxe mit dem Quadrat des Cosinus des Winkels, welchen sie mit irgend einer andern Axe macht, multiplicirt, die Summe dieser drey Producte das Moment der Trägheit des festen Körpers in Beziehung auf diese letztere Axe seyn wird.

Die Gröſse C' ist kleiner als die gröſste der drey Gröſsen A, B, C; sie ist gröſser als die kleinste dieser drey Gröſsen; das gröſste und kleinste Moment der Trägheit gehört also den Hauptaxen zu [73]).

Es sollen X, Y, Z die Koordinaten des Schwerpunkts des festen Körpers in Beziehung auf den Anfangspunkt der Koordinaten seyn, für welchen wir den Punkt annehmen, um welchen der Körper sich drehen muſs, wenn er nicht frey ist; so werden $x' - X$, $y' - Y$ und $z' - Z$ die Koordinaten des Theilchens dm des Körpers in Beziehung auf seinen Schwerpunkt seyn: das Moment der Trägheit in Beziehung auf eine mit der Axe der z' parallelen und durch den Schwerpunkt gehenden Axe wird also

$$S \cdot [(x' - X)^2 + (y' - Y)^2] \cdot dm$$

seyn; man hat aber durch die Natur des Schwerpunkts $S \cdot x' dm = mX$ und $S \cdot y' dm = mY$; das vorhergehende Moment verwandelt sich dadurch in

$$- m (X^2 + Y^2) + S \cdot (x'^2 + y'^2) \cdot dm.$$

Man erhält so die Momente der Trägheit des festen Körpers in Beziehung auf

Nun ist offenbar der Winkel der Axe der Ekliptik und der Axe des Aequators der Schiefe der Ekliptik, nämlich θ gleich. Der Winkel, welchen die Axe der Ekliptik mit der Axe der x'' macht, ist offenbar dem Abstand vom Pol der Ekliptik des Punkts des Aequators gleich, dessen gerade Aufsteigung φ ist. Die Declination dieses Punktes ist gleich Null, und die allgemeine trigonometrische Formel giebt den Sinus der Breite oder den Cosinus des Abstandes vom Pol der Ekliptik gleich $- \sin\theta \cdot \sin\varphi$.

Verwandelt man φ in $90^\circ + \varphi$, so erhält man den Cosinus des Winkels, welchen die Axe der Ekliptik mit der Axe der y'' macht, nämlich $\sin\theta \cdot \cos\varphi$.

73) Wenn z. B. C gröſser als A und als B ist, so müssen, wenn C' gleich C seyn soll, die Gröſsen $A \cdot \sin\theta^2 \cdot \sin\varphi^2 + B \cdot \sin\theta^2 \cdot \cos\varphi^2$ gleich $C \cdot \sin\theta^2$ seyn. Multiplicirt man $C \cdot \sin\theta^2$ mit $\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2$, wodurch sein Werth sich nicht ändert, so findet man, daſs $C \cdot \sin\theta^2 \cdot \sin\varphi^2 + C \cdot \sin\theta^2 \cdot \cos\varphi^2$ gleich $A \cdot \sin\theta^2 \cdot \sin\varphi^2 + B \cdot \sin\theta^2 \cdot \cos\varphi^2$ seyn müſste; da aber A und B kleiner als C sind, so ist jedes Glied des zweyten Theils dieser Gleichung kleiner als das ihm entsprechende Glied des ersten Theils, und also C' kleiner als C.

die Axen, welche durch irgend einen Punkt gehen, wenn diese Momente in Beziehung auf die Axen, welche durch den Schwerpunkt gehen, bekannt sind. Man sieht zugleich, daſs das kleinste aller Momente der Trägheit in Beziehung auf eine der drey Hauptaxen, welche durch den Schwerpunkt gehen, Statt hat.

Wir wollen annehmen, daſs durch die Natur des Körpers die beiden Momente der Trägheit A und B einander gleich sind, so wird man

$$C' = A \,.\, \sin \theta^2 + C \,.\, \cos \theta^2$$

haben. Setzt man nun θ dem rechten Winkel gleich, wodurch die Axe der z' senkrecht auf die Axe der z'' wird, so wird man $C' = A$ haben. Folglich sind dann die Momente der Trägheit in Beziehung auf alle Axen, welche in einer auf die Axe der z'' senkrechten Ebene sich befinden, einander gleich. Man kann sich aber leicht versichern, daſs man in diesem Fall für das System der Axe der z'' und jeder zwey andern auf dieselbe und unter einander senkrechten Axen

$$S \,.\, x'y' \,.\, dm = 0\,; \qquad S \,.\, x'z'' \,.\, dm = 0\,; \qquad S \,.\, y'z'' \,.\, dm = 0$$

hat. Bezeichnet man nämlich durch x'' und y'' die Koordinaten eines Theilchens dm des Körpers für die beiden Hauptaxen, welche in der auf die Axe der z'' senkrechten Ebene genommen worden sind, und in Beziehung auf welche die Momente der Trägheit einander gleich gesetzt worden sind, so werden wir

$$S \,.\, (x''^2 + z''^2) \,.\, dm = S \,.\, (y''^2 + z''^2) \,.\, dm$$

oder einfacher $S \,.\, x''^2 \,.\, dm = S \,.\, y''^2 \,.\, dm$ haben. Nennt man aber den Winkel, welchen die Axe der x' mit der Axe der x'' macht, ε, so hat man

$$x' = x'' \,.\, \cos \varepsilon + y'' \,.\, \sin \varepsilon\,;$$

$$y' = y'' \,.\, \cos \varepsilon - x'' \,.\, \sin \varepsilon\,;$$

man hat also

$$S \,.\, x'y' \,.\, dm = S \,.\, x''y'' \,.\, dm \,.\, (\cos \varepsilon^2 - \sin \varepsilon^2) + S \,.\, (y''^2 - x''^2) \,.\, dm \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \cos \varepsilon = 0.$$

Auf eine ähnliche Art wird man $S \,.\, x'z'' \,.\, dm = 0$ und $S \,.\, y'z'' \,.\, dm = 0$ finden; alle auf die Axe der z'' senkrechte Axen sind folglich Hauptaxen, und der feste Körper hat in diesem Fall eine unendliche Menge Hauptaxen.

Wenn man zugleich $A = B = C$ hat, so wird man allgemein $C' = A$ haben; das heiſst, alle Momente der Trägheit werden einander gleich seyn. Man hat aber alsdann allgemein, was auch immer die Ebene der x' und der y' für eine Lage hat,

$$S \,.\, x'y' \,.\, dm = 0\,; \qquad S \,.\, x'z' \,.\, dm = 0\,; \qquad S \,.\, y'z' \,.\, dm = 0\,;$$

so daſs alsdann alle Axen Hauptaxen sind. Dies findet bey der Kugel Statt; wir werden in der Folge sehen, daſs diese Eigenschaft auch bey einer Menge anderer Körper, deren allgemeine Gleichung wir geben werden, Statt hat.

28. Die Gröſsen p, q, r, welche wir in den Gleichungen des 26sten Satzes eingeführt haben, haben dies Merkwürdige, daſs sie die Lage der wirklichen und augenblicklichen Umdrehungsaxe des Körpers in Bezug auf die drey Hauptaxen bestimmen. Man hat nämlich für die Punkte, welche in der Umdrehungsaxe liegen, $dx' = 0$; $dy' = 0$; $dz' = 0$. Differenziirt man die im 26sten Satz gegebenen Werthe von x', y', z', und setzt nach den Differenziationen $\sin \psi = 0$, welches erlaubt ist, weil man die Lage der Axe der x' auf der Ebene der x' und der y' nach Willkühr festsetzen kann, so erhält man

$$dx' = x''.(d\psi.\cos\theta.\sin\phi - d\phi.\sin\phi) + y''.(d\psi.\cos\theta.\cos\phi - d\phi.\cos\phi) + z''.d\psi.\sin\theta = 0;$$

$$dy' = x''.(d\phi.\cos\theta.\cos\phi - d\theta.\sin\theta.\sin\phi - d\psi.\cos\phi) + y''.(d\psi.\sin\phi - d\phi.\cos\theta.\sin\phi - d\theta.\sin\theta.\cos\phi) + z''.d\theta.\cos\theta = 0;$$

$$dz' = -x''.(d\theta.\cos\theta.\sin\phi + d\phi.\sin\theta.\cos\phi) - y''.(d\theta.\cos\theta.\cos\phi - d\phi.\sin\theta.\sin\phi) - z''.d\theta.\sin\theta = 0.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $-\sin\phi$; die zweyte mit $\cos\theta.\cos\phi$, und die dritte mit $-\sin\theta.\cos\phi$, und addirt sie, so erhält man

$$0 = px'' - qz''.$$

Multiplicirt man die erste der nämlichen Gleichungen mit $\cos\phi$, die zweyte mit $\cos\theta.\sin\phi$, die dritte mit $-\sin\theta.\sin\phi$, und addirt sie, so wird man

$$0 = py'' - rz''$$

haben. Multiplicirt man endlich die zweyte dieser Gleichungen mit $\sin\theta$, die dritte mit $\cos\theta$ und addirt sie, so erhält man

$$0 = qy'' - rx''.$$

Die letztere Gleichung folgt augenscheinlich aus den beiden vorhergehenden; die drey Gleichungen $dx' = 0$, $dy' = 0$, $dz' = 0$ lassen sich also auf diese zwey Gleichungen zurückführen, welche eine gerade Linie bestimmen, die mit den Axen der x'', der y'' und der z'' Winkel macht, deren Cosinus

$$\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

sind. Diese gerade Linie ist also in Ruhe, und bildet die wirkliche Umdrehungsaxe des Körpers.

Wir wollen nun, um die Umdrehungsgeschwindigkeit des Körpers zu haben, den Punkt der Axe der z'' betrachten, dessen Entfernung vom Anfangspunkt der Koordinaten der Einheit gleich ist. Man wird seine mit den Axen der x', der y' und der z' parallelen Geschwindigkeiten erhalten, wenn man in den vorhergehenden Ausdrücken von dx', dy', dz', $x'' = 0$, $y'' = 0$, $z = 1$ gesetzt, und sie dann durch dt dividirt. Dieses giebt für diese partiellen Geschwindigkeiten

$$\frac{d\psi}{dt} \,.\, \sin\theta\,; \qquad \frac{d\theta}{dt} \,.\, \cos\theta\,; \qquad \frac{-\,d\theta}{dt} \,.\, \sin\theta;$$

folglich ist die ganze Geschwindigkeit des Punkts, wovon die Rede ist, $\frac{\sqrt{d\theta^2 + d\psi^2 \,.\, \sin\theta^2}}{dt}$ oder $\sqrt{q^2 + r^2}$. Dividirt man diese Geschwindigkeit mit dem Abstand des Punkts von der augenblicklichen Umdrehungsaxe, so wird man die Winkelumdrehungsgeschwindigkeit des Körpers erhalten. Nun ist aber dieser Abstand augenscheinlich dem Sinus des Winkels gleich, den die wirkliche Umdrehungsaxe mit der Axe der z'' macht; ein Winkel, dessen Cosinus gleich $\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$ ist; man wird also $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ für die Winkelumdrehungsgeschwindigkeit erhalten.

Man sieht hieraus, daſs, wie auch immer die Umdrehungsbewegung eines Körpers um einen festen, oder als fest angenommenen Punkt beschaffen sey, daſs diese Bewegung nur eine Umdrehungsbewegung um eine während eines Augenblicks unveränderliche Axe seyn kann, welche aber von einem Augenblick zum andern sich ändern kann. Die Lage dieser Axe gegen die drey Hauptaxen und die Winkelumdrehungsgeschwindigkeit hängt von den veränderlichen Gröſsen p, q, r ab, deren Bestimmung in diesen Untersuchungen sehr wichtig ist. Sie sind von der Lage der Ebene der x' und der y' unabhängig, weil sie Gröſsen ausdrücken, die von dieser Lage unabhängig sind.

29. Wir wollen nun diese veränderlichen Gröſsen durch Functionen der Zeit t für den Fall bestimmen, wo keine äuſsern Kräfte auf den Körper wirken. Hierzu wollen wir die Gleichung (D) des 26sten Satzes zwischen den veränderlichen

lichen Grössen p', q', r', welche zu den vorhergehenden ein beständiges Verhältniss haben, wieder vornehmen. Die Differenziale dN, dN' und dN'' sind alsdann gleich Null; und wenn man diese Gleichungen addirt, nachdem man die erste mit p', die zweyte mit q', die dritte mit r' multiplicirt hat, so giebt die Summe dieser Gleichungen

$$0 = p'dp' + q'dq' + r'dr',$$

und wenn man integrirt

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 = k^2,$$

wo k eine willkührliche beständige Grösse ist.

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (D) mit $AB \,.\, p'$, die zweyte mit $BC \,.\, q'$, die dritte mit $AC \,.\, r'$, addirt sie dann und integrirt ihre Summe, so erhält man

$$AB \,.\, p'^2 + BC \,.\, q'^2 + AC \,.\, r'^2 = H^2,$$

wo H eine willkührliche beständige Grösse ist. Diese Gleichung enthält den Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte. Aus diesen beiden Integralen erhält man

$$q'^2 = \frac{AC \,.\, k^2 - H^2 + A \,.\, (B - C) \,.\, p'^2}{C \,.\, (A - B)}$$

$$r'^2 = \frac{H^2 - BC \,.\, k^2 - B \,.\, (A - C) \,.\, p'^2}{C \,.\, (A - B)}.$$

Man wird also q' und r' in Functionen der Zeit t kennen, sobald man p' kennen wird; nun giebt aber die erstere der Gleichungen (D)

$$dt = \frac{AB \,.\, dp'}{(A - B) \,.\, q'r'},$$

und folglich

$$dt = \frac{ABC \,.\, dp'}{\sqrt{[AC \,.\, k^2 - H^2 + A \,.\, (B - C) \,.\, p'^2] \,.\, [H^2 - BC \,.\, k^2 - B \,.\, (A - C) \,.\, p'^2]}},$$

eine Gleichung, welche nur in den folgenden drey Fällen integrirt werden kann: $B = A$, $B = C$, $A = C$.

Die Bestimmung der drey Grössen p', q', r' enthält drey willkührliche Grössen, nämlich H^2, k^2 und diejenige, welche die Integration der vorhergehenden Differenzialgleichung einführt. Diese Grössen geben aber nur die augen-

blickliche Umdrehungsaxe des Körpers auf seiner Oberfläche oder in Beziehung auf die drey Hauptaxen, und seine Winkelumdrehungsgeschwindigkeit. Um die wirkliche Bewegung des Körpers um einen festen Punkt zu kennen, muſs man noch die Lage der Hauptaxen im Raum kennen. Dadurch werden drey neue willkührliche Gröſsen, welche auf die ursprüngliche Lage dieser Axen Bezug haben, eingeführt werden; diese erfordern drey neue Integrale, welche mit den vorigen vereinigt die vollständige Auflösung dieser Aufgabe geben werden. Die Gleichungen (C) des 26sten Satzes enthalten drey willkührliche Gröſsen N, N', N'', welche aber nicht gänzlich von den willkührlichen Gröſsen H und k unabhängig sind. Denn wenn man die Quadrate der ersten Theile der Gleichungen (C) addirt, so erhält man

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 = N^2 + N'^2 + N''^2;$$

dieses giebt $k^2 = N^2 + N'^2 + N''^2$.

Die beständigen Gröſsen N, N', N'' entsprechen den beständigen Gröſsen c, c', c'' des 21sten Satzes; und die Function $\frac{1}{2} t \,.\, \sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}$ drückt die Summe der während der Zeit t von jedem Körpertheilchen beschriebenen Winkelflächen aus, wenn man dieselben auf diejenige Ebene projicirt, in Beziehung auf welche diese Summe ein Gröſstes ist. In Beziehung auf diese Fläche sind N' und N'' gleich Null; setzt man also ihre im 26sten Satze gefundenen Werthe gleich Null, so erhält man

$$0 = Br \,.\, \sin\phi - Aq \,.\, \cos\phi;$$
$$0 = Aq \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\phi + Br \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\phi + Cp \,.\, \sin\theta.$$

Hieraus findet man [74])

74) Die erste der gegebenen Gleichungen ist $0 = r' \,.\, \sin\varphi - q' \,.\, \cos\varphi$, die zweyte $0 = q' \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\varphi + r' \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\varphi + p' \,.\, \sin\theta$. Man multiplicire die erste mit $\cos\theta \,.\, \sin\varphi$, die zweyte mit $\cos\varphi$, so giebt ihre Summe $0 = r' \,.\, \cos\theta + p' \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\varphi$. Man multiplicire ferner die erste mit $-\cos\theta \,.\, \cos\varphi$, die zweyte mit $\sin\varphi$; ihre Summe giebt $0 = q' \,.\, \cos\theta + p' \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\varphi$. Man multiplicire die erste der zwey neuen gefundenen Gleichungen mit q', die zweyte mit $-r'$; ihre Summe mit $p' \,.\, \sin\theta$ dividirt, giebt $q' \,.\, \cos\varphi - r' \,.\, \sin\varphi = 0$ oder $\tang\varphi = \frac{q'}{r'}$ und $\cos\varphi = \frac{r'}{\sqrt{q'^2 + r'^2}}$. Substituirt man diesen Werth von $\cos\varphi$ in die Gleichung $0 = r' \,.\, \cos\theta + p' \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\varphi$, so erhält man $\tang\theta = \frac{\sqrt{q'^2 + r'^2}}{p'}$, woraus man sehr leicht die im Text gegebenen Gleichungen herleitet.

$$\cos\theta = \frac{p'}{\sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}}$$

$$\sin\theta \,.\, \sin\Phi = \frac{-q'}{\sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}}$$

$$\sin\theta \,.\, \cos\Phi = \frac{-r'}{\sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}}.$$

Vermittelst dieser Gleichungen wird man die Werthe von θ und von Φ in Functionen der Zeit und in Beziehung auf die feste Ebene, welche wir so eben betrachtet haben, kennen. Wir brauchen nur noch den Winkel ψ zu kennen, welchen die Durchschnittslinie dieser Ebene und der Ebene der beiden Hauptaxen mit der Axe der x' macht; dieses erfordert eine neue Integration.

Die Werthe von q und von r des 26sten Satzes geben

$$d\psi \,.\, \sin\theta^2 = q\,dt \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\Phi + r\,dt \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\Phi;$$

hieraus erhält man

$$d\psi = \frac{-k \,.\, dt \,.\, (Bq'^2 + Ar'^2)}{AB \,.\, (q'^2 + r'^2)}.$$

Man hat aber aus dem Vorhergehenden

$$q'^2 + r'^2 = k^2 - p'^2; \qquad Bq'^2 + Ar'^2 = \frac{H - AB \,.\, p'^2}{C};$$

man wird also

$$d\psi = \frac{-k \,.\, dt \,.\, (H^2 - AB \,.\, p'^2)}{ABC \,.\, (k^2 - p'^2)}$$

haben. Substituirt man anstatt dt seinen oben gefundenen Werth, so wird man den Werth von ψ als Function von p' erhalten. Die drey Winkel θ, Φ, ψ werden also durch Functionen der veränderlichen Grösen p', q', r' bestimmt, und diese Grösen selbst durch Functionen der Zeit t gegeben werden. Man wird also in jedem Augenblick die Werthe dieser Winkel in Beziehung auf die Ebene der x' und der y', welche wir so eben betrachtet haben, kennen, und man wird daraus leicht vermittelst der Formeln der sphärischen Trigonometrie die Werthe derselben Winkel in Beziehung auf jede andere Fläche herleiten können. Dadurch werden zwey neue willkührliche Grösen eingeführt

werden, welche mit den vorigen vier vereinigt die sechs willkührlichen Gröſsen geben werden, welche die vollständige Auflösung der Aufgabe, womit wir uns so eben beschäftigt haben, erfordert. Man sieht aber, daſs die Betrachtung der Ebene, wovon wir gesprochen haben, diese Aufgabe vereinfacht.

Nimmt man die Lage der drey Hauptaxen auf der Oberfläche des Körpers als bekannt an; kennt man ferner für jeden Augenblick die Lage der wirklichen Umdrehungsaxe auf dieser Oberfläche und die Winkelumdrehungsgeschwindigkeit, so wird man für diesen Augenblick die Werthe von p, q, r haben, weil diese Werthe mit den Winkelumdrehungsgeschwindigkeiten dividirt, die Cosinus der Winkel ausdrücken, welche die wirkliche Umdrehungsaxe mit den drey Hauptaxen macht. Man wird also die Werthe von p', q', r' haben; da nun diese letztern Werthe den Cosinus der Winkel proportional sind, welche die drey Hauptaxen mit der Ebene der x' und y' machen, für welche die Summe der Winkelflächen der Projectionen der Körpertheilchen, jede mit dem zugehörigen Körpertheilchen multiplicirt, ein Gröſstes ist, so wird man alsdann für jeden Augenblick den Durchschnitt der Oberfläche des Körpers mit dieser unveränderlichen Ebene bestimmen, und folglich die Lage dieser Ebene aus den vorhandenen Bedingungen der Bewegung des Körpers wieder auffinden können.

Wir wollen annehmen, daſs die Umdrehungsbewegung des Körpers aus einem ursprünglichen Stoſs entstanden sey, welcher nicht durch seinen Schwerpunkt ging. Aus dem, was wir im 20sten und 22sten Satz bewiesen haben, folgt, daſs der Schwerpunkt dieselbe Bewegung annehmen wird, als ob dieser Stoſs unmittelbar an ihm wäre angebracht worden, und daſs der Körper um diesen Schwerpunkt die nämliche Umdrehungsbewegung annehmen wird, als ob der Schwerpunkt unbeweglich wäre. Projicirt man jedes Körpertheilchen auf eine feste Ebene, so wird die Summe der um diesen Punkt von dem Radius vector beschriebenen Winkelflächen, jede derselben mit der zugehörigen Masse multiplicirt, dem Moment der ursprünglichen, auf die nämliche Ebene projicirten, Kraft proportional seyn. Nun ist aber dieses Moment das gröſste für die Ebene, welche durch die Richtung der Kraft und durch den Schwerpunkt geht; diese Ebene ist also die unveränderliche Ebene. Nennt man f die Entfernung des ursprünglichen Stoſses vom Schwerpunkt, und v die Geschwindigkeit, welche sie diesem Punkt ertheilt hat, so wird, wenn m die Masse des Körpers ist, $m.fv$

das Moment dieses Stoſses seyn; und wenn man es mit $\frac{1}{2}t$ multiplicirt, so wird das Product der Summe der während der Zeit t beschriebenen Winkelflächen gleich seyn; diese Summe ist aber nach dem Vorhergehenden gleich $\frac{t}{2} . \sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2}$; man hat also

$$\sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2} = m . fv.$$

Kennt man die Lage der Hauptaxen in Beziehung auf die feste Ebene oder die Winkel θ und ϕ beym Anfang der Bewegung, so wird man auch die Werthe von p', q', r' bey diesem Anfang, und folglich die Werthe von p, q, r haben; man wird also für jeden Augenblick die Werthe dieser Gröſsen bestimmen können.

Diese Theorie kann dazu dienen, die doppelte Bewegung der Planeten, die um ihre Axe und die in ihrer Bahn, durch einen einzigen ursprünglichen Stoſs zu erklären. Nimmt man nämlich an, daſs ein Planet eine gleichartige Kugel vom Halbmesser R ist, und daſs er sich um die Sonne mit einer Winkelgeschwindigkeit U bewegt, so wird man, wenn r seine Entfernung von der Sonne ausdrückt, $v = rU$ haben. Stellt man sich ferner vor, daſs der Planet sich vermöge eines ursprünglichen Stoſses bewegt, dessen Richtung den Abstand f vom Mittelpunkt hatte, so ist klar, daſs er sich um sich selbst um eine auf die unveränderliche Ebene senkrechte Axe drehen wird. Nimmt man also diese Axe als die dritte Hauptaxe an, so wird man $\theta = 0$ und folglich $q' = 0$, $r' = 0$, $p' = m.fv$ oder $Cp = mfrU$ haben. Für die Kugel hat man aber $C = \frac{2}{5} m R^2$, folglich

$$f = \frac{2}{5} . \frac{R^2}{r} . \frac{p}{U}.$$

Dieses giebt den Abstand f der Richtung des ursprünglichen Stoſses vom Mittelpunkt des Planeten, welcher dem beobachteten Verhältniſs zwischen der Winkelumdrehungsgeschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit U in seiner Bahn Genüge thut. Für die Erde hat man $\frac{p}{U} = 366,256038$, die Sonnenparallaxe giebt $\frac{R}{r} = 0,000042665$ und folglich f sehr nahe gleich $\frac{1}{160} R$.

Sind die Planeten nicht gleich dicht, so kann man sie hier so betrachten, als ob sie aus ungleich dichten sphärischen und concentrischen Lagen bestän-

den. Es sey ϱ die Dichtigkeit einer dieser Lagen, deren Halbmesser R ist, und ϱ sey durch eine Function von R gegeben, so wird man

$$C = \frac{2m}{3} \cdot \frac{\int \varrho \, . \, R^4 \, . \, dR}{\int \varrho \, . \, R^2 \, . \, dR}$$

haben, wo m die ganze Masse des Planeten ist, und wo die Integrale von $R = 0$ an bis zum Werth, den R an der Oberfläche hat, zu nehmen sind; dieses giebt

$$f = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{p}{rU} \cdot \frac{\int \varrho \, . \, R^4 \, . \, dR}{\int \varrho \, . \, R^2 \, . \, dR}.$$

Nimmt man an, dafs die nächsten Lagen am Mittelpunkt die dichtesten sind, welches sehr natürlich ist, so wird die Function $\frac{\int \varrho \, . \, R^4 \, . \, dR}{\int \varrho \, . \, R^2 \, . \, dR}$ kleiner als $\frac{3}{5}$ seyn; der Werth von f wird also kleiner seyn als für den Fall der gleichen Dichtigkeit [75]).

30. Wir wollen nun die Schwingungen des Körpers in dem Fall bestimmen, wenn er sich sehr nahe um die dritte Hauptaxe dreht. Man könnte sie aus den Integralen, auf welche wir in dem vorhergehenden Satz gekommen sind, herleiten; es ist aber einfacher, sie unmittelbar aus den Differenzialgleichungen (D) des 26sten Satzes zu bestimmen. Da keine Kräfte auf den Körper wirken, so werden diese Gleichungen, wenn man statt p', q', r' ihre Werthe Cp, Aq und Br setzt, sich in folgende verwandeln:

$$dp + \frac{(B - A)}{C} \, . \, qr \, . \, dt = 0$$

$$dq + \frac{(C - B)}{A} \, . \, rp \, . \, dt = 0$$

$$dr + \frac{(A - C)}{B} \, . \, pq \, . \, dt = 0 \, .$$

75) Es sey z. B. $\varrho = \alpha + \beta R^{-1}$, so ist $\varrho R^4 dR = \alpha R^4 dR + \beta R^3 dR$, und $\varrho R^2 dR = \alpha R dR + \beta R dR$; folglich, wenn man integrirt,

$$\frac{\int \varrho R^4 \, dR}{\int \varrho R^2 \, dR} = \frac{\frac{\alpha}{5} R^5 + \frac{\beta}{4} R^4}{\frac{1}{3} \alpha R^3 + \frac{1}{2} \beta R^2} = \tfrac{3}{5} R^2 \left[1 - \frac{\frac{1}{20} \beta R^4}{\frac{1}{3} \alpha R^3 + \frac{1}{2} \beta R^2} \right].$$

Der Quotient ist also kleiner als $\frac{3}{5} R^2$, wenn β positiv ist. Soll aber ϱ zunehmen, wenn R abnimmt, so mufs β positiv seyn. Man sieht leicht, dafs der gefundene Quotient dieselbe Form gehabt haben würde, wenn man dem Ausdruck für ϱ mehrere Glieder gegeben hätte.

Da nun angenommen worden ist, daſs der Körper sich sehr nahe um seine dritte Hauptaxe dreht, so werden q und r sehr kleine Gröſsen seyn, deren Quadrate und Producte wir vernachläſsigen werden; dieses giebt $dp = 0$ und p ist also eine beständige Gröſse. Setzt man in den beiden andern Gleichungen

$$q = M \, . \sin (nt + \gamma); \qquad r = M' \, . \cos (nt + \gamma),$$

so wird man [76])

$$n = p \sqrt{\frac{(C-A) \, . \, (C-B)}{AB}}; \qquad M' = - M \, . \sqrt{\frac{A \, . \, (C-A)}{B \, . \, (C-B)}}$$

erhalten, wo M und γ zwey willkührliche beständige Gröſsen sind. Die Winkelumdrehungsgeschwindigkeit wird $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ oder bloſs p seyn, wenn man die Quadrate von q und r vernachläſsigt. Diese Geschwindigkeit wird also sehr nahe beständig seyn. Endlich wird $\frac{\sqrt{q^2 + r^2}}{p}$ der Sinus des Winkels seyn, welchen die wirkliche Umdrehungsaxe mit der dritten Hauptaxe macht.

Wenn man beym Anfang der Bewegung $q = 0$ und $r = 0$ hat, d. h. wenn in diesem Augenblick die wirkliche Umdrehungsaxe mit der dritten Hauptaxe zusammenfällt, so wird man $M = 0$ und $M' = 0$ haben; q und r werden also immer gleich Null seyn, und die Umdrehungsaxe wird beständig mit der dritten Hauptaxe zusammen fallen. Hieraus folgt, daſs der Körper, wenn er sich am Anfang um eine seiner Hauptaxen dreht, sich beständig und gleichförmig um dieselbe Axe drehen wird. Wegen dieser merkwürdigen Eigenschaft hat man die Hauptaxen **Hauptumdrehungsaxen** genannt. Diese Eigenschaft kömmt ihnen ausschlieſslich zu; denn wenn die wirkliche Umdrehungsaxe unveränderlich auf demselben Punkt der Oberfläche des Körpers ist, so hat man $dp = 0$, $dq = 0$,

76) Die Gleichungen für dq und dr geben, wenn man integrirt,

$$0 = q + \left(\frac{C-B}{A}\right) p \, . \int r dt = q + \left(\frac{C-B}{A}\right) p \, M' \, . \int \cos (nt + \gamma) \, . \, dt$$

$$= q + \left(\frac{C-B}{A}\right) p \, . \, M' \, . \, \frac{1}{n} \sin (nt + \gamma). \quad \text{Eben so } 0 = r + \left(\frac{C-A}{B}\right) p \, . \, \frac{M}{n} \cos (nt + \gamma).$$

Setzt man statt q und r ihre angenommenen Werthe, und dividirt man dann die erste Gleichung durch $\sin (nt + \gamma)$, die zweyte durch $\cos (nt + \gamma)$, so erhält man

$$0 = M + \left(\frac{C-B}{A}\right) p \, . \, M' \, . \, \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad 0 = M' + \left(\frac{C-A}{B}\right) p \, . \, M \, . \, \frac{1}{n},$$

woraus man sehr leicht die im Text gegebenen Gleichungen erhält.

$dr = 0$. Dadurch geben die vorhergehenden Werthe dieser Gröſse folgende Gleichungen:

$$\frac{(B-A)}{C} \cdot rq = 0; \quad \frac{(C-B)}{A} \cdot rp = 0; \quad \frac{(A-C)}{B} \cdot pq = 0.$$

Da nun im Allgemeinen A, B, C einander nicht gleich sind, so sind zwey der drey Gröſsen p, q, r vermöge dieser Gleichungen gleich Null, und hieraus folgt, daſs die wirkliche Umdrehungsaxe mit einer der Hauptaxen zusammenfällt.

Wenn zwey der drey Gröſsen A, B, C einander gleich sind, z. B. wenn $A = B$, so verwandeln sich die vorhergehenden Gleichungen in folgende: $rp = 0$, $pq = 0$, und man kann ihnen Genüge thun, wenn man bloſs p gleich Null setzt. Die Umdrehungsaxe ist alsdann in einer auf der dritten Hauptaxe senkrechten Ebene; man hat aber schon im 27sten Satze gesehen, daſs alle Axen in dieser Ebene Hauptaxen sind.

Wenn endlich zu gleicher Zeit $A = B = C$ ist, so geschieht den vorhergehenden Gleichungen Genüge, was auch p, q, r seyn mögen; alsdann sind aber alle Axen des Körpers nach dem 27sten Satze Hauptaxen.

Es folgt hieraus, daſs die Hauptaxen allein die Eigenschaft haben, unveränderliche Umdrehungsaxen zu seyn; sie haben aber diese Eigenschaft nicht alle auf die nämliche Art. Die Umdrehung um diejenige Axe, deren Moment der Trägheit zwischen den Momenten der Trägheit der beiden andern fällt, kann durch die geringste Ursache auf eine merkliche Weise gestöhrt werden, so daſs diese Bewegung keine Sicherheit haben wird.

Man nennt s i c h e r n Z u s t a n d (état stable) eines Systems von Körpern denjenigen Zustand, von welchem das System, wenn es unendlich wenig gestöhrt wird, sich nur unendlich wenig und so entfernen kann, daſs es beständig Schwingungen um diesen Zustand machen muſs. Dieses vorausgesetzt nehmen wir an, daſs die wirkliche Umdrehungsaxe sich unendlich wenig von der dritten Hauptaxe entferne. In diesem Fall sind die beständigen Gröſsen M und M' unendlich klein, und wenn n eine reelle Gröſse ist, so werden die Werthe von q und r beständig unendlich klein bleiben, und die wirkliche Umdrehungsaxe wird sich nur um Gröſsen der nämlichen Ordnung von der dritten Hauptaxe entfernen. Wenn aber n eine unmögliche Gröſse wird, so werden $\sin(nt + \gamma)$, $\cos(nt + \gamma)$ sich in Exponentialgröſsen verwandeln; die Ausdrücke von q und von r würden also unbestimmbar wachsen und endlich aufhören können, unendlich klein zu seyn.

seyn. Es giebt also dann keine Sicherheit in der Umdrehungsbewegung des Körpers um die dritte Hauptaxe. Der Werth von n ist reell, wenn C die gröſste oder die kleinste der drey Gröſsen A, B, C ist; denn alsdann ist das Product $(C - A)(C - B)$ positiv; fällt aber C zwischen A und B, so ist dieses Product negativ, und in diesem Fall ist n eine unmögliche Gröſse. Die Umdrehungsbewegung ist also nur um diejenigen zwey Hauptaxen sicher, deren Momente der Trägheit am gröſsten und am kleinsten sind; sie ist es nicht um die dritte Hauptaxe. Wir werden nun, um die Lage der Hauptaxen im Raum zu bestimmen, annehmen, daſs die dritte Hauptaxe sehr nahe senkrecht auf die Ebene der x' und y' ist, so daſs θ eine sehr kleine Gröſse ist, deren Quadrate wir vernachläſsigen werden. Wir werden nach dem 26sten Satz

$$d\phi - d\psi = p\,dt$$

haben; dieses giebt, wenn man integrirt,

$$\psi = \phi - pt - \varepsilon,$$

wo ε eine willkührliche beständige Gröſse ist. Setzt man dann

$$\sin\theta\,.\,\sin\phi = s; \qquad \sin\theta\,.\,\cos\phi = u,$$

so werden die Werthe von q und r des 26sten Satzes, wenn man $d\psi$ eliminirt, folgende Gleichungen geben:

$$\frac{ds}{dt} - pu = r; \qquad \frac{du}{dt} + ps = -q \text{ 77)},$$

77) Aus der Gleichung $d\varphi - d\psi = p\,dt$ folgt $d\psi = d\varphi - p\,dt$; substituirt man diesen Werth in den Werth von q im 26sten Satz, so erhält man

$$q\,dt = d\varphi\,.\,\sin\theta\,.\,\sin\varphi - d\theta\,.\,\cos\varphi - p\,dt\,.\,\sin\theta\,.\,\sin\varphi.$$

$\cos\theta$ ist nur um das Quadrat der kleinen Gröſse θ von der Einheit verschieden; man kann also statt $d\theta\,.\,\cos\varphi$ die Gröſse $d\theta\,.\,\cos\varphi\,.\,\cos\theta$ setzen; dadurch wird

$$q\,dt = d\varphi\,.\,\sin\theta\,.\,\sin\varphi - d\theta\,.\,\cos\varphi\,.\,\cos\theta - p\,dt\,.\,\sin\theta\,.\,\sin\varphi;$$

$$\text{oder } q\,dt = -du - p\,.\,dt\,.\,s, \qquad \text{oder } -q = \frac{du}{dt} + ps.$$

Eben so erhält man aus dem Werth von r die Gleichung: $r = \frac{ds}{dt} - pu$. Differenziirt man die erste Gleichung, so erhält man $-dq = \frac{d^2u}{dt} + p\,.\,ds$, oder $\frac{-dq}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} + p\,.\,\frac{ds}{dt}$; man substituire statt $\frac{ds}{dt}$ seinen Werth $r + pu$, so erhält man $\frac{-dq}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} + p^2u + pr$. Man substituire statt $\frac{dq}{dt}$ und r ihre Werthe $n\,.\,M\,.\,\cos(nt+\gamma)$ und $M'\,.\,\cos(nt+\gamma)$, so erhält man

$$-\left(\frac{nM}{p^2} + \frac{M'}{p}\right)\,.\,\cos(nt+\gamma) = \frac{d^2u}{(p\,dt)^2} + u.$$

und wenn man integrirt:

$$s = \beta \,.\, \sin(pt + \lambda) - \frac{A\,.\,M}{Cp} \sin(nt + \gamma)$$

$$u = \beta \,.\, \cos(pt + \lambda) - \frac{B\,.\,M'}{Cp} \cos(nt + \gamma),$$

wo β und λ zwey neue beständige Gröſsen sind. Die Aufgabe ist so vollkommen gelöset, weil die Werthe von s und u, die Winkel θ und ϕ in Functionen der Zeit gegeben sind, und ψ durch eine Function von ϕ und t bestimmt ist. Wenn β gleich Null ist, so wird die Ebene der x' und y' die unveränderliche Ebene, auf welche wir im vorhergehenden Satz die Winkel θ, ϕ und ψ bezogen haben.

31. Wenn der Körper frey ist, so giebt die Analysis der vorhergehenden Sätze seine Bewegung um seinen Schwerpunkt; ist der Körper gezwungen, sich um einen festen Punkt zu bewegen, so wird sie seine Bewegung um diesen Punkt zu erkennen geben. Wir haben nur noch die Bewegung eines Körpers zu betrachten, der gezwungen ist, sich um eine feste Axe zu bewegen.

Es sey x' diese Axe, und wir nehmen an, daſs sie horizontal ist. In diesem Fall wird die letztere der Gleichungen B des 25sten Satzes zureichen, um die Bewegung des Körpers zu bestimmen. Wir wollen ferner annehmen, daſs die

Eben so erhält man

$$\left(\frac{M'n}{p^2} - \frac{M}{p}\right) \,.\, \sin(nt + \gamma) = \frac{d^2s}{(p\,dt)^2} + s\,.$$

Man könnte hier statt p seinen Werth, der durch n und andere beständige Gröſsen gegeben ist, setzen; dann würde man $u = \alpha \cos(nt + \gamma)$ erhalten, wo α durch n, M, M' gegeben seyn wird. Allein dieser Werth von u ist nur ein besonderes Integral, da das vollständige Integral zwey willkührliche beständige Gröſsen enthalten muſs. Da nun der Sinus und Cosinus eines Bogens die Eigenschaft haben, daſs ihre zweyten Differenziale durch das Quadrat des Differenzials des Bogens dividirt, dem gegebenen Sinus oder Cosinus, negativ genommen, gleich sind; so sieht man, daſs, wenn man $u = \beta \,.\, \cos(pt + \lambda) + \alpha \,.\, \cos(nt + \gamma)$ setzt, die vom Winkel pt abhängenden Theile sich im Ausdruck $\frac{d^2u}{(p\,dt)^2} + u$ aufheben, und daſs nur die vom Winkel nt abhängenden Theile übrig bleiben werden; vergleicht man diese Theile mit dem ersten Theil der Gleichung von u, so wird man daraus α bestimmen; und da der Werth von u zwey willkührliche beständige Gröſsen β und λ enthält, so ist er ihr vollständiges Integral.

Dasselbe Verfahren giebt offenbar den Werth von s.

Axe der y' horizontal, und dafs folglich die Axe der z' senkrecht und gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet ist. Wir wollen endlich annehmen, dafs die Ebene, welche durch die Axen der x' und y' geht, auch durch den Schwerpunkt des Körpers geht, und uns eine Axe gedenken, welche beständig durch diesen Schwerpunkt und durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht. Es sey θ der Winkel, welchen diese neue Axe mit der Axe der z' macht; nennt man nun y'' und z'' die Koordinaten in Beziehung auf diese neue Axe, so wird man

$$y' = y'' . \cos\theta + z'' . \sin\theta; \qquad z' = z'' . \cos\theta - y'' . \sin\theta$$

haben. Hieraus erhält man

$$S . \left(\frac{y'dz' - z'dy'}{dt}\right) . dm = - \frac{d\theta}{dt} . S . dm . (y''^2 + z''^2).$$

$S . dm . (y''^2 + z''^2)$ ist das Moment der Trägheit des Körpers in Beziehung auf die Axe der x''. Es sey C dieses Moment; die letzte der Gleichungen (B) des 25sten Satzes wird

$$- C . \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dN''}{dt}$$

geben. Nehmen wir nun an, dafs blofs die Schwere auf den Körper wirkt, so werden die Werthe von P und Q im 25sten Satz gleich Null, und R eine beständige Gröfse seyn; dieses giebt

$$\frac{dN''}{dt} = S . Ry' . dm = R . \cos\theta . S . y'' . dm + R . \sin\theta . S . z'' . dm.$$

Da nun die Axe der z'' durch den Schwerpunkt des Körpers geht, so hat man $S . y'' . dm = 0$; wenn ferner h der Abstand des Schwerpunkts von der Axe der x' ist, so wird man $S . z'' . dm = mh$ haben, wo m die ganze Masse des Körpers ist; man wird also

$$\frac{dN''}{dt} = mh . R . \sin\theta, \text{ und folglich } \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{- m . h . R . \sin\theta}{C}$$

haben. Nun wollen wir einen zweyten Körper betrachten, dessen Theile sämmtlich in einem einzigen Punkt vereinigt sind, welcher den Abstand l von der Axe der x' hat, so wird man für diesen Körper $C = m' l^2$ haben, wenn m' seine Masse ist; aufserdem wird h gleich l seyn und folglich

$$\frac{d^2\theta}{dt} = \frac{-R}{l} \cdot \sin\theta .$$

Diese beiden Körper werden also genau dieselbe Schwingungsbewegung haben, wenn ihre anfängliche Winkelgeschwindigkeit dann, wenn ihre Schwerpunkte in derselben senkrechten Linie sind, gleich groſs ist, und wenn man $l = \frac{C}{mh}$ hat. Der zweyte Körper, von dem wir so eben geredet haben, ist der einfache Pendel, dessen Schwingungen wir im 11ten Satz betrachtet haben. Man kann also immer durch diese Formel die Länge l des einfachen Pendels angeben, dessen Schwingungen gleichzeitig mit denen des Körpers sind, welchen wir hier betrachtet haben, und der ein zusammengesetztes Pendel bildet. Auf diese Art hat man die Länge des einfachen Pendels, welcher Sekunden schlägt, durch die Beobachtungen mit zusammengesetzten Pendeln bestimmt.

Achtes Kapitel.

Von der Bewegung der Flüssigkeiten.

32. Wir werden die Gesetze der Bewegung der Flüssigen von denen ihres Gleichgewichts abhängen lassen, so wie wir im 5ten Kapitel die Gesetze der Bewegung eines Systems von Körpern aus denen des Gleichgewichts dieses Systems hergeleitet haben. Wir wollen also die im 17ten Satz gegebene allgemeine Gleichung des Gleichgewichts der Flüssigen wieder vornehmen:

$$\delta p = \varrho \,.\, (P \,.\, \delta x + Q \,.\, \delta y + R \,.\, \delta z),$$

wo die Characteristik δ sich nur auf die Koordinaten x, y, z des Theilchens und nicht auf die Zeit t beziehen. Wenn die Flüssigkeit in Bewegung ist, so sind die Kräfte, vermöge welcher seine Theilchen im Gleichgewicht seyn würden, nach dem 18ten Satz folgende, wo dt beständig gesetzt worden ist,

$$P - \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right); \quad Q - \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right); \quad R - \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Man muſs also diese Kräfte statt P, Q, R in die vorhergehende Gleichung des Gleichgewichts setzen. Bezeichnet man nun mit δV die Variation $P.\delta x + Q.\delta y + R.\delta z$, welche wir als eine vollständige Variation annehmen, so erhält man

$$\delta V - \frac{\delta p}{\varrho} = \delta x \,.\, \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \delta y \,.\, \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \delta z \,.\, \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) \ldots (F).$$

Diese Gleichung ist drey unterschiedenen Gleichungen gleichgeltend, weil man, da die Variationen δx, δy, δz von einander unabhängig sind, ihre Koefficienten einzeln gleich Null setzen kann.

Die Koordinaten x, y, z sind Functionen der ursprünglichen Koordinaten und der Zeit t; es sollen a, b, c diese ursprünglichen Koordinaten seyn, so erhält man

$$\delta x = \left(\frac{dx}{da}\right) . \delta a + \left(\frac{dx}{db}\right) . \delta b + \left(\frac{dx}{dc}\right) . \delta c$$

$$\delta y = \left(\frac{dy}{da}\right) . \delta a + \left(\frac{dy}{db}\right) . \delta b + \left(\frac{dy}{dc}\right) . \delta c$$

$$\delta z = \left(\frac{dz}{da}\right) . \delta a + \left(\frac{dz}{db}\right) . \delta b + \left(\frac{dz}{dc}\right) . \delta c.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (F), so kann man die Koefficienten von δa, δb, δc einzeln gleich Null setzen; dieses wird drey partielle Differenzialgleichungen zwischen den drey Koordinaten x, y, z des Theilchens, zwischen den ursprünglichen Koordinaten a, b, c und der Zeit t geben.

Wir haben nur noch den Bedingungen des Zusammenhangs des Flüssigen Genüge zu thun. Zu diesem Zweck wollen wir ein rechtwinklichtes Parallelepipedum des Flüssigen beym Anfang der Bewegung betrachten, dessen drey Abmessungen da, db, dc sind. Bezeichnet man nun mit (ϱ) die ursprüngliche Dichtigkeit dieses Theilchens, so wird seine Masse $(\varrho) . da . db . dc$ seyn. Wir wollen dieses Parallelepipedum (A) nennen. Man sieht leicht, daſs es sich nach der Zeit t in ein schiefwinklichtes Parallelepipedum verwandeln wird; denn alle Theilchen, welche sich ursprünglich auf irgend einer Seite des Parallelepipedums (A) befanden, werden auch noch in einer Ebene seyn, wenigstens, wenn man die unendlich kleinen Gröſsen der zweyten Ordnung wegläſst: alle Theilchen, welche sich auf den parallelen Kanten von (A) befanden, werden sich auf kleinen geraden, einander gleichen und parallelen Linien befinden. Wir wollen dieses neue Parallelepipedum (B) nennen, und uns vorstellen, daſs durch die Enden der Kante, welche diejenigen Theilchen bilden, die im Parallelepipedum (A) die Kante dc ausmachten, zwey mit der Ebene der x und der y parallele Ebenen gelegt worden sind. Verlängert man die Kanten des Parallelepipedums (B), bis sie auf diese beiden Ebenen stoſsen, so wird man ein neues Parallelepipedum (C) haben, welches zwischen ihnen enthalten und (B) gleich seyn wird; denn es ist klar, daſs die eine der beiden Flächen eben so viel vom Parallelepipedum (B) wegnimmt, als die andere ihm hinzusetzt. Das Parallelepipedum (C) wird seine beiden Grundflächen parallel mit der Ebene der x und der y haben. Seine zwischen den beiden Grundflächen enthaltene Höhe wird offenbar dem Differenzial von z gleich seyn, so genommen, daſs man nur c als veränderlich ansieht; dieses giebt $\left(\frac{dz}{dc}\right) . dc$ für diese Höhe.

Um seine Grundfläche zu haben, darf man nur bemerken, daſs sie dem Durchschnitt von (B) mit einer der Ebene der x und der y parallelen Ebene gleich ist; wir wollen diesen Durchschnitt (ε) nennen. Für die Theilchen, aus welchen er besteht, wird der Werth von z unveränderlich seyn, und man hat also

$$0 = \left(\frac{dz}{da}\right) . da + \left(\frac{dz}{db}\right) . db + \left(\frac{dz}{dc}\right) . dc.$$

Es sollen δp und δq zwey an einander gränzende Seiten des Durchschnitts (ε) seyn: die erstere sey von den Theilchen der Fläche $db . dc$ des Parallelepipedums (A) gebildet; die zweyte von den Theilchen der Fläche $da . dc$. Gedenkt man sich nun durch die Enden der Seite δp zwey gerade mit der Axe der x parallele Linien gezogen, und verlängert man die mit δp parallele Seite des Parallelogramms (ε), bis sie auf diese gerade Linien trifft; so werden dieselben ein Parallelogramm (λ) enthalten, welches (ε) gleich seyn, und dessen Grundfläche mit der Axe der x parallel seyn wird. Da die Seite δp aus den Theilchen der Fläche $db . dc$ bestehet, für welche der Werth von z unveränderlich ist, so sieht man leicht, daſs die Höhe des Parallelogramms (λ) dem Differenzial von y gleich ist, wenn man a, z und t als beständige Gröſsen ansieht; dieses giebt

$$dy = \left(\frac{dy}{db}\right) . db + \left(\frac{dy}{dc}\right) . dc$$

$$0 = \left(\frac{dz}{db}\right) . db + \left(\frac{dz}{dc}\right) . dc,$$

und hieraus erhält man

$$dy = \frac{\left[\left(\frac{dy}{db}\right) . \left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{dc}\right) . \left(\frac{dz}{db}\right)\right] . db.}{\left(\frac{dz}{dc}\right)}$$

Dies ist der Ausdruck für die Höhe des Parallelogramms (λ). Seine Grundlinie ist dem Durchschnitt dieses Parallelogramms durch eine mit der Axe der x parallelen Ebene gleich. Dieser Durchschnitt besteht aus den Theilchen des Parallelepipedums (A), für welche z und y beständig sind; seine Länge ist also dem Differenzial von x gleich, so genommen, daſs man z, y und t beständig setzt; dieses giebt die drey folgenden Gleichungen

$$dx = \left(\frac{dx}{da}\right) . da + \left(\frac{dx}{db}\right) . db + \left(\frac{dx}{dc}\right) . dc$$

$$o = \left(\frac{dy}{da}\right) . da + \left(\frac{dy}{db}\right) . db + \left(\frac{dy}{dc}\right) . dc$$

$$o = \left(\frac{dz}{da}\right) . da + \left(\frac{dz}{db}\right) . db + \left(\frac{dz}{dc}\right) . dc.$$

Der Kürze wegen, setze man [78])

$\beta =$

78) Man kann aus dem Werth von dx zwey Differenziale, z. B. db und dc eliminiren. Man multiplicire die erste der drey gegebenen Gleichungen mit $\left(\frac{dy}{dc}\right)$, die zweyte mit $-\left(\frac{dx}{dc}\right)$, ihre Summe giebt:

$$dx . \left(\frac{dy}{dc}\right) = \left[\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\right] da + \left[\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\right] db \ldots (1).$$

Man multiplicire ferner die erste Gleichung mit $\left(\frac{dz}{dc}\right)$, die dritte mit $-\left(\frac{dx}{dc}\right)$, so erhält man, wenn man sie addirt, folgende:

$$dx . \left(\frac{dz}{dc}\right) = \left[\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dz}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\right] da + \left[\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dz}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\right] db \ldots (2).$$

Man multiplicire die Gleichung (1) mit dem Koefficienten von db in der Gleichung (2), und die Gleichung (2) mit dem Koefficienten von db in der Gleichung (1); die Differenz beider Gleichungen wird nicht mehr db enthalten, sondern bloſs dx und da. Der Koefficient von dx ist nämlich:

$$\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{db}\right) - \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) + \left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right),$$

oder, da sich zwey Glieder gegen einander aufheben,

$$\left(\frac{dx}{dc}\right)\left[\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)\right].$$

Der Koefficient von da ist:

$$+\left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)$$
$$+\left(\frac{dx}{dc}\right)^2\left(\frac{dy}{da}\right)\left(\frac{dz}{db}\right) - \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) + \left(\frac{dx}{da}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right)$$
$$+\left(\frac{dx}{db}\right)\left(\frac{dx}{dc}\right)\left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{da}\right) - \left(\frac{dx}{dc}\right)^2\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{da}\right).$$

Das erste und fünfte Glied heben sich gegen einander auf; die übrigen sechs Glieder haben den gemeinschaftlichen Factor $\left(\frac{dx}{dc}\right)$, und der Koefficient von da ist $\beta . \left(\frac{dx}{dc}\right)$, folglich

$$\left(\frac{dx}{dc}\right)\left[\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)\right] dx = \beta . \left(\frac{dx}{dc}\right) da .$$

und $dx = \dfrac{\beta . da}{\left(\frac{dy}{db}\right)\left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{dc}\right)\left(\frac{dz}{db}\right)}$.

$$\beta = \left(\frac{dx}{da}\right) \cdot \left(\frac{dy}{db}\right) \cdot \left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dx}{da}\right) \cdot \left(\frac{dy}{dc}\right) \cdot \left(\frac{dz}{db}\right) + \left(\frac{dx}{db}\right) \cdot \left(\frac{dy}{dc}\right) \cdot \left(\frac{dz}{da}\right)$$
$$- \left(\frac{dx}{db}\right) \cdot \left(\frac{dy}{da}\right) \cdot \left(\frac{dz}{dc}\right) + \left(\frac{dx}{dc}\right) \cdot \left(\frac{dy}{da}\right) \cdot \left(\frac{dz}{db}\right) - \left(\frac{dx}{dc}\right) \cdot \left(\frac{dy}{db}\right) \cdot \left(\frac{dz}{da}\right)$$

so erhält man

$$dx = \frac{\beta \cdot da}{\left(\frac{dy}{db}\right) \cdot \left(\frac{dz}{dc}\right) - \left(\frac{dy}{dc}\right) \cdot \left(\frac{dz}{db}\right)}.$$

Dies ist der Ausdruck der Grundlinie des Parallelogramms (λ). Der Flächeninhalt des Parallelogramms wird also $\frac{\beta \cdot da \cdot db}{\left(\frac{dz}{dc}\right)}$ seyn. Diese Gröſse drückt auch noch den Flächeninhalt des Parallelogramms (ε) aus; multiplicirt man denselben mit $\left(\frac{dz}{dc}\right) \cdot dc$, so erhält man $\beta \cdot da \cdot db \cdot dc$ für den körperlichen Inhalt der Parallelepipeda (C) und (B). Es sey ϱ die Dichte des Parallelepipedums (A) nach Verfluſs der Zeit t, so wird seine Masse gleich $\varrho\beta \cdot da \cdot db \cdot dc$ seyn. Setzt man dieselbe der ursprünglichen Masse $(\varrho) \cdot da \cdot db \cdot dc$ gleich, so wird man

$$\varrho\beta = (\varrho) \ldots (G)$$

haben; dies ist die Gleichung, welche sich auf das Zusammenhängen (continuité) der Flüssigkeit bezieht.

33. Man kann den Gleichungen (F) und (G) eine andere Gestalt geben, wodurch ihr Gebrauch in einigen Fällen bequemer wird. Es sollen u, v und ν die Geschwindigkeiten eines Theilchens der Flüssigkeit parallel mit den Axen der x, der y und der z seyn, so hat man

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = u; \quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = v; \quad \left(\frac{dz}{dt}\right) = \nu.$$

Man sehe u, v und ν als Functionen der Koordinaten x, y, z des Theilchens der Flüssigkeit und der Zeit t an, und differenziire diese Gleichungen, so erhält man [79])

79) Differenziirt man die Gleichung $\left(\frac{dx}{dt}\right) = u$ in Beziehung auf t, so erhält man, da u eine Function von x, y, z und t ist,

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) + u \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) + \upsilon \cdot \left(\frac{du}{dy}\right) + \nu \cdot \left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) + u \cdot \left(\frac{d\upsilon}{dx}\right) + \upsilon \cdot \left(\frac{d\upsilon}{dy}\right) + \nu \cdot \left(\frac{d\upsilon}{dz}\right)$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \left(\frac{d\nu}{dt}\right) + u \cdot \left(\frac{d\nu}{dx}\right) + \upsilon \cdot \left(\frac{d\nu}{dy}\right) + \nu \cdot \left(\frac{d\nu}{dz}\right).$$

Dadurch wird sich die Gleichung (F) des vorhergehenden Satzes in folgende verwandeln:

$$\left.\begin{aligned} \delta V - \frac{\delta p}{\varrho} = \delta x \cdot \left[\left(\frac{du}{dt}\right) + u \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) + \upsilon \cdot \left(\frac{du}{dy}\right) + \nu \cdot \left(\frac{du}{dz}\right)\right] \\ + \delta y \cdot \left[\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right) + u \cdot \left(\frac{d\upsilon}{dx}\right) + \upsilon \cdot \left(\frac{d\upsilon}{dy}\right) + \nu \cdot \left(\frac{d\upsilon}{dz}\right)\right] \\ + \delta z \cdot \left[\left(\frac{d\nu}{dt}\right) + u \cdot \left(\frac{d\nu}{dx}\right) + \upsilon \cdot \left(\frac{d\nu}{dy}\right) + \nu \cdot \left(\frac{d\nu}{dz}\right)\right] \end{aligned}\right\} \ldots (H).$$

Um die Gleichung, welche sich auf den Zusammenhang des Flüssigen bezieht, zu haben, wollen wir uns vorstellen, daſs im Werth von β des vorhergehenden Satzes a, b, c gleich x, y, z sind, und daſs x, y, z gleich $x + udt$, $y + \upsilon dt$, $z + \nu dt$ sind, wodurch die ursprünglichen Koordinaten a, b, c unendlich nahe bey x, y, z angenommen werden; so erhält man [80])

$$\beta = 1 + dt \cdot \left[\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{d\upsilon}{dy}\right) + \left(\frac{d\nu}{dz}\right)\right],$$

und die Gleichung (G) verwandelt sich in folgende:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{du}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right).$$

Hier substituire man für $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ ihre Werthe u, υ, ν, so erhält man die im Text gegebene Gleichung.

80) Man hat nämlich statt des dortigen $\left(\frac{dx}{da}\right)$ hier $\left(\frac{d \cdot (x + udt)}{dx}\right) = 1 + \left(\frac{du}{dx}\right) dt$; statt $\left(\frac{dy}{db}\right)$ hier $1 + \left(\frac{d\upsilon}{dy}\right) dt$; statt $\left(\frac{dz}{dc}\right)$ hier $1 + \left(\frac{d\nu}{dz}\right) dt$. Das Product dieser drey Gröſsen ist gleich

$$1 + \left[\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{d\upsilon}{dy}\right) + \left(\frac{d\nu}{dz}\right)\right] dt,$$

wenn man die zweyte und dritte Potenz von dt vernachläſsigt. Dies ist zugleich der Werth von β, weil die übrigen Glieder von β in das Quadrat von dt multiplicirt sind.

$$\varrho \cdot \left[\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{dv}{dy}\right) + \left(\frac{d\nu}{dz}\right)\right] dt + \varrho - (\varrho) = 0.$$

Sieht man ϱ als eine Function von x, y, z und von t an, so hat man [81])

$$(\varrho) = \varrho - dt \cdot \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) - u\,dt \cdot \left(\frac{d\varrho}{dx}\right) - v\,dt \cdot \left(\frac{d\varrho}{dy}\right) - \nu\,dt \cdot \left(\frac{d\varrho}{dz}\right);$$

dadurch verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in folgende:

$$0 = \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) + \left(\frac{d \cdot \varrho u}{dx}\right) + \left(\frac{d \cdot \varrho v}{dy}\right) + \left(\frac{d \cdot \varrho \nu}{dz}\right) \ldots (K).$$

Dies ist die Gleichung, welche der Zusammenhang des Flüssigen erfordert, und man sieht leicht, daſs man sie aus der Gleichung (G) des vorhergehenden Satzes erhält, wenn man dieselbe in Beziehung auf die Zeit t differenziirt.

Die Gleichung (H) läſst sich in einem sehr weit sich erstreckenden Fall integriren, nämlich wenn $u\delta x + v\delta y + \nu\delta z$ eine vollständige Variation von x, y, z und auſserdem ϱ irgend eine Function des Drucks p ist. Es sey dann $\delta\phi$ diese Variation; die Gleichung (H) giebt [82])

81) Die Gröſse ρ ist der Werth, welchen (ρ) nach der Zeit dt erhält, und folglich $\rho - d\rho = (\rho)$. Da nun ρ eine Function von x, y, z und t ist, so ist

$$d\rho = \left(\frac{d\rho}{dt}\right) dt + \left(\frac{d\rho}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\rho}{dy}\right) dy + \left(\frac{d\rho}{dz}\right) dz.$$

Die Koordinaten x, y, z ändern sich aber in der Zeit dt um die Gröſsen $u\,dt$, $v\,dt$, $\nu\,dt$, welches also die Werthe von dx, dy, dz sind. Folglich ist

$$d\rho = \left(\frac{d\rho}{dt}\right) dt + \left(\frac{d\rho}{dx}\right) u\,dt + \left(\frac{d\rho}{dy}\right) v\,dt + \left(\frac{d\rho}{dz}\right) \nu\,dt.$$

Substituirt man diesen Werth von $d\rho$ in die Gleichung $\rho - d\rho = (\rho)$, so erhält man die im Text gegebene Gleichung.

82) Wenn man die Gleichung $\delta\varphi = u\delta x + v\delta y + \nu\delta z$ in Beziehung auf die Zeit t differenziirt, so muſs man δx, δy, δz als beständige Gröſsen ansehen, weil x, y, z die ursprünglichen Koordinaten, und folglich von der Zeit t unabhängig sind. Man hat also

$$\delta \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \text{ oder } \left(\frac{d \cdot \delta\varphi}{dt}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) \delta x + \left(\frac{dv}{dt}\right) \delta y + \left(\frac{d\nu}{dt}\right) \delta z.$$

Nun ist ferner $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(\frac{\delta\varphi}{\delta x}\right) = u$; $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = \left(\frac{\delta\varphi}{\delta y}\right) = v$; und $\left(\frac{d\varphi}{dz}\right) = \left(\frac{\delta\varphi}{\delta z}\right) = \nu$, folglich

$$\tfrac{1}{2}\delta \cdot \left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] = u\delta u + v\delta v + \nu\delta\nu.$$

Nun ist $\delta u = \delta \left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \left(\frac{d \cdot \delta\varphi}{dx}\right)$; eben so $\delta v = \left(\frac{d \cdot \delta\varphi}{dy}\right)$ und $\delta\nu = \left(\frac{d \cdot \delta\varphi}{dz}\right)$, und folglich wenn man den Werth von $\delta\varphi$ wirklich differenziirt,

$$\delta V - \frac{\delta p}{\varrho} = \delta \cdot \left(\frac{d\Phi}{dt}\right) + \tfrac{1}{2}\delta \cdot \left[\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2\right].$$

Hieraus erhält man, wenn man in Beziehung auf δ integrirt,

$$V - \int \frac{\delta p}{\varrho} = \left(\frac{d\Phi}{dt}\right) + \tfrac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2\right].$$

Man sollte diesem Integral noch eine willkührliche beständige Gröfse, eine Function von t, hinzusetzen; man kann aber annehmen, dafs dieselbe in der Function Φ enthalten ist. Diese letztere Function giebt die Geschwindigkeit der flüssigen Theilchen parallel mit den Axen der x, der y und der z; denn man hat

$$u = \left(\frac{d\Phi}{dx}\right); \quad v = \left(\frac{d\Phi}{dy}\right); \quad \nu = \left(\frac{d\Phi}{dz}\right).$$

Die Gleichung (K), welche sich auf den Zusammenhang des Flüssigen bezieht, wird

$$0 = \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) + \left(\frac{d\varrho}{dx}\right) \cdot \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \left(\frac{d\varrho}{dy}\right) \cdot \left(\frac{d\Phi}{dy}\right) + \left(\frac{d\varrho}{dz}\right) \cdot \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)$$
$$+ \varrho\left[\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2\Phi}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2\Phi}{dz^2}\right)\right].$$

Folglich hat man für gleichartige Flüssigkeiten

$$0 = \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2\Phi}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2\Phi}{dz^2}\right).$$

Man kann bemerken, dafs die Function $u \,.\, \delta x + v \,.\, \delta y + \nu \,.\, \delta z$ immer eine vollständige Variation von x, y, z seyn wird, wenn sie es in einem einzigen Augenblick ist. Denn wenn man annimmt, dafs sie in irgend einem Augenblick gleich $\delta\Phi$ ist, so wird sie im folgenden Augenblick

$$\delta u = \left(\frac{du}{dx}\right)\delta x + \left(\frac{dv}{dx}\right)\delta y + \left(\frac{d\nu}{dx}\right)\delta z$$
$$\delta v = \left(\frac{du}{dy}\right)\delta x + \left(\frac{dv}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{d\nu}{dy}\right)\delta z$$
$$\delta \nu = \left(\frac{du}{dz}\right)\delta x + \left(\frac{dv}{dz}\right)\delta y + \left(\frac{d\nu}{dz}\right)\delta z.$$

Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung, so findet man, dafs die Summe der beiden Gröfsen $\tfrac{1}{2}\delta\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right]$ und $\delta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$ dem zweyten Theil der Gleichung (H) gleich ist.

$$\delta\Phi + \delta t\left[\left(\frac{du}{dt}\right).\delta x + \left(\frac{dv}{dt}\right).\delta y + \left(\frac{d\nu}{dt}\right).\delta z\right]$$

seyn. Sie wird also noch in diesem neuen Augenblick eine vollständige Variation seyn, wenn $\left(\frac{du}{dt}\right).\delta x + \left(\frac{dv}{dt}\right).\delta y + \left(\frac{d\nu}{dt}\right).\delta z$ eine vollständige Variation im ersten Augenblick ist. Nun giebt aber die Gleichung (H) für diesen Augenblick

$$\left(\frac{du}{dt}\right).\delta x+\left(\frac{dv}{dt}\right).\delta y + \left(\frac{d\nu}{dt}\right).\delta z = \delta V - \tfrac{1}{2}\delta.\left[\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Phi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)^2\right].$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist folglich eine vollständige Variation von x, y, z, und die Function $u.\delta x + v.\delta y + \nu.\delta z$ ist eine vollständige Variation in dem folgenden Augenblick, wenn sie es in einem Augenblick ist; sie ist dann in allen Augenblicken eine vollständige Variation.

Wenn die Bewegungen sehr klein sind, so kann man die Quadrate und Producte von u, v und ν vernachläſsigen; die Gleichung (H) wird so folgende werden:

$$\delta V - \frac{\delta p}{\varrho} = \left(\frac{du}{dt}\right).\delta x + \left(\frac{dv}{dt}\right).\delta y + \left(\frac{d\nu}{dt}\right).\delta z.$$

In diesem Fall wird also $u.\delta x + v.\delta y + \nu.\delta z$ eine vollständige Variation, wenn p, wie wir angenommen haben, eine Function von ϱ ist. Nennt man diese Variation $\delta\Phi$, so erhält man

$$V - \int\frac{\delta p}{\varrho} = \left(\frac{d\Phi}{dt}\right),$$

und wenn die Flüssigkeit gleichartig ist, so wird die Gleichung des Zusammenhangs sich in folgende verwandeln:

$$0 = \left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2\Phi}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2\Phi}{dz^2}\right).$$

Diese beiden Gleichungen enthalten die ganze Theorie der kleinen wellenförmigen Bewegungen gleichartiger Flüssigkeiten.

34. Wir wollen nun eine flüssige gleichartige Masse betrachten, welche sich gleichförmig um die Axe der x dreht. Es sey n die Winkelumdrehungsgeschwindigkeit in einem Abstand von der Axe, welchen wir für die Einheit der Abstände annehmen wollen, so wird man $v = -nz$; $\nu = ny$ haben. Da-

durch wird sich die Gleichung (H) des vorhergehenden Satzes in folgende verwandeln [83]):

$$\frac{\delta p}{\varrho} = \delta V + n^2 \,.\, [y \delta y + z \delta z];$$

diese Gleichung ist möglich, weil ihre beiden Theile vollständige Differenziale sind. Die Gleichung (K) des nämlichen Satzes wird sich in folgende verwandeln [84]):

$$o = dt \,.\, \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) + \upsilon \,.\, dt \,.\, \left(\frac{d\varrho}{dy}\right) + \nu \,.\, dt \,.\, \left(\frac{d\varrho}{dz}\right);$$

und es ist klar, daſs dieser Gleichung Genüge geschieht, wenn die flüssige Masse

83) Man nehme, um die Gedanken zu fixiren, für die Axe der x die Erdaxe an; dann ist die Ebene der y und der z gleich der Ebene des Aequators. Es sey $\frac{z}{y} = \text{tang}\ \alpha$; der Winkel α wird sich in der Zeit dt um die Gröſse $n\,dt$ ändern. Man hat ferner $\sin \alpha = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ und $\cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, wo $\sqrt{x^2 + y^2}$ der Abstand des gegebenen Punktes von der Axe der x, und also beständig ist. Differenzirt man beide Gleichungen, und setzt man statt $d\alpha$ seinen Werth $n\,dt$, so erhält man, wenn man noch mit $\sqrt{x^2 + y^2}$ multiplicirt:

$$n \,.\, dt \,.\, \cos \alpha \,.\, \sqrt{x^2 + y^2} = dz \text{ und } - n dt \,.\, \sin \alpha \,.\, \sqrt{x^2 + y^2} = dy;$$

oder $n \,.\, dt \,.\, y = dz$ und $- n\,dt \,.\, z = dy$;
oder $n\,dt \,.\, y = \nu\,dt$ und $- n\,dt \,.\, z = \upsilon\,dt$;
folglich $ny = \nu$ und $- nz = \upsilon$.

Hieraus erhält man $n = \left(\frac{d\nu}{dy}\right)$ und $- n = \left(\frac{d\upsilon}{dz}\right)$; alle übrige partielle Differenziale von ν und υ, so wie alle Differenziale von u sind gleich Null; die letztern weil u selbst gleich Null ist. Die Gleichung (H) verwandelt sich dadurch in folgende:

$$\delta V - \frac{\delta p}{\varrho} = - \delta y \,.\, n^2 \,.\, y - \delta z \,.\, n^2 \,.\, z = - n^2 \,.\, [y \delta y + z \delta z],$$

$$\text{oder } \delta V + n^2\, [y \delta y + z \delta z] = \frac{\delta p}{\varrho}.$$

84) Da $u = o$ ist, so giebt die Gleichung (K) $o = \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) + \left(\frac{d \,.\, \varrho\upsilon}{dy}\right) + \left(\frac{d \,.\, \varrho\nu}{dz}\right)$,

$$\text{oder } o = \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) + \left(\frac{d\varrho}{dy}\right) \upsilon + \left(\frac{d\upsilon}{dy}\right) \varrho + \left(\frac{d\varrho}{dz}\right) \nu + \left(\frac{d\nu}{dz}\right) \varrho.$$

Nun ist $\upsilon = - nz$ und $\left(\frac{d\upsilon}{dy}\right) = - \left(\frac{d \,.\, nz}{dy}\right) = o$. Eben so $\left(\frac{d\nu}{dz}\right) = \left(\frac{d \,.\, ny}{dz}\right) = o$,

folglich $o = \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) + \upsilon \,.\, \left(\frac{d\varrho}{dy}\right) + \nu \,.\, \left(\frac{d\varrho}{dz}\right)$.

gleichartig ist. Den Gleichungen für die Bewegung der Flüssigen geschieht dann Genüge, und folglich ist diese Bewegung möglich.

Im Abstand $\sqrt{y^2 + z^2}$ von der Umdrehungsaxe ist die Centrifugalkraft dem Quadrat $n^2 \,.\, (y^2 + z^2)$ der Geschwindigkeit, dividirt durch diesen Abstand, gleich; die Function $n^2 \,.\, (y\delta y + z\delta z)$ ist also das Product dieser Centrifugalkraft in das Element ihrer Richtung [85]). Vergleicht man daher die vorhergehende Gleichung für die Bewegung des Flüssigen mit der allgemeinen Gleichung für das Gleichgewicht des Flüssigen im 17ten Satz, so sieht man, daſs die Bedingungen der Bewegung, wovon die Rede ist, auf die Bedingungen des Gleichgewichts einer flüssigen Masse zurückgeführt werden können, auf welche die nämlichen Kräfte, und die aus der Umdrehungsbewegung entstehende Mittelpunktsfliehkraft wirken; welches überdies für sich klar ist.

Wenn die äuſsere Oberfläche einer flüſsigen Masse frey ist, so hat man an dieser Fläche $\delta p = 0$ und folglich

$$0 = \delta V + n^2 \,.\, (y\delta y + z\delta z);$$

hieraus folgt, daſs die Zusammengesetzte aller Kräfte, welche auf jedes Theilchen der äuſsern Oberfläche wirken, senkrecht auf diese Fläche seyn muſs; sie muſs noch auſserdem gegen das Innere der flüssigen Masse gerichtet seyn. Sind diese Bedingungen erfüllt, so wird eine flüssige Masse selbst dann im Gleichgewicht seyn, wenn man annimmt, daſs sie einen festen Körper, was er auch für eine Gestalt hat, bedecke.

Der Fall, welchen wir so eben betrachtet haben, ist einer von denjenigen, wo die Variation $u \,.\, \delta x + v \,.\, \delta y + v \,.\, \delta z$ nicht vollständig ist; denn diese Variation wird alsdann $-n \,.\, (z\delta y - y\delta z)$. Man darf also nicht in der Theorie der Ebbe und Fluth des Meers annehmen, daſs die Variation, wovon hier die Rede ist, vollständig ist, weil sie es nicht in dem sehr einfachen Fall ist, wenn das Meer keine andere als die Umdrehungsbewegung hätte, welche ihm und der Erde gemein ist.

85) Die Centrifugalkraft ist gleich $\frac{n^2 (y^2 + z^2)}{\sqrt{y^2 + z^2}} = n^2 \,.\, \sqrt{y^2 + z^2}$.

Das Element ihrer Richtung ist $\delta \,.\, \sqrt{y^2 + z^2} = \frac{y\delta y + z\delta z}{\sqrt{y^2 + z^2}}$.

Das Product beider Gröſsen ist $n^2 \,[y\delta y + z\delta z]$.

35. Wir wollen nun die Schwankungen einer flüssigen Masse betrachten, welche ein Sphäroid bedeckt, dessen Umdrehungsbewegung um die Axe der x gleich nt ist; und wir wollen annehmen, daſs durch die Wirkung sehr kleiner Kräfte das Gleichgewicht derselben sehr wenig gestöhrt wird. Es sey beym Anfang der Bewegung r der Abstand eines flüssigen Theilchens vom Schwerpunkt des von ihm bedeckten Sphäroids, welchen wir unbeweglich annehmen; es sey θ der Winkel, welchen der Halbmesser r mit der Axe der x macht, und ϖ der Winkel, welchen die durch die Axe der x und durch diesen Halbmesser gehende Ebene mit der Ebene der x und der y macht. Wir nehmen an, daſs nach der Zeit t der Halbmesser r sich in $r + \alpha s$, der Winkel θ in $\theta + \alpha u$, und der Winkel ϖ in $nt + \varpi + \alpha v$ ändert, wo αs, αu, αv sehr kleine Gröſsen sind, deren Quadrate und Producte wir vernachläſsigen werden; man erhält so [86])

$$x = (r + \alpha s) \,.\, \cos\,(\theta + \alpha u);$$
$$y = (r + \alpha s) \,.\, \sin\,(\theta + \alpha u) \,.\, \cos\,(nt + \varpi + \alpha v);$$
$$z = (r + \alpha s) \,.\, \sin\,(\theta + \alpha u) \,.\, \sin\,(nt + \varpi + \alpha v).$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (F) des 32sten Satzes, so wird man, wenn man das Quadrat von α vernachläſsigt, folgende Gleichung erhalten [87]):

αr^2

86) Man nenne, wie vorher, um die hier vorkommenden Ebenen sich leichter vorstellen zu können, die Ebene der x und y, die Ebene des Aequators; die Ebene von x und r, die Ebene der Ekliptik; so ist θ die Länge des gegebenen Punktes, und ϖ die Schiefe der Ekliptik; es sey D die Abweichung und A die gerade Aufsteigung desselben Punktes, dessen rechtwinklichte Koordinaten x, y, z sind.

Dann ist $z = r \,.\, \sin D = r \,.\, \sin\varpi \,.\, \sin\theta \ldots (1)$;

$r \,.\, \cos D$ ist die Hypotenuse des Dreyecks, dessen Seiten x und y sind, und A ist der der Seite y gegenüberstehende Winkel; folglich $y = r \,.\, \cos D \,.\, \sin A \ldots (2)$ und $x = r \,.\, \cos D \,.\, \cos A \ldots (3)$

Man hat aber durch die sphärische Trigonometrie $\cos D = \frac{\cos\theta}{\cos A}$; dieser Werth von $\cos D$ in (2) und (3) substituirt giebt (4) $y = r \,.\, \cos\theta \,.\, \mathrm{tang}\, A$ und (5) $x = r \,.\, \cos\theta$. Die sphärische Trigonometrie giebt $\mathrm{tang}\, A = \mathrm{tang}\,\theta \,.\, \cos\varpi$; dadurch verwandelt sich die Gleichung (4) in folgende:

$$(6)\; y = r \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\varpi.$$

Die Gleichungen (1), (5) und (6) geben die im Text gegebenen Gleichungen, wenn man statt x, y, z, r, θ, ϖ die Werthe setzt, welche diese Gröſsen nach der Zeit t haben.

87) Es sey $(r + \alpha s) \sin(\theta + \alpha u) = A$, so ist $y = A \,.\, \cos\,(nt + \varpi + \alpha v)$ und $z = A \,.\, \sin(nt + \varpi + \alpha v)$.

Da ferner r, θ und ϖ von t unabhängig sind, so ist

dy

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha . r^2 . \delta\theta . \left[\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - 2n . \sin\theta . \cos\theta . \left(\frac{dv}{dt}\right)\right] \\
&+ \alpha . r^2 . \delta\varpi . \left[\sin\theta^2 . \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + 2n . \sin\theta . \cos\theta . \left(\frac{du}{dt}\right) + \frac{2n . \sin\theta^2}{r} . \left(\frac{ds}{dt}\right)\right] \\
&+ \alpha\delta r . \left[\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) - 2nr . \sin\theta^2 . \left(\frac{dv}{dt}\right)\right] \\
&= \frac{n^2}{2} . \delta . [(r + \alpha s)^2 . \sin(\theta + \alpha u)^2] + \delta V - \frac{\delta p}{\varrho}.
\end{aligned}\right\} (L).$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dA}{dt}\right) . \cos(nt + \varpi + \alpha v) - \alpha . \left(\frac{dv}{dt}\right) . A . \sin(nt + \varpi + \alpha v) - n . A . \sin(nt + \varpi + \alpha v).$$

Differenziirt man dieses Differenzial von neuem in Beziehung auf t, und läfst man die Glieder weg, welche α^2 enthalten würden, so erhält man

$$\left[\frac{d . \left[\left(\frac{dA}{dt}\right) . \cos(nt + \varpi + \alpha v)\right]}{dt}\right] = \left(\frac{d^2A}{dt^2}\right) . \cos(nt + \varpi + \alpha v) - n . \left(\frac{dA}{dt}\right) . \sin(nt + \varpi + \alpha v).$$

Ferner $-\alpha . \left[\frac{d . \left[\left(\frac{dv}{dt}\right) A . \sin(nt + \varpi + \alpha v)\right]}{dt}\right] = -\alpha \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) . A . \sin(nt + \varpi + \alpha v) - A \left(\frac{dv}{dt}\right) . n . \cos(nt + \varpi + \alpha v)$

$$-n . \left[\frac{d . [A . \sin(nt + \varpi + \alpha v)]}{dt^2}\right] = -n . \left(\frac{dA}{dt}\right) \sin(nt + \varpi + \alpha v) - n^2 A . \cos(nt + \varpi + \alpha v) - nA . \alpha \left(\frac{dv}{dt}\right) . \cos(nt + \varpi + \alpha v).$$

Vereinigt man diese Glieder, und schreibt man der Kürze wegen τ statt $nt + \varpi + \alpha v$, so erhält man

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2A}{dt^2}\right) . \cos\tau - \alpha . \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) . A . \sin\tau - 2n . \left(\frac{dA}{dt}\right) \sin\tau - n^2 A . \cos\tau - 2n . A . \alpha . \left(\frac{dv}{dt}\right) . \cos\tau.$$

Eben so ist

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2A}{dt^2}\right) \sin\tau + \alpha . \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) . A . \cos\tau + 2n . \left(\frac{dA}{dt}\right) \cos\tau - n^2 . A . \sin\tau - 2nA . \alpha . \left(\frac{dv}{dt}\right) \sin\tau.$$

In den Variationen δx, δy, δz bezieht sich δ nicht auf die Zeit t; man mufs also die davon abhängenden Gröfsen αs, αu, αv, nt als beständig ansehen, dann ist

$$\delta y = \delta A . \cos\tau - \delta\varpi . A . \sin\tau \text{ und } \delta z = \delta A . \sin\tau + \delta\varpi . A . \cos\tau.$$

Man sieht nun sogleich, dafs, wenn man $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ mit $\cos\tau$ und $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ mit $\sin\tau$ multiplicirt, sich in ihrer Summe diejenigen Glieder aufheben, welche in $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ und in $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ entgegengesetzte Zeichen haben, hingegen wenn man $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ mit $-\sin\tau$ und $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ mit $\cos\tau$ multiplicirt, sich in der Summe beider Producte diejenigen Glieder aufheben, welche in $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ gleiche Zeichen haben. In beiden Fällen haben die übrig bleibenden Glieder den Factor $\sin\tau^2 + \cos\tau^2 = 1$. Man erhält so

$$\delta y . \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \delta z . \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \delta A . \left(\frac{d^2A}{dt^2}\right) - n^2 A . \delta A - 2n\alpha A . \delta A . \left(\frac{dv}{dt}\right) + \alpha \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) A^2 . \delta\varpi$$
$$+ 2n . A . \left(\frac{dA}{dt}\right) . \delta\varpi.$$

Auf der äufsern Fläche des Flüssigen hat man $\delta p = 0$; man hat noch überdies im Zustande des Gleichgewichts

$$0 = \frac{n^2}{2}\,\delta\,.\,[(r + \alpha s)\,.\,\sin(\theta + \alpha u)]^2 + (\delta V),$$

wo (δV) der Werth von δV im Zustande des Gleichgewichts ist. Man nehme an, dafs die Flüssigkeit, wovon die Rede ist, das Meer ist; so wird die Variation (δV) das Product der Schwere in das Element ihrer Richtung seyn. Man nenne g die Schwere, und αy die Erhöhung eines Wassertheilchens seiner Oberfläche über die Fläche des Gleichgewichts, welche Fläche man als die wahre Horizontalfläche des Meers ansehen kann. Die Variation (δV) wird durch diese Erhebung um die Gröfse $-\alpha g\,.\,\delta y$ im Zustande der Bewegung wachsen, weil die Schwere sehr nahe in der Richtung der αy und gegen ihren Anfangspunkt zu wirkt. Bezeichnet man ferner mit $\alpha\delta V'$ den Theil von δV, welchen die neuen Kräfte hervorbringen, die im Zustande der Bewegung auf das Theilchen wirken, und welche theils von den Aenderungen, die durch diesen Zustand die Attractionen des Sphäroids und des Flüssigen erfahren, theils von äufsern Attractionen abhangen, so wird man an der Oberfläche

$$\delta V = (\delta V) - \alpha g\,.\,\delta y + \alpha\delta V'$$

Man hat nun ferner, wenn man nur die erste Potenz von α behält,

$$\left(\frac{d^2A}{dt^2}\right) = \alpha\,.\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\sin\theta + \alpha\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right).\,r\,.\,\cos\theta \text{ und } \delta A = \delta r\,.\,\sin\theta + \delta\theta\,.\,r\,.\,\cos\theta;$$

$$A\,.\,\delta A = \tfrac{1}{2}\,\delta\,.\,(A^2) \text{ und } \alpha A\delta A = \alpha r\,.\,\sin\theta\,.\,\delta\,.\,(r\,.\sin\theta) = \alpha r\,.\,\delta r\,.\,\sin\theta^2 + \alpha r^2\,.\,\delta\theta\,.\,\sin\theta\,.\,\cos\theta,$$

endlich $\alpha A^2 = \alpha\,.\,r^2\,.\,\sin\theta^2$ und $A\left(\frac{dA}{dt}\right) = \alpha\left(\frac{ds}{dt}\right) r\,.\,\sin\theta^2 + \alpha\left(\frac{du}{dt}\right) r^2\,.\,\sin\theta\,.\,\cos\theta.$

Substituirt man diese Werthe und bemerkt man noch, dafs man

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \alpha\,.\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right).\,\cos\theta - \alpha r\,.\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right).\,\sin\theta \text{ und } \delta x = \delta r\,.\,\cos\theta - \delta\theta\,.\,r\,.\,\sin\theta$$

hat, so erhält man $\delta x\,.\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \delta y\,.\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \delta z\,.\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) =$

$$\alpha r^2\,.\,\delta\theta\left[\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - 2n\left(\frac{dv}{dt}\right)\sin\theta\,.\,\cos\theta\right]$$

$$+\,\alpha r^2\,.\,\delta\varpi\left[\sin\theta^2\,.\left(\frac{d^2v}{dt}\right) + 2n\,.\,\sin\theta\,.\,\cos\theta\,.\left(\frac{du}{dt}\right) + \frac{2n\,.\,\sin\theta^2}{r}\,.\left(\frac{ds}{dt}\right)\right]$$

$$+\,\alpha\,\delta r\,.\left[\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) - 2nr\,.\,\sin\theta^2\,.\left(\frac{dv}{dt}\right)\right]$$

$$-\,\frac{n^2}{2}\,\delta\,.\,[(r + \alpha s)^2\,.\,\sin(\theta + \alpha u)^2].$$

haben. Die Variation $\frac{n^2}{2} . \delta . [(r + \alpha s) . \sin(\theta + \alpha u)]^2$ wächst um die Gröſse $\alpha n^2 . \delta y . r . \sin\theta^2$ vermöge der Höhe des Wassertheilchens über den Meershorizont; man kann aber diese Gröſse in Vergleichung mit dem Gliede $-\alpha g . \delta y$ vernachläſsigen, weil das Verhältniſs $\frac{n^2 . r}{g}$ der Centrifugalkraft unterm Aequator zur Schwere einem sehr kleinen Bruch, nämlich $\frac{1}{289}$ gleich ist. Der Halbmesser r ist endlich für die Oberfläche des Meers sehr nahe eine beständige Gröſse, weil sie nur sehr wenig von einer Kugelfläche verschieden ist; man kann also hier δr gleich Null setzen. Die Gleichung (L) verwandelt sich so für die Oberfläche des Meers in folgende:

$$r^2 . \delta\theta . \left[\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - 2n . \sin\theta . \cos\theta . \left(\frac{dv}{dt}\right)\right]$$
$$+ r^2 . \delta\varpi . \left[\sin\theta^2 . \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + 2n . \sin\theta . \cos\theta . \left(\frac{du}{dt}\right) + \frac{2n . \sin\theta^2}{r} . \left(\frac{ds}{dt}\right)\right]$$
$$= - g . \delta y + \delta V';$$

wo die Variationen δy und $\delta V'$ in Rücksicht der zwey veränderlichen Gröſsen θ und ϖ zu nehmen sind.

Wir wollen nun die Gleichung für den Zusammenhang des Flüssigen betrachten. Hierzu wollen wir uns beym Anfang der Bewegung ein rechtwinklichtes Parallelepipedum gedenken, dessen Höhe dr, Breite $r d\varpi . \sin\theta$ und Länge $r d\theta$ sey. Wir nennen r', θ', ϖ' das, was r, θ, ϖ nach Verfluſs der Zeit t werden. Folgt man den Schlüssen des 32sten Satzes, so wird man finden, daſs nach Verfluſs dieser Zeit der körperliche Inhalt des flüssigen Theilchens einem rechtwinklichten Parallelepipedum gleich ist, dessen Höhe $\left(\frac{dr'}{dr}\right) . dr$ ist. Seine Breite ist

$$r' . \sin\theta' . \left[\left(\frac{d\varpi'}{d\varpi}\right) . d\varpi + \left(\frac{d\varpi'}{dr}\right) . dr\right]$$

wo man aber dr vermittelst der Gleichung $0 = \left(\frac{dr'}{d\varpi}\right) . d\varpi + \left(\frac{dr'}{dr}\right) . dr$ eliminiren muſs. Seine Länge ist endlich

$$r' . \left[\left(\frac{d\theta'}{dr}\right) . dr + \left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right) . d\theta + \left(\frac{d\theta'}{d\varpi}\right) . d\varpi\right]$$

wo man aber dr und $d\varpi$ vermittelst der Gleichungen

$$o = \left(\frac{dr'}{dr}\right) . dr + \left(\frac{dr'}{d\theta}\right) . d\theta + \left(\frac{dr'}{d\varpi}\right) . d\varpi \text{ und}$$

$$o = \left(\frac{d\varpi'}{dr}\right) . dr + \left(\frac{d\varpi'}{d\theta}\right) . d\theta + \left(\frac{d\varpi'}{d\varpi}\right) . d\varpi \text{ eliminiren mufs.}$$

Setzt man also

$$\beta' = \left(\frac{dr'}{dr}\right).\left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right).\left(\frac{d\varpi'}{d\varpi}\right) - \left(\frac{dr'}{dr}\right).\left(\frac{d\theta'}{d\varpi}\right).\left(\frac{d\varpi'}{d\theta}\right) + \left(\frac{dr'}{d\theta}\right).\left(\frac{d\theta'}{d\varpi}\right).\left(\frac{d\varpi'}{dr}\right)$$
$$- \left(\frac{dr'}{d\theta}\right).\left(\frac{d\theta'}{dr}\right).\left(\frac{d\varpi'}{d\varpi}\right) + \left(\frac{dr'}{d\varpi}\right).\left(\frac{d\theta'}{dr}\right).\left(\frac{d\varpi'}{d\theta}\right) - \left(\frac{dr'}{d\varpi}\right).\left(\frac{d\theta'}{d\theta}\right).\left(\frac{d\varpi'}{dr}\right);$$

so wird der körperliche Inhalt des Theilchens, nach Verflufs der Zeit t, $\beta' . r'^2 . \sin\theta . dr . d\theta . d\varpi$ seyn. Nennt man also (ϱ) die ursprüngliche Dichte des Theilchens und ϱ seine der Zeit t entsprechende Dichte; so wird man, wenn man den ursprünglichen Ausdruck seiner Masse ihrem Ausdruck nach der Zeit t gleich setzt,

$$\varrho . \beta' . r'^2 . \sin\theta' = (\varrho) . r^2 . \sin\theta$$

haben; dies ist die Gleichung für den Zusammenhang des Flüssigen. Im gegenwärtigen Fall ist

$$r' = r + \alpha s; \quad \theta' = \theta + \alpha u; \quad \varpi' = nt + \varpi + \alpha v;$$

man erhält dadurch, wenn man die Gröfsen von der Ordnung α^2 vernachläfsigt [88])

$$\beta' = 1 + \alpha\left(\frac{ds}{dr}\right) + \alpha\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \alpha\left(\frac{dv}{d\varpi}\right).$$

Nimmt man nun an, dafs nach Verflufs der Zeit t die ursprüngliche Dichte (ϱ) des Flüssigen sich in $(\varrho) + \alpha\varrho'$ verwandelt, so giebt die vorhergehende Gleichung für den Zusammenhang des Flüssigen folgende [89]):

88) Man sehe die 80ste Anmerkung.

89) Setzt man statt ρ seinen Werth $(\rho) + \alpha\rho'$ und statt β' seinen Werth

$$1 + \alpha\left(\frac{ds}{dr}\right) + \alpha\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \alpha\left(\frac{dv}{d\varpi}\right), \text{ so verwandelt sich die Gleichung}$$

$\rho\beta^{(1)} . r'^2 . \sin\theta' - (\rho) r^2 . \sin\theta = o$ in folgende:

$$[(\rho) r'^2 . \sin\theta' - (\rho) r^2 . \sin\theta] + (\rho)\alpha . r'^2 . \sin\theta' \left[\left(\frac{ds}{dr}\right) + \left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right)\right]$$
$$+ \alpha\rho' . \beta' . r'^2 . \sin\theta' = o.$$

Man sieht sogleich, dafs man in den beiden letzten Gliedern des ersten Theils dieser Gleichung $r^2 . \sin\theta$

$$o = r^2 \cdot \left[\varrho' + (\varrho) \cdot \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{u \cdot \cos\theta}{\sin\theta} \right] \right] + (\varrho) \cdot \left(\frac{d \cdot r^2 s}{dr}\right).$$

36. Wir wollen nun diese Resultate auf die Schwankungen des Meers anwenden. Da seine Masse gleichartig ist, so hat man $\varrho' = o$ und folglich

$$o = \left(\frac{d \cdot r^2 s}{dr}\right) + r^2 \cdot \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{u \cdot \cos\theta}{\sin\theta} \right].$$

Wir nehmen nun an, daſs die Tiefe des Meers in Vergleichung mit dem Halbmesser r des Erdsphäroids sehr klein ist, welches in der Natur Statt zu haben scheint; wir wollen sie mit γ bezeichnen, wo γ eine sehr kleine Function von θ und von ϖ ist, welche vom Gesetz dieser Tiefe abhängt. Integrirt man die vorhergehende Gleichung in Beziehung auf r, von der Oberfläche des festen Körpers, welchen das Meer bedeckt, bis zur Oberfläche des Meers; so sieht man, daſs der Werth von s einer Function von θ, ϖ und t, welche aber von r unabhängig ist, und einer sehr kleinen Function gleich seyn wird, welche in Rücksicht auf u und auf v von der nämlichen Ordnung der Kleinheit seyn wird, als die Function $\frac{\gamma}{r}$. Nun sieht man aber leicht, daſs auf der Oberfläche des vom Meer bedeckten festen Körpers, wenn die Winkel θ und ϖ sich in $\theta + \alpha u$ und $nt + \varpi + \alpha v$ verwandeln, der Abstand eines diese Oberfläche berührenden Wassertheilchens vom Schwerpunkt der Erde nur um eine in Vergleich mit αu und αv sehr kleine Gröſse sich ändert, welche mit den Producten dieser Gröſsen

statt $r'^2 \cdot \sin\theta'$ und 1 statt β' setzen muſs, weil sie schon in α multiplicirt sind. Das erste Glied derselben Gleichung ist gleich

$(\rho)\,[(r + \alpha s)^2 \sin(\theta + \alpha u) - r^2 . \sin\theta] = (\rho)\,[(r^2 + 2\alpha r s) . (\sin\theta + \alpha u . \cos\theta) - r^2 . \sin\theta]$
$= (\rho)\,[2\alpha r s . \sin\theta + \alpha u\, r^2 . \cos\theta]$, wo man, wie immer, die in α^2 multiplicirten Glieder wegläſst. Dadurch verwandelt sich diese Gleichung in Folgende:

$$(\rho) . \alpha . r^2 . \sin\theta \left[\frac{2\alpha r s}{r^2} + \frac{u . \cos\theta}{\sin\theta} + \left(\frac{ds}{dr}\right) + \left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) \right] + \rho' . \alpha . r^2 . \sin\theta = o.$$

Nun ist aber $\frac{2\alpha r s}{r^2} + \left(\frac{ds}{dr}\right) = \left(\frac{d . r^2 s}{dr}\right) . \frac{1}{r^2}$. Substituirt man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung, und dividirt man sie durch $\alpha . \sin\theta$, so erhält man

$$(\rho)\, r^2 . \left[\left(\frac{d . r^2 s}{dr}\right) \frac{1}{r^2} + \frac{u . \cos\theta}{\sin\theta} + \left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \rho' \right] = o,$$

oder $(\rho) \left(\frac{d . r^2 s}{dr}\right) + r^2 \left[(\rho) \left[\frac{u . \cos\theta}{\sin\theta} + \left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right)\right] + \rho' \right] = o.$

in die Eccentricität des vom Meer bedeckten Erdsphäroids von einerley Ordnung seyn wird. Die von r unabhängige Function, welche im Ausdruck von s sich befindet, ist also sehr klein und von der nämlichen Ordnung; man kann also überhaupt s gegen u und v vernachläfsigen. Dadurch verwandelt sich die im 35sten Satz gegebene Gleichung für die Bewegung des Meers an seiner Oberfläche, in folgende:

$$r^2 \,.\, \delta\theta \,.\, \left[\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) - 2n \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\theta \left(\frac{dv}{dt}\right)\right]$$
$$+ r^2 \,.\, \delta\varpi \,.\, \left[\sin\theta^2 \,.\, \left(\frac{d^2v}{dt^2}\right) + 2n \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\theta \,.\, \left(\frac{du}{dt}\right)\right] = -g \,.\, \delta y + \delta V' \ldots \text{(M)}.$$

Die Gleichung (L) des nämlichen Satzes, welche sich auf jeden Punkt des Innern der Masse des Flüssigen bezieht, giebt im Zustande des Gleichgewichts

$$o = \frac{n^2}{2} \,.\, \delta \,.\, [(r + \alpha s)^2 \,.\, \sin(\theta + \alpha u)^2] + (\delta V) - \frac{(\delta p)}{\varrho},$$

wo (δV) und (δp) die Werthe von δV und von δp sind, welche im Zustande des Gleichgewichts den Gröfsen $r + \alpha s$, $\theta + \alpha u$, $\varpi + \alpha v$ zugehören. Man nehme an, dafs man im Zustande der Bewegung

$$\delta V = (\delta V) + \alpha \,.\, \delta V'; \qquad \delta p = (\delta p) + \alpha \,.\, \delta p'$$

hat, so wird die Gleichung (L) folgende geben [90]):

$$\left\{\frac{d \,.\, \left(V' - \frac{p'}{\varrho}\right)}{dr}\right\} = \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right) - 2nr \,.\, \sin\theta^2 \,.\, \left(\frac{dv}{dt}\right).$$

90) Der zweyte Theil der Gleichung (L) verwandelt sich, wenn man statt δV und δp ihre angenommenen Werthe setzt, in folgenden Ausdruck:

$$\frac{n^2}{2} \,.\, \delta\,[(r + \alpha s)^2 \,.\, \sin(\theta + \alpha u)^2] + (\delta V) - \frac{(\delta p)}{\varrho} + \alpha\,\delta V' - \alpha \,.\, \frac{\delta p'}{\varrho}.$$

Wir haben unmittelbar vorher gefunden, dafs die drey ersten Glieder dieses Ausdrucks gleich Null sind; der zweyte Theil der Gleichung (L) ist also gleich $\alpha\,\delta V' - \alpha \,.\, \frac{\delta p'}{\varrho}$ oder $\alpha \,.\, \delta \,.\, \left(V' - \frac{p'}{\varrho}\right)$, weil ϱ eine beständige Gröfse ist. Setzt man nun der Kürze wegen die Koefficienten von $\alpha \,.\, r^2 \,.\, \delta\theta$ im ersten Theil der Gleichung (L) gleich A, den von $\alpha r^2 \delta\varpi$ gleich B, den von $\alpha\,\delta r$ gleich C, so wird die Gleichung (L) folgende:

$$\alpha \,.\, \delta \,.\, \left(V' - \frac{p'}{\varrho}\right) = \alpha r^2 \,.\, \delta\theta \,.\, A + \alpha r^2 \,.\, \delta\varpi \,.\, B + \alpha\,\delta r \,.\, C,$$

oder wenn man mit α dividirt,

$$\delta \,.\, \left(V' - \frac{p'}{\varrho}\right) = A \,.\, r^2 \,.\, \delta\theta + B \,.\, r^2 \,.\, \delta\varpi + C \,.\, \delta r.$$

Die Gleichung (M) zeigt uns, daſs $n \,.\, \left(\frac{dv}{dt}\right)$ mit y oder s von derselben Ordnung, und folglich von der Ordnung $\frac{\gamma u}{r}$ ist; der Werth des ersten Theils dieser Gleichung ist also von derselben Ordnung. Multiplicirt man nun diesen Werth mit dr, und integrirt man ihn von der Oberfläche des vom Meer bedeckten Sphäroids bis zur Oberfläche des Meers, so wird man die Gröſse $V' - \frac{p'}{\varrho}$ einer sehr kleinen Function von der Ordnung $\frac{\gamma s}{r}$ und einer Function von θ, ϖ und t gleich finden. Diese letztere Function ist von r unabhängig, und wir werden sie mit λ bezeichnen. Wenn man also in der Gleichung (L) des 35 sten Satzes nur auf die zwey veränderlichen Gröſsen θ und ϖ Rücksicht nimmt, so wird sie sich in die Gleichung (M) verwandeln, mit dem einzigen Unterschied, daſs der zweyte Theil sich in $\delta\lambda$ verwandeln wird. Da aber λ von der Tiefe, in welcher sich das Wassertheilchen, welches wir betrachten, befindet, unabhängig ist; so muſs die Gleichung (L), wenn man das Theilchen sehr nahe an der Oberfläche nimmt, mit der Gleichung (M) übereinstimmen; man hat also $\delta\lambda = \delta V' - g \,.\, \delta y$, und folglich

$$\delta \,.\, \left(V' - \frac{p'}{\varrho}\right) = \delta V' - g \,.\, \delta y,$$

wo der Werth von $\delta V'$ im zweyten Theil dieser Gleichung sich auf die Oberfläche des Meers bezieht. Wir werden in der Theorie der Ebbe und Fluth des Meers sehen, daſs dieser Werth sehr nahe für alle auf dem nämlichen Erdhalbmesser sich befindende Theilchen, von der Oberfläche des vom Meer bedeckten festen Körpers an bis zur Oberfläche des Meers, gleich groſs ist; man hat also für alle diese Theilchen $\frac{\delta p'}{\varrho} = g \,.\, \delta y$; dieses giebt p' gleich $\varrho g y$ plus einer von

Hieraus folgt unmittelbar

$$\left[\frac{\delta \,.\, \left(V' - \frac{p'}{\varrho}\right)}{\delta r}\right] = c$$

und folglich auch $$\left[\frac{d \,.\, \left(V' - \frac{p'}{\varrho}\right)}{dr}\right] = c.$$

θ, ϖ und r unabhängigen Function. Nun ist aber an der Fläche des Meershorizonts der Werth von $\alpha p'$ dem Druck der kleinen Wassersäule αy gleich, welche sich über diese Fläche erhebt, und dieser Druck ist gleich $\alpha\varrho \,.\, gy$; man hat also überall im Innern der flüssigen Masse von der Oberfläche des vom Meer bedeckten Sphäroids an bis zur Horizontalfläche des Meers, $p' = \varrho g y$; folglich empfindet irgend ein Punkt der Oberfläche des vom Meer bedeckten Sphäroids einen Druck, der um das ganze Gewicht der kleinen zwischen der Oberfläche und der Horizontalfläche des Meers enthaltenen Wassersäule gröſser ist als im Zustande des Gleichgewichts. Diese Zunahme des Drucks wird negativ für die Punkte, wo sich die Oberfläche des Meers unterhalb der Horizontalfläche vertieft.

Es folgt aus dem, was wir so eben gesehen haben, daſs die Gleichung (L), wenn man nur auf die Aenderungen von θ und von ϖ Rücksicht nimmt, sich für alle innern Theile der flüssigen Masse in die Gleichung (M) verwandelt. Die Werthe von u und v werden also für alle in einem und demselben Erdhalbmesser liegende Theilchen des Meers durch die nämlichen Differenzialgleichungen bestimmt; und nimmt man an, wie wir dies in der Theorie der Ebbe und Fluth des Meers thun werden, daſs beym Anfang der Bewegung die Werthe von u, $\left(\frac{du}{dt}\right)$, v, $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ für alle auf dem nämlichen Halbmesser sich befindende Theilchen dieselben waren; so werden diese Theilchen auch noch während der Schwankungen des Flüssigen auf dem nämlichen Halbmesser bleiben. Man kann also für den kleinen Theil des Erdhalbmessers, der zwischen dem vom Meer bedeckten festen Körper und zwischen der Oberfläche des Meers enthalten ist, r, u und v sehr nahe als beständige Gröſsen ansehen; integrirt man daher die Gleichung

$$0 = \left(\frac{d \,.\, r^2 s}{dr}\right) + r^2 \,.\, \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{u \,.\, \cos\theta}{\sin\theta}\right]$$

in Beziehung auf r, so erhält man [91])

$0 =$

91) Integrirt man die Gleichung $0 = \left(\frac{d \,.\, (r^2 s)}{dr}\right) dr + r^2 \,.\, dr \,.\, \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{ds}\right) + \frac{u \,.\, \cos\theta}{\sin\theta}\right]$ in Beziehung auf r, so erhält man

$0 =$

$$o = r^2 s - (r^2 s) + r^2\gamma \,.\, \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{u\,.\,\cos\theta}{\sin\theta}\right];$$

wo $(r^2 s)$ der Werth von $r^2 s$ an der Oberfläche des vom Meer bedeckten Sphäroids ist. Die Function $r^2 s - (r^2 s)$ ist sehr nahe $r^2[s - (s)] + 2r\gamma\,.\,(s)$ gleich, wo (s) der Werth von s an der Oberfläche des Sphäroids ist. Man kann das Glied $2r\gamma\,.\,(s)$ wegen der Kleinheit von γ und von (s) vernachlässigen. Hierdurch erhält man

$$r^2 s - (r^2 s) = r^2 [s - (s)].$$

Nun ist die Tiefe des Meers, welche den Winkeln $(\theta + \alpha u)$ und $(nt + \varpi + \alpha v)$ entspricht, gleich $\gamma + \alpha\,.\,[s - (s)]$. Setzt man den Anfangspunkt der Winkel θ und $nt + \varpi$ in einen gegebenen Punkt und Mittagskreis auf der Oberfläche der Erde, welches, wie wir bald sehen werden, erlaubt ist, so wird diese nämliche Tiefe gleich $\gamma + \alpha u\,.\,\left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right) + \alpha v\,.\,\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right) +$ der Erhöhung αy des flüssigen Theilchens der Meersoberfläche über die Horizontalfläche; man wird also

$$s - (s) = y + u\,.\,\left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right) + v\,.\,\left(\frac{d\gamma}{d\varpi}\right)$$

haben. Hierdurch wird sich die Gleichung für die Continuität des Flüssigen in folgende verwandeln:

$$y = -\left(\frac{d\,.\,\gamma u}{d\theta}\right) - \left(\frac{d\,.\,\gamma v}{d\varpi}\right) - \frac{\gamma u\,.\,\cos\theta}{\sin\theta}\ .\ .\ .\ (N).$$

Man kann bemerken, daſs die Winkel θ und $nt + \varpi$ in dieser Gleichung von einem auf der Erde festen Punkt und Mittagskreis gezählt, und daſs in der Gleichung (M) die nämlichen Winkel in Beziehung auf die Axe der x und auf

$$o = r^2 s + \tfrac{1}{3} r^3\,.\,\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{u\,.\,\cos\theta}{\sin\theta}\right].$$

Dieses Integral ist von der Oberfläche des festen Körpers bis zur Oberfläche des Meers zu nehmen, d. h. von $r - \gamma$ bis r; man erhält also

$$o = r^2 s - (r^2 s) - \tfrac{1}{3}\,[(r-\gamma)^3 - r^3]\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{u\,.\,\cos\theta}{\sin\theta}\right].$$

Nun ist, wenn man die höhern Potenzen von γ vernachläſsigt, $(r^2 s)$ gleich $(r-\gamma)^2\,.\,(s)$ gleich $r^2(s) - 2r\gamma\,.\,(s)$; und $-\tfrac{1}{3}[(r-\gamma)^3 - r^3] = r^2\gamma$; folglich

$$o = r^2\,.\,[s - (s)] + 2r\gamma\,.\,(s) + r^2\gamma\,.\,\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv}{d\varpi}\right) + \frac{u\,.\,\cos\theta}{\sin\theta}\right],$$

wo man das Glied $2r\gamma\,.\,(s)$ vernachläſsigen kann, weil γ und (s) sehr klein sind.

eine Ebene, welche durch diese Axe geht und um dieselbe eine Umdrehungsbewegung, gleich n, hat, genommen worden sind. Nun sind aber diese Axe und diese Ebene auf der Oberfläche der Erde nicht unveränderlich, weil die Attraction und der Druck des Flüssigen, welches sie bedeckt, ihre Lage auf dieser Oberfläche, so wie auch die Umdrehungsbewegung des Sphäroids ein wenig ändern müssen. Man kann aber leicht sehen, daſs diese Aenderungen sich zu den Werthen von αu und von αv so verhalten, wie sich die Masse des Meers zu der des Erdsphäroids verhält. Um also in den beiden Gleichungen (M) und (N) die Winkel θ und $nt + \varpi$ auf einen auf der Oberfläche des Sphäroids unveränderlichen Punkt und Mittagskreis zu beziehen, braucht man nur u und v um Gröſsen von der Ordnung $\frac{\gamma u}{r}$ und $\frac{\gamma v}{r}$ zu ändern, Gröſsen, welche wir uns zu vernachläſsigen erlaubt haben. Man kann also in diesen Gleichungen annehmen, daſs αu und αv die Bewegungen des Flüssigen in Länge und Breite sind.

Man kann noch bemerken, daſs man, wenn man den Schwerpunkt des Sphäroids unbeweglich setzt, die Kräfte, welche durch die Rückwirkung des Meers auf ihn wirken, in entgegengesetzter Richtung an das flüssige Theilchen anbringen muſs. Da aber der gemeinschaftliche Schwerpunkt des Sphäroids und des Meers vermöge dieser Rückwirkung sich nicht ändert; so ist klar, daſs das Verhältniſs dieser Kräfte zu denen, welche durch die Wirkung des Sphäroids auf die Wassertheilchen wirken, von der nämlichen Ordnung, als das Verhältniſs der flüssigen Masse zu der des Sphäroids, und folglich von der Ordnung $\frac{\gamma}{r}$ ist; man kann sie also in der Berechnung von $\delta V'$ vernachläſsigen.

37. Wir wollen auf die nämliche Art die Bewegungen der Atmosphäre betrachten. Wir werden in dieser Untersuchung die Aenderungen der Wärme unter verschiedenen Breiten und verschiedenen Höhen, so wie auch alle unregelmäſsige Ursachen, welche dieselbe stöhren, bey Seite setzen, und nur auf die regelmäſsigen Ursachen, welche auf sie, so wie auf das Meer, wirken, Rücksicht nehmen. Wir werden folglich annehmen, daſs das Meer von einem elastischen Flüssigen von gleichförmiger Temperatur bedeckt ist; wir werden noch, der Erfahrung gemäſs, voraussetzen, daſs die Dichtigkeit des Flüssigen seinem Druck proportional ist. Diese Voraussetzung giebt der Atmosphäre eine unendliche

Höhe; man kann sich aber leicht versichern, daſs in einer sehr kleinen Höhe die Dichtigkeit schon so gering ist, daſs man sie wie Null ansehen kann.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir mit s', u', v' eben das für die Theilchen der Atmosphäre bezeichnen, was s, u, v für die Theilchen des Meers bezeichneten; so wird die Gleichung (L) des 35sten Satzes folgende geben:

$$\alpha r^2 . \delta\theta . \left[\left(\frac{d^2u'}{dt^2}\right) - 2n . \sin\theta . \cos\theta . \left(\frac{dv'}{dt}\right)\right]$$
$$+ \alpha r^2 . \delta\varpi . \left[\sin\theta^2 . \left(\frac{d^2v'}{dt^2}\right) + 2n . \sin\theta . \cos\theta . \left(\frac{du'}{dt}\right) + \frac{2n . \sin\theta^2}{r} . \left(\frac{ds'}{dt}\right)\right]$$
$$+ \alpha\delta r . \left[\left(\frac{d^2s'}{dt^2}\right) - 2nr . \sin\theta^2 . \left(\frac{dv'}{dt}\right)\right] = \frac{n^2}{2} . \delta . [(r + \alpha s')^2 . \sin(\theta + \alpha u')^2]$$
$$+ \delta V - \frac{\delta p}{\varrho}.$$

Wir werden anfangs die Atmosphäre im Zustande des Gleichgewichts betrachten, wo s', u' und v' gleich Null sind. Integrirt man alsdann die vorhergehende Gleichung, so giebt sie

$$\frac{n^2}{2} . r^2 . \sin\theta^2 + V - \int\frac{\delta p}{\varrho} = \text{beständige Gröſse.}$$

Da wir den Druck p der Dichte proportional angenommen haben, so werden wir $p = l . g . \varrho$ machen, wo g die Schwere an einem gegebenen Ort, wofür wir den Aequator annehmen werden, und l eine beständige Gröſse ist, welche die Höhe der Atmosphäre ausdrückt, wenn man sie überall eben so dicht wie an der Oberfläche des Meers annimmt: diese Höhe ist in Vergleichung mit dem Halbmesser des Erdsphäroids, wovon sie nur der 720 ste Theil ist, sehr klein [92]).

Das Integral $\int\frac{\delta p}{\varrho}$ ist der Gröſse $lg . \log \varrho$ gleich; die vorhergehende

92) Nach Schuckbourgh und Cotte ist die Barometerhöhe am Ufer des Meers $28^{z}\ 1,^{l}6$, oder gleich einer Wassersäule von 31,81 französischen Fuſsen. Da nun nach Lavoisier die Luft 811 mal leichter als das Wasser ist, so wird diese Wassersäule einer überall gleich dichten Luftsäule von 4298 Toisen gleich seyn. Der Halbmesser der Erde ist sehr nahe 3273000 Toisen, und folglich das Verhältniſs der Luftsäule zum Erdhalbmesser gleich 1 : 761. Dies Verhältniſs entfernt sich etwas von dem des Hrn. Verfassers; dieser Unterschied entsteht vorzüglich aus der Unsicherheit, welche in dem Verhältniſs der spezifischen Schwere des Quecksilbers zur spezifischen Schwere der Luft sich findet. Der Uebersetzer hat seine Data aus Lavoisier's Chemie genommen.

Gleichung für das Gleichgewicht der Atmosphäre verwandelt sich dadurch in folgende:

$$lg \,.\, \log \varrho = \text{beständige Gröſse} + V + \frac{n^2}{2} \,.\, r^2 \,.\, \sin \theta^2.$$

Der Werth von V ist an der Oberfläche des Meers für ein Lufttheilchen und für das anliegende Wassertheilchen gleich groſs, weil die Kräfte, welche auf beide Theilchen wirken, dieselben sind; die Bedingung des Gleichgewichts des Meers erfordert aber, daſs man

$$V + \frac{n^2}{2} \,.\, r^2 \,.\, \sin \theta^2 = \text{beständige Gröſse}$$

hat. Man hat also an dieser Oberfläche ϱ beständig, das heiſst die Dichtigkeit der das Meer berührenden Luftschicht ist im Zustande des Gleichgewichts überall von gleicher Gröſse.

Nennt man R den Theil des Halbmessers r, der zwischen dem Mittelpunkt des Sphäroids und der Meersoberfläche enthalten ist, und r' den Theil, der zwischen dieser Oberfläche und einem über derselben erhabenen Lufttheilchen enthalten ist; so wird r' bis auf Gröſsen von der Ordnung $\frac{\left(\frac{n^2}{g} \,.\, r'\right)^2}{R}$ der Höhe des Theilchens über der Oberfläche des Meers gleich seyn: wir werden die Gröſsen dieser Ordnung vernachläſsigen. Die Gleichung zwischen ϱ und r wird dann

$$lg \,.\, \log \varrho = \text{beständige Gröſse} + V + r' \,.\, \left(\frac{dV}{dr}\right) + \frac{r'^2}{2} \,.\, \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right) + \frac{n^2}{2} \,.\, R^2 \,.\, \sin \theta^2 + n^2 R r' \,.\, \sin \theta^2$$

geben, wo die Werthe von V, $\left(\frac{dV}{dr}\right)$ und $\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)$ sich auf die Oberfläche des Meers beziehen, an welcher man

$$\text{beständige Gröſse} = V + \frac{n^2}{2} \,.\, R^2 \,.\, \sin \theta^2$$

hat. An eben dieser Oberfläche ist die Schwere der Gröſse $-\left(\frac{dV}{dr}\right) - n^2 \,.\, R \,.\, \sin \theta^2$ gleich; wir werden sie mit g' bezeichnen. Da die Function $\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)$ mit der sehr

kleinen Gröſse r'^2 multiplicirt ist, so können wir sie in der Voraussetzung, daſs die Erde eine Kugel ist, bestimmen, und die Dichte der Atmosphäre in Vergleichung mit der Dichte der Erde vernachläſsigen; wir werden auf diese Art sehr nahe

$$-\left(\frac{dV}{dr}\right) = g' = \frac{m}{R^2}$$

haben, wo m die Masse der Erde ist; folglich $\left(\frac{d^2V}{dr^2}\right) = -\frac{2m}{R^3} = -\frac{2g'}{R}$;

man wird also $lg \,.\, \log \varrho =$ beständige Gröſse $- r'g' - \frac{r'^2}{R} \,.\, g'$ haben, woraus man

$$\varrho = \pi \,.\, c^{-\frac{r'g'}{lg} \,.\, \left(1+\frac{r'}{R}\right)}$$

erhält, wo c die Zahl, deren hyperbolischer Logarithme der Einheit gleich ist, und π eine beständige Gröſse bedeutet, welche offenbar der Dichte der Luft an der Oberfläche des Meers gleich ist.

Nennt man h und h' die Längen des Sekundenpendels an der Meersoberfläche unterm Aequator und unter der Breite des Lufttheilchens, welches wir betrachten; so wird man $\frac{g'}{g} = \frac{h'}{h}$, und folglich

$$\varrho = \pi \,.\, c^{-\frac{r'h'}{lh} \,.\, \left(1+\frac{r'}{R}\right)}$$

haben. Dieser Ausdruck für die Dichte der Luft zeigt, daſs die Lagen von gleicher Dichte überall gleich erhaben über die Meersfläche sind, wenn man die Gröſse $\frac{r'(h'-h)}{h}$ vernachläſsigt; man darf aber bey genauer Berechnung der Berghöhen aus barometrischen Beobachtungen diese Gröſse nicht vernachläſsigen.

Wir wollen nun die Atmosphäre im Zustande der Bewegung betrachten, und die Schwankungen einer horizontalen Lage, welche im Zustande des Gleichgewichts von gleicher Dichte ist, untersuchen. Es sey $\alpha\phi$ die Erhöhung eines Lufttheilchens über die Horizontalfläche, zu welcher sie im Zustande des Gleichgewichts gehört. Es ist klar, daſs vermöge dieser Erhebung der Werth von δV um die Differenzialänderung $-\alpha g \,.\, \delta\phi$ vermehrt werden wird; man wird so $\delta V = (\delta V) - \alpha g \,.\, \delta\phi + \alpha\delta V'$ erhalten, wo (δV) der Werth von δV ist, welcher im Zustande des Gleichgewichts der horizontalen Lage und den Winkeln

$\theta + \alpha u$ und $nt + \varpi + \alpha v$ entspricht; und wo $\delta V'$ der Theil von δV ist, welcher aus den neuen Kräften entsteht, welche im Zustande der Bewegung auf die Atmosphäre wirken.

Es sey (ϱ) die Dichte der Horizontallage im Zustande des Gleichgewichts, und $\varrho = (\varrho) + \alpha\varrho'$; man mache ferner $\frac{l\varrho'}{(\varrho)} = y'$, so wird man

$$\frac{\delta p}{\varrho} = \frac{lg \cdot \delta(\varrho)}{(\varrho)} + \alpha g \cdot \delta y'$$

haben. Man hat aber im Zustande des Gleichgewichts

$$0 = \frac{n^2}{2} \cdot \delta \cdot [(r + \alpha s)^2 \cdot \sin(\theta + \alpha u)^2] + (\delta V) - \frac{lg \cdot \delta(\varrho)}{(\varrho)}.$$

Die allgemeine Gleichung der Bewegung der Atmosphäre wird also in Bezug auf Horizontallagen, für welche δr sehr nahe gleich Null ist, sich in folgende verwandeln:

$$r^2 \cdot \delta\theta \cdot \left[\left(\frac{d^2u'}{dt^2}\right) - 2n \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \left(\frac{dv'}{dt}\right)\right]$$
$$+ r^2 \cdot \delta\varpi \cdot \left[\sin\theta^2 \cdot \left(\frac{d^2v'}{dt^2}\right) + 2n \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \left(\frac{du'}{dt}\right) + \frac{2n \cdot \sin\theta^2}{r} \cdot \left(\frac{ds'}{dt}\right)\right]$$
$$= \delta V' - g \cdot \delta\phi - g \cdot \delta y' + n^2 r \cdot \sin\theta^2 \cdot \delta[s' - (s')],$$

wo $\alpha(s')$ die Variation von r ist, welche im Zustande des Gleichgewichts den Variationen $\alpha u'$ und $\alpha v'$ der Winkel θ und ϖ entspricht.

Wir wollen nun annehmen, daſs alle Lufttheilchen, welche sich ursprünglich in einem Erdhalbmesser befanden, auch im Zustande der Bewegung beständig auf einem Halbmesser bleiben, welches, wie wir im Vorhergehenden gesehen haben, bey den Oscillationen des Meers Statt hat; und wir wollen sehen, ob diese Annahme den Gleichungen der Bewegung und des Zusammenhangs der atmosphärischen Flüssigkeit Genüge thun kann. Hierzu wird erfordert, daſs die Werthe von u' und von v' für alle diese Theilchen einerley Gröſse haben. Nun ist aber der Werth von $\delta V'$ für alle diese Theilchen sehr nahe gleich groſs, wie man in der Folge sehen wird, wenn wir die Kräfte bestimmen werden, woraus diese Variation entspringt. Es ist also nothwendig, daſs die Variationen $\delta\phi$ und $\delta y'$ für alle diese Theilchen gleich groſs sind, und daſs noch überdies die Gröſsen $2nr \cdot \delta\varpi \cdot \sin\theta^2 \cdot \left(\frac{ds'}{dt}\right)$ und $n^2 r \cdot \sin\theta^2 \cdot \delta \cdot [s' - (s')]$ in der vorhergehenden Gleichung vernachläſsigt werden können.

Wenn αy die Erhöhung der Oberfläche des Meers über seine Horizontalfläche ist, so hat man an der Oberfläche des Meers $\Phi = y$. Wir wollen nun untersuchen, ob die Annahmen, daſs $\Phi = y$ und daſs y für alle auf dem nämlichen Halbmesser sich befindende Lufttheilchen beständig ist, mit der Gleichung des Zusammenhangs des Flüssigen bestehen können. Diese Gleichung ist nach dem 35sten Satz folgende:

$$o = r^2 \cdot \left[\varrho' + (\varrho) \cdot \left[\left(\frac{du'}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv'}{d\varpi}\right) + \frac{u' \cdot \cos\theta}{\sin\theta}\right]\right] + (\varrho) \cdot \left(\frac{d \cdot r^2 s'}{dr}\right);$$

hieraus erhält man

$$y' = -l \cdot \left[\left(\frac{d \cdot r^2 s'}{r^2\, dr}\right) + \left(\frac{du'}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv'}{d\varpi}\right) + \frac{u' \cdot \cos\theta}{\sin\theta}\right].$$

$r + \alpha s'$ ist dem Werth von r an der Horizontalfläche, welche den Winkeln $\theta + \alpha u$ und $\varpi + \alpha v$ entspricht, plus der Erhöhung des Lufttheilchens über dieser Fläche gleich. Da der Theil von $\alpha s'$, welcher von der Aenderung der Winkel θ und ϖ abhängt, von der Ordnung $\frac{\alpha n^2 \cdot u}{g}$ ist, so kann man ihn im vorhergehenden Ausdruck von y' vernachläſsigen, und in diesem Ausdruck $s' = \Phi$ setzen. Setzt man ferner $\Phi = y$, so wird man $\left(\frac{d\Phi}{dr}\right) = o$ haben, weil alsdann der Werth von Φ für alle auf demselben Halbmesser sich befindende Theilchen derselbe ist. Da übrigens y nach dem Vorhergehenden von der Ordnung l oder $\frac{n^2}{g}$ ist, so wird der vorhergehende Ausdruck von y' folgender:

$$y' = -l \cdot \left[\left(\frac{du'}{d\theta}\right) + \left(\frac{dv'}{d\varpi}\right) + \frac{u' \cdot \cos\theta}{\sin\theta}\right].$$

Wenn also u' und v' für alle Theilchen, welche sich ursprünglich auf demselben Halbmesser befanden, dieselben Werthe haben, so wird auch der Werth von y' für alle diese Theilchen derselbe seyn. Es ist überdies aus dem, was wir so eben gesagt haben, sichtbar, daſs die Gröſsen $2nr \cdot \delta\varpi \cdot \sin\theta^2 \cdot \left(\frac{ds'}{dt}\right)$ und $n^2 r \cdot \sin\theta^2 \cdot \delta \cdot [s' - (s')]$ in der vorhergehenden Gleichung für die Bewegung der Atmosphäre vernachläſsigt werden können, welcher man alsdann dadurch Genüge thun kann, wenn man annimmt, daſs u' und v' für alle Lufttheilchen, welche ursprünglich auf dem nämlichen Halbmesser sich befanden, denselben Werth haben. Die Annahme, daſs alle diese Theilchen während der Schwankungen des Flüssi-

gen beständig auf demselben Halbmesser bleiben, kann also mit den Gleichungen der Bewegung und des Zusammenhangs der atmosphärischen Flüssigkeit bestehen. In diesem Fall sind die Schwankungen der verschiedenen Horizontallagen von gleicher Gröſse und werden vermittelst der folgenden Gleichungen bestimmt:

$$r^2 \, . \, \delta\theta \, . \left[\left(\frac{d^2u'}{dt^2}\right) - 2n \, . \sin\theta \, . \cos\theta \, . \left(\frac{dv'}{dt}\right)\right]$$

$$+ r^2 \, . \, \delta\varpi \, . \left[\sin\theta^2 \, . \left(\frac{d^2v'}{dt^2}\right) + 2n \, . \sin\theta \, . \cos\theta \, . \left(\frac{du'}{dt}\right)\right] = \delta V' - g \, . \, \delta y' - g \, . \, \delta y;$$

$$y' = -l \, . \left[\left(\frac{du'}{dt}\right) + \left(\frac{dv'}{d\varpi'}\right) + \frac{u' \, . \cos\theta}{\sin\theta}\right].$$

Diese Schwankungen der Atmosphäre müssen ähnliche Schwankungen in den Höhen des Barometers hervorbringen. Um dieselben vermittelst der erstern zu bestimmen, wollen wir ein in irgend einer Höhe über der Oberfläche des Meers festes Barometer betrachten. Die Höhe des Quecksilbers ist dem Druck proportional, welchen seine der Wirkung der Luft ausgesetzte Fläche erfährt; sie kann also durch $lg \, . \, \varrho$ ausgedrückt werden. Diese Fläche ist aber nach und nach der Wirkung der verschiedenen Horizontallagen, welche wie die Oberfläche des Meers steigen und sinken, ausgesetzt. Der Werth von ϱ an der Oberfläche des Quecksilbers ändert sich also erstens, weil er zu einer Horizontallage gehört, welche im Zustande des Gleichgewichts um die Gröſse αy weniger erhoben war; zweytens weil die Dichtigkeit einer Lage um die Gröſse $\alpha\varrho'$ oder $\frac{\alpha(\varrho) \, . \, y}{l}$ im Zustande der Bewegung zunimmt. Durch die erste Ursache verändert sich ϱ um $-\alpha y \, . \left(\frac{d\varrho}{dr}\right)$ oder $\frac{\alpha(\varrho) \, . \, y'}{l}$; die gänzliche Aenderung der Dichte ϱ an der Fläche des Quecksilbers ist also $\alpha(\varrho) \, . \, \frac{(y + y')}{l}$. Es folgt hieraus, daſs die Schwankungen des Quecksilbers im Barometer, wenn man seine Höhe im Zustande des Gleichgewichts k nennt, im Zustande der Bewegung durch die Function $\alpha k \, . \, \frac{(y + y')}{l}$ ausgedrückt werden. Sie sind also in allen Höhen über dem Meer einander ähnlich und den Barometerhöhen proportional.

Um nun die Schwankungen des Meers und der Atmosphäre zu bestimmen, braucht man nur die Kräfte zu kennen, welche auf diese beiden flüssigen Massen wirken, und die vorhergehenden Differenzialgleichungen zu integriren; dieses werden wir in der Folge thun.

Zwey

Zweytes Buch.

Vom Gesetz der allgemeinen Schwere und von der Bewegung der Schwerpunkte der himmlischen Körper.

Erstes Kapitel.

Von dem aus den Erscheinungen hergeleiteten Gesetz der allgemeinen Schwere.

1. Nachdem wir die Gesetze der Bewegung entwickelt haben, so wollen wir vermittelst dieser Gesetze und vermittelst der Gesetze der himmlischen Bewegungen, welche wir umständlich in unserm Werk Exposition du système du monde gegeben haben, uns zum allgemeinen Gesetz dieser Bewegungen erheben. Unter allen Erscheinungen scheint die elliptische Bewegung der Planeten und Kometen um die Sonne am geschicktesten zur Entdeckung desselben zu seyn; wir wollen daher sehen, was sie hierüber giebt. Wir nennen x und y die rechtwinklichten Koordinaten eines Planeten in der Ebene seiner Bahn, und wir nehmen für den Anfangspunkt den Mittelpunkt der Sonne an; wir nennen ferner P und Q die mit den Axen der x und y parallelen Kräfte, welche auf diesen Planeten während seiner relativen Bewegung um die Sonne wirken, und wir nehmen an, daſs diese Kräſte gegen den Anfangspunkt der Koordinaten wirken; es sey endlich dt das Element der Zeit, welches wir als beständig ansehen, so werden wir nach dem zweyten Kapitel des ersten Buchs folgende Gleichungen haben:

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} + P \qquad (1)$$

$$o = \frac{d^2y}{dt^2} + Q \qquad (2).$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $-y$, die zweyte mit x, und addirt sie, so erhält man [1])

$$o = \frac{d\,.\,(xdy - ydx)}{dt^2} + x\,.\,Q - y\,.\,P.$$

Man sieht leicht, dafs $xdy - ydx$ die doppelte Winkelfläche ist, welche der Radius vector des Planeten um die Sonne während des Augenblicks dt beschreibt [2]); diese Winkelfläche ist auch dem Differenzial der Zeit proportional, vermöge des ersten Keplerischen Gesetzes; man hat also

$$xdy - ydx = cdt,$$

wo c eine beständige Gröfse ist; folglich ist das Differenzial des ersten Theils dieser Gleichung gleich Null. Dieses giebt

$$x\,.\,Q - y\,.\,P = o.$$

Es folgt hieraus, dafs die Kräfte P und Q sich zu einander wie x und y verhalten, und dafs also ihre Zusammengesetzte durch den Anfangspunkt der Koordinaten, das heifst durch den Mittelpunkt der Sonne geht. Da übrigens die von dem Planeten beschriebene krumme Linie gegen die Sonne hohl ist, so ist es augenscheinlich, dafs die Kraft, wodurch dieselbe beschrieben wird, nach diesem Gestirn gerichtet ist.

Das Gesetz, dafs die Flächen den Zeiten, in welchen sie beschrieben worden, proportional sind, führt uns also zu dem ersten merkwürdigen Resultat, nämlich, dafs die Kraft, welche auf die Planeten und die Kometen wirkt, gegen den Mittelpunkt der Sonne gerichtet ist.

1) $\frac{xd^2y - yd^2x}{dt} + Qx - Py = o$. Nun ist aber, wenn man theilweise integrirt, $xd^2y = d\,.\,(xdy) - dx\,.\,dy$, und $-yd^2x = -d\,.\,(ydx) + dy\,.\,dx$; folglich die Summe beider Gröfsen gleich $d\,.\,(xdy) - d\,.\,(ydx)$ oder $d\,.\,(xdy - ydx)$.

2) Wenn man r den Radius vector und v den Winkel nennt, welchen er mit der Axe macht, so ist das doppelte Differenzial der Fläche gleich $r^2\,.\,dv$. Es ist aber $x = r \cos v$ und $y = r \sin v$ und $dx = dr\,.\cos v - dv\,.\,r \sin v$ und $dy = dr\,.\sin v + dv\,.\,r \cos v$; folglich hat man $-ydx = -y\,.\,dr\,.\cos v + y\,.\,dv\,.\,r \sin v$ und $xdy = x\,.\,dr \sin v + x\,.\,dv\,.\,r \cos v$, oder $-ydx = -r\,dr\,.\sin v \cos v + r^2\,dv\,.\sin v^2$ und $xdy = r\,.\,dr \sin v\,.\cos v + r^2\,.\,dv\,.\cos v^2$, folglich die Summe beider Gröfsen gleich $r^2\,.\,dv\,(\sin v^2 + \cos v^2) = r^2\,.\,dv$.

2. Wir wollen nun das Gesetz bestimmen, nach welchem diese Kraft in verschiedenen Abständen von diesem Gestirn wirkt. Es ist klar, daſs die Natur der elliptischen Bewegung uns auf dieses Gesetz führen muſs, weil die Planeten und Kometen bey jedem Umlauf sich abwechselnd der Sonne nähern und sich von ihr entfernen. Wir wollen in dieser Rücksicht die Differenzialgleichungen (1) und (2) des vorhergehenden Satzes vornehmen. Multiplicirt man die erste mit dx, die zweyte mit dy, und addirt sie, so erhält man

$$o = \frac{dx\,.\,d^2x + dy\,.\,d^2y}{dt^2} + P\,dx + Q\,dy,$$

und wenn man integrirt

$$o = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} + 2\,.\int(P\,dx + Q\,dy),$$

wo die willkührliche beständige Gröſse durch das Integralzeichen angedeutet wird. Substituirt man statt dt seinen Werth $\frac{x\,dy - y\,dx}{c}$, welcher durch das Gesetz, daſs die Flächen sich wie die Zeiten verhalten, gegeben ist, so erhält man

$$o = \frac{c^2\,.\,(dx^2 + dy^2)}{(x\,dy - y\,dx)^2} + 2\,.\int(P\,dx + Q\,dy).$$

Wir wollen nun um mehrerer Einfachheit willen die Koordinaten x und y in den Radius vector und in den von ihm beschriebenen Winkel, dem astronomischen Gebrauch gemäſs, verwandeln. Es sey r der aus dem Mittelpunkt der Sonne zum Mittelpunkt des Planeten gezogene Radius vector, und v der Winkel, welchen er mit der Axe der x macht, so wird man

$$x = r\,.\cos v\,; \qquad y = r\,.\sin v\,; \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

haben; hieraus erhält man

$$dx^2 + dy^2 = r^2\,dv^2 + dr^2 \text{ }^{3)}; \qquad x\,dy - y\,dx = r^2\,dv.$$

Bezeichnet man ferner durch ϕ die Hauptkraft, welche auf den Planeten wirkt, so wird man nach dem vorhergehenden Satz

3) Die Werthe von dx und dy sind in der zweyten Anmerkung gegeben worden; quadrirt man sie, so hat man

$$dx^2 = dr^2\,.\cos v^2 + dv^2\,.\,r^2\,.\sin v^2 - 2\,dr\,.\,dv\,.\,r\,.\sin v\,.\cos v$$
$$dy^2 = dr^2\,.\sin v^2 + dv^2\,.\,r^2\,.\cos v^2 + 2\,dr\,.\,dv\,.\,r\,.\sin v\,.\cos v$$

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + dv^2\,r^2\,.$$

Der Beweis der folgenden Formel findet sich in der zweyten Anmerkung selbst.

$$P = \Phi \,.\, \cos v; \qquad Q = \Phi \,.\, \sin v; \qquad \Phi = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

haben: dieses giebt

$$P\,dx + Q\,dy = \Phi\,dr\ ^{4)};$$

man wird also haben

$$0 = \frac{c^2 \,.\, (r^2\,dv^2 + dr^2)}{r^4\,dv^2} + 2\,.\int \Phi\,dr.$$

Hierdurch erhält man

$$dv = \frac{c\,dr}{r\,.\sqrt{-c^2 - 2r^2\,.\int \Phi\,dr}}; \quad (3)$$

diese Gleichung wird vermöge der Quadraturen den Werth von v durch r geben, wofern die Kraft Φ durch eine Function von r gegeben ist. Ist hingegen die Kraft unbekannt, die Natur der krummen Linie aber, welche durch sie beschrieben wird, gegeben: so wird man zur Bestimmung von Φ folgende Gleichung erhalten, wenn man den vorhergehenden Ausdruck von $2\,.\int \Phi\,dr$ differenziirt:

$$\Phi = \frac{c^2}{r^3} - \frac{c^2}{2}\,.\,\frac{d\,.\left(\frac{dr^2}{r^4\,dv^2}\right)}{dr}. \quad (4)$$

Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich der Mittelpunkt der Sonne befindet. Nennt man nun für die Ellipse, ϖ den Winkel, welchen die große Axe mit der Axe der x macht; nimmt man ferner den Brennpunkt für den Anfangspunkt der x an, und bezeichnet man die halbe große Axe mit a, und das Verhältniß der Eccentricität zur halben großen Axe mit e, so hat man [5])

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\cos(v - \varpi)},$$

eine Gleichung, welche sich in die Gleichung einer Parabel verwandelt, wenn $e = 1$ und a unendlich ist, und welche einer Hyperbel angehört, wenn e größer als die Einheit und a negativ ist. Diese Gleichung giebt [6])

4) Es ist $P\,dx = \varphi\,.\cos v\,.\,(dr\,.\cos v - dv\,.\,r\sin v) = dr\,.\,\varphi\cos v^2 - dv\,.\,\varphi\,.\,r\sin v\,.\cos v$ und $Q\,dy = \varphi\,.\sin v\,.\,(dr\,.\sin v + dv\,.\,r\cos v) = dr\,.\,\varphi\sin v^2 + dv\,.\,\varphi\,.\,r\sin v\,.\cos v$, folglich die Summe $P\,dx + Q\,dy = dr\,.\,\varphi\,(\cos v^2 + \sin v^2) = dr\,.\,\varphi$.

5) Man sehe Lalande's Astronomie dritte Auflage §. 3412.

6) Aus $r\,[1 + e\,.\cos(v - \varpi)] = a\,(1 - e^2)$ findet man durch Differenziiren $dr\,[1 + e\,.\cos(v - \varpi)] - dv\,.\,er\,.\sin(v - \varpi) = 0$; substituirt man statt $1 + e\,.\cos(v - \varpi)$ seinen

$$\frac{dr^2}{r^4\,dv^2} = \frac{2}{ar\,.\,(1-e^2)} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2\,(1-e^2)},$$

und folglich

$$\Phi = \frac{c^2}{a\,(1-e^2)}\,.\,\frac{1}{r^2}.$$

Wenn also die Bahnen der Planeten und Kometen Kegelschnitte sind, so verhält sich die Kraft Φ verkehrt wie das Quadrat des Abstandes des Mittelpunkts dieser Gestirne vom Mittelpunkt der Sonne.

Man sieht noch überdies, daſs, wenn die Kraft Φ sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält, oder durch $\frac{h}{r^2}$ ausgedrückt ist, wo h ein beständiger Koefficient ist, die vorhergehende Gleichung der Kegelschnitte der Differenzialgleichung (4) zwischen r und v, welche aus dem Ausdruck für Φ folgt, wenn man Φ in $\frac{h}{r^2}$ verwandelt, Genüge thun wird. Man hat alsdann $h = \frac{c^2}{a\,(1-e^2)}$; dies giebt eine Bedingungsgleichung zwischen den zwey willkührlichen Gröſsen a und e der Gleichung für die Kegelschnitte; die drey willkührlichen Gröſsen a, e und ϖ dieser Gleichung lassen sich also auf zwey von einander unterschiedene willkührliche Gröſsen bringen, und da die Differenzialgleichung zwischen r und v nur von der zweyten Ordnung ist, so ist die Gleichung für die Kegelschnitte ihr vollständiges Integral.

Es folgt hieraus, daſs, wenn die beschriebene krumme Linie ein Kegelschnitt ist, die Kraft sich verkehrt wie das Quadrat der Entfernungen ver-

Werth $\frac{a}{r}\,(1-e^2)$ aus der obigen Gleichung, so erhält man $\frac{dr}{r}\,.\,a\,(1-e^2) - dv\,.\,er\,.\sin(v-\varpi) = 0$; quadrirt man, so ist $\frac{dr^2}{r^2}\,.\,a^2\,.\,(1-e^2)^2 = dv^2\,.\,e^2\,r^2\,.\sin(v-\varpi)^2$. Nun ist $er\,.\cos(v-\varpi) = a\,(1-e^2) - r$, also $e^2\,r^2\cos(v-\varpi)^2 = a^2\,(1-e^2)^2 - 2\,ra\,(1-e^2) + r^2$ und folglich
$e^2\,r^2\sin(v-\varpi)^2 = -\,a^2\,(1-e^2)^2 + 2\,ra\,(1-e^2) + r^2\,(e^2-1)$. Dies substituirt wird
$\frac{dr^2}{r^2}\,.\,a^2\,(1-e^2)^2 = dv^2\,.\,[-\,a^2\,(1-e^2)^2 + 2\,ra\,(1-e^2) - r^2\,(1-e^2)]$, und also

$$\frac{dr^2}{r^4\,.\,dv^2} = -\,\frac{1}{r^2} + \frac{2}{r\,a\,(1-e^2)} - \frac{1}{a\,(1-e^2)},$$ und das Differenzial dieser Gleichung

$$d\,.\,\frac{dr^2}{r^4\,.\,dr^2} = +\,\frac{2}{r^3}\,.\,dr - \frac{2}{r^2\,.\,a\,(1-e^2)}\,dr.$$

hält, und umgekehrt, daſs wenn die Kraft sich verkehrt wie das Quadrat der Entfernungen verhält, die beschriebene krumme Linie ein Kegelschnitt ist.

3. Die Intensität der Kraft ϕ hängt für jeden Planeten und Kometen vom Koefficienten $\frac{c^2}{a\,(1-e^2)}$ ab; Keplers Gesetze verschaffen ein Mittel, ihn zu bestimmen. Nennt man nämlich T die Umlaufszeit des Planeten, so wird die Fläche, welche der Radius vector während dieser Zeit beschreibt, die Fläche der Planeten-Ellipse seyn, welche gleich $\pi\,.\,a^2\sqrt{1-e^2}$ ist, wenn π das Verhältniſs des halben Umfangs zum Halbmesser ist. Nun ist aber nach dem Vorhergehenden die während des Augenblicks dt beschriebene Fläche $\frac{1}{2}\,c\,dt$; das Gesetz, daſs die Flächen sich wie die Zeiten verhalten, wird also folgendes Verhältniſs geben:

$$\tfrac{1}{2}\,c\,dt : \pi\,a^2\,.\sqrt{1-e^2} = dt : T.$$

Hieraus erhält man

$$c = \frac{2\pi\,.\,a^2\,.\sqrt{1-e^2}}{T}.$$

Für die Planeten giebt Keplers Gesetz, daſs sich die Quadrate ihrer Umlaufszeiten wie die Würfel der groſsen Axen ihrer Ellipsen verhalten, $T^2 = k^2\,.\,a^3$, wo k für alle Planeten denselben Werth hat; man hat also

$$c = \frac{2\pi\,.\sqrt{a\,(1-e^2)}}{k}.$$

Nun ist $2a\,(1-e^2)$ der Parameter der Bahn, und die Werthe von c in verschiedenen Bahnen verhalten sich wie die in gleichen Zeiten vom Radius vector beschriebenen Flächen; diese Flächen verhalten sich also wie die Quadratwurzeln der Parameter ihrer Bahnen.

Dieses Verhältniſs hat auch bey den Kometenbahnen Statt, man mag sie unter einander, oder mit den Planetenbahnen vergleichen; dies ist einer der Grundsätze ihrer Theorie, welche so genau allen ihren beobachteten Bewegungen Genüge thut. Da die groſsen Axen ihrer Bahnen und ihrer Umlaufszeiten unbekannt sind, so berechnet man die Bewegung dieser Gestirne in einer parabolischen Bahn, und setzt $c = \frac{2\pi\,.\sqrt{2D}}{k}$, wenn man durch D ihren klein-

sten Abstand von der Sonne bezeichnet, welches eben so viel ist, als ob man im vorhergehenden Ausdruck für c, $e = 1$ und a unendlich groſs setzt. Man hat also auch für die Kometen $T^2 = k^2 . a^3$, so daſs man die groſsen Axen ihrer Bahnen bestimmen kann, wenn ihre Umlaufszeiten bekannt sind. Nun giebt der Ausdruck für c

$$\frac{c^2}{a(1-e^2)} = \frac{4\pi^2}{k^2};$$

man hat also

$$\Phi = \frac{4\pi^2}{k^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Da der Koefficient $\frac{4\pi^2}{k^2}$ für alle Planeten und Kometen unveränderlich ist, so folgt daraus, daſs die Kraft Φ sich für jeden dieser Körper verkehrt wie das Quadrat seiner Entfernung vom Mittelpunkt der Sonne verhält, und daſs sie sich von einem Körper zum andern nur im Verhältniſs dieser Entfernungen ändert. Hieraus folgt, daſs sie für alle diese Körper gleich groſs ist, wenn man annimmt, daſs sie in gleicher Entfernung von der Sonne sind.

Die schönen Gesetze Keplers haben uns nun darauf geführt, den Mittelpunkt der Sonne wie den Brennpunkt einer anziehenden Kraft zu betrachten, welche sich in allen Richtungen bis ins Unendliche erstreckt, und wie das Quadrat der Entfernung abnimmt. Das Gesetz, daſs die von dem Radius vector beschriebenen Winkelflächen den Zeiten, welche sie zu beschreiben angewendet werden, proportional sind, zeigt uns, daſs die Hauptkraft, welche auf die Planeten und Kometen wirkt, beständig gegen den Mittelpunkt der Sonne gerichtet ist. Die elliptische Gestalt der Planetenbahnen und die sehr nahe parabolischen Bewegungen der Kometen beweisen, daſs diese Kraft für jeden Planeten und Kometen sich verkehrt wie das Quadrat der Entfernung dieser Gestirne von der Sonne verhält. Aus dem Gesetz endlich, daſs die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Würfel der groſsen Axen der Bahnen verhalten, oder aus dem Gesetz, daſs die in gleichen Zeiten von den Radius vectors, aber in verschiedenen Bahnen, beschriebenen Flächen sich wie die Quadratwurzeln der Parameter dieser Bahnen verhalten, ein Gesetz, welches das vorhergehende in sich enthält und sich auch auf die Kometen erstreckt; aus diesem Gesetz folgt, daſs diese Kraft für alle Planeten und Kometen in gleichen Entfernungen von der Sonne

gleich grofs ist, so dafs diese Körper in diesem Fall mit gleicher Geschwindigkeit gegen die Sonne fallen würden.

4. Gehen wir von den Planeten auf die Satelliten über, so finden wir, dafs sie, weil sie Keplers Gesetze in ihren Bewegungen um ihre Planeten beynahe beobachten, gegen die Mittelpunkte dieser Planeten im verkehrten Verhältnifs der Quadrate ihrer Entfernungen von diesen Mittelpunkten schwer sind; sie müssen beynahe eben so, wie ihre Planeten gegen die Sonne schwer seyn, damit ihre relative Bewegung um diese Planeten beynahe eben so sey, als ob diese Planeten unbeweglich wären. Die Satelliten werden also gegen die Planeten und gegen die Sonne von Kräften angezogen, welche sich verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen verhalten. Die elliptische Gestalt der Bahnen der drey ersten Satelliten Jupiters ist unbeträchtlich die des vierten aber sehr merklich. Die grofse Entfernung Saturns hat bis jetzt verhindert, die elliptische Gestalt der Bahnen seiner Satelliten zu erkennen, die des 6ten ausgenommen, dessen Bahn merklich elliptisch scheint. Das Gesetz der Gravitation der Satelliten Jupiters, Saturns und Uranus zeigt sich aber vorzüglich im Verhältnifs ihrer mittlern Bewegungen zu ihren mittlern Entfernungen vom Mittelpunkt dieser Planeten. Dieses Gesetz besteht darinn, dafs für jedes Satellitensystem die Quadrate ihrer Umlaufszeiten sich wie ihre mittlern Entfernungen vom Mittelpunkt des Hauptplaneten verhalten. Wir wollen uns also vorstellen, dafs ein Satellit eine Kreisbahn beschreibe, dessen Halbmesser seiner mittlern Entfernung vom Mittelpunkt des Hauptplaneten gleich sey; es sey a diese Entfernung; T die Anzahl von Sekunden, welche die Dauer seiner Syderal-Umlaufszeit ausdrückt; π das Verhältnifs des halben Umkreises zum Halbmesser; so wird $\frac{2a\pi}{T}$ der kleine Bogen seyn, welchen der Satellit während einer Sekunde beschreibt. Wenn die anziehende Kraft des Planeten aufhörte, ihn in seiner Bahn zurück zu halten, so würde er sich in der Richtung der Tangente von dessen Mittelpunkt um eine Gröfse entfernen, welche dem Queersinus des Bogens $\frac{2a\pi}{T}$, das heifst der Gröfse $\frac{2a\pi^2}{T^2}$, gleich ist; die Attractionskraft verursacht also, dafs der Satellit um eben diese Gröfse sich dem Planeten nähert. Für einen andern Satelliten, dessen mittlere Entfernung vom Mittelpunkt des Planeten a' und dessen Umlaufszeit in Sekun-

Sekunden ausgedrückt T' ist, wird der Fall in einer Sekunde $\frac{2\,a'\,\pi^2}{T'^2}$ seyn. Nennt man also Φ und Φ' die anziehenden Kräfte des Planeten in den Entfernungen a und a', so ist klar, dafs sie sich wie die Gröfsen verhalten werden, um welche die beiden Satelliten in einer Sekunde fallen; man hat also

$$\Phi : \Phi' = \frac{2\,a\,\pi^2}{T^2} : \frac{2\,a'\,\pi^2}{T'^2}.$$

Vermöge des Gesetzes, dafs die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Würfel der mittlern Entfernungen der Satelliten vom Mittelpunkt ihres Planeten verhalten, ist

$$T^2 : T'^2 = a^3 : a'^3.$$

Aus diesen zwey Proportionen kann man leicht schliefsen, dafs

$$\Phi : \Phi' = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{a'^2}$$

ist; die Kräfte Φ und Φ' verhalten sich also verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen.

5. Da die Erde nur einen Satelliten hat, so ist die elliptische Gestalt der Mondsbahn die einzige Erscheinung am Himmel, aus der wir das Gesetz der anziehenden Kraft erkennen können. Nun wird aber die elliptische Bewegung des Monds durch die Attractionskraft sehr merklich gestöhrt, und es kann daher einiger Zweifel über das Gesetz, dafs die Attractionskraft der Erde wie das Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkt abnimmt, übrig bleiben. In der That sind wir der Analogie gemäfs, welche zwischen dieser Kraft und den anziehenden Kräften der Sonne, Jupiters, Saturns und Uranus vorhanden ist, geneigt zu glauben, dafs sie nach dem nämlichen Gesetz abnimmt; allein die Erfahrungen auf der Erde über die Schwere bieten ein directes Mittel dar, dieses Gesetz zu bestätigen.

Hierzu wollen wir die Mondsparallaxe vermittelst der Versuche über die Länge des Sekundenpendels bestimmen, und sie mit den himmlischen Beobachtungen vergleichen. Unter dem Parallelkreis, wovon das Quadrat des Sinus der Breite $\frac{1}{3}$ ist, beträgt der Raum, welchen die Schwere in einer Sekunde durchlaufen läfst, vermöge der Beobachtungen der Länge des Sekundenpendels, $3^m,65548$ [7]),

7) Zur Vergleichung der Annahmen im Text mit den schon bekannten dient folgendes: unter der Breite von 35° 15′ 52″ ist nach Laplace der Fall der Körper in einer Decimalsekunde $3^m,65548$, das

wie man im dritten Buch sehen wird. Wir wählen diesen Parallelkreis, weil die Attractionskraft der Erde für jeden ihm entsprechenden Punkt ihrer Oberfläche sehr nahe der Masse der Erde, dividirt durch das Quadrat seines Abstandes von ihrem Schwerpunkt, gleich ist, so wie dieses in der Entfernung des Monds der Fall ist. Die Schwere ist unter diesem Parallelkreis kleiner als die Attractionskraft der Erde um $\frac{2}{3}$ der Centrifugalkraft, welche aus der Umdrehungsbewegung des Aequators entspringt. Diese Kraft ist $\frac{1}{288}$ der Schwere; man muſs also den vorhergehenden Raum um seinen 432sten Theil vermehren, um den ganzen durch die Wirkung der Erde durchlaufenen Raum zu haben, welcher unter diesem Parallelkreis ihrer Masse, durch das Quadrat des Erdhalbmessers dividirt, gleich ist: man erhält so $3^m,66394$ für diesen Raum. In der Entfernung des Monds muſs er im Verhältniſs des Quadrats des Halbmessers des Erdsphäroids zum Quadrat der Entfernung dieses Gestirns vermindert werden, und es ist augenscheinlich, daſs man hierzu ihn nur mit dem Quadrat des Sinus der Mondsparallaxe zu multipliciren braucht. Man wird also $x^2 \,.\, 3^m,66394$ für die Höhe haben, um welche der Mond in einer Sekunde durch die Attraction der Erde fällt. Wir werden aber in der Theorie des Monds sehen, daſs die Wirkung der Sonne seine Schwere gegen die Erde um eine Gröſse vermindert, dessen beständiger Theil $\frac{1}{358}$ dieser Schwere ist; auſserdem wirkt auf den Mond während seiner relativen Bewegung um die Erde eine Kraft, welche der Summe der Massen der Erde und des Monds, durch das Quadrat ihres gegenseitigen Abstandes dividirt, gleich ist; man muſs also den vorhergehenden Raum um $\frac{1}{358}$ vermindern, und im Verhältniſs der Summe der Massen der Erde und des Monds zu der Masse der Erde vermehren. Man wird aber im vierten Buch sehen, daſs die Erscheinungen der Ebbe und Fluth des Meers die Masse des Monds gleich

heiſst 11,25684 französische Fuſs. Nun ist eine Decimalsekunde gleich 0,864 Sexagesimalsekunden. Dividirt man also die vorhergehende Gröſse durch das Quadrat von 0,864, so erhält man den Fall in einer Sexagesimalsekunde unter der gegebenen Breite. Er ist $4^m,89685$ oder 15,07958 französische Fuſs, und die Sekundenpendellänge $440''',03$. Nach Lalandes Tafel ist die Pendellänge unter $35^\circ\frac{1}{4}$ Breite $439''',92$, unterm Aequator $439''',07$; der Unterschied beider $0''',85$. Multiplicirt man diese Gröſse mit 4,93482 ($= \frac{1}{2}\pi^2$), so erhält man $4''',19$ für den Unterschied des Falls unter der Breite von $35\frac{1}{4}^\circ$ und unterm Aequator. (Durch den hier gebrauchten Buchstaben m werden mètres bezeichnet).

$\frac{1}{58,7}$ der Masse der Erde geben; man hat also $\frac{357}{358} \cdot \frac{59,7}{58,7} \cdot x^2 \cdot 3^m,66394$ für den Raum, um welchen der Mond in einer Sekunde gegen die Erde fällt.

Nennt man nun a den mittlern Halbmesser der Mondsbahn, und T die Dauer des Syderal-Umlaufs des Monds in Sekunden ausgedrückt; so wird, wie wir schon gesehen haben, $\frac{2a\pi^2}{T^2}$ der Quersinus des Bogens seyn, welchen er während einer Sekunde beschreibt, und welcher die Gröſse ausdrücken wird, um welche der Mond in diesem Zeitraum gegen die Erde fällt. Dividirt man den Erdhalbmesser unter dem von uns betrachteten Parallelkreis durch den Sinus x, so erhält man den Werth von a; dieser Erdhalbmesser ist 6369514^m [8]) gleich; man hat also

$$a = \frac{6369514^m}{x}.$$

Um aber einen von den Ungleichheiten der Bewegung des Monds unabhängigen Werth von a zu haben, muſs man für seine mittlere Parallaxe, deren Sinus x ist, den Theil dieser Parallaxe nehmen, welcher von diesen Ungleichheiten unabhängig ist, und welchen man eben deswegen die beständige Gröſse der Parallaxe nennt. Nimmt man also für π das Verhältniſs 355 : 113, und bemerkt man, daſs $T = 2732166''$ [9]), so wird der mittlere Raum, um welchen der Mond in einer Sekunde gegen die Erde fällt,

$$\frac{2 \cdot (355)^2 \cdot 6369514^m}{(113)^2 \cdot x \cdot (2732166)^2}$$

seyn. Setzt man die zwey Ausdrücke, welche wir für diesen Raum gefunden haben, einander gleich, so erhält man

$$x^3 = \frac{2 \cdot (355)^2 \cdot 358 \cdot 58,7 \cdot 6369514}{(113)^2 \cdot 357 \cdot 59,7 \cdot 3,66394 \cdot (2732166)^2} \text{ [10])},$$

8) 6369514 Mètres = 3269093 Toises.

9) 2732166'' = 27 Tage 7 St. 43' 11'',4.

10) Man erhält natürlich x durch diese Formel in Theilen des Halbmessers. Nun ist der Halbmesser gleich 63° 66' 17'', 88313091 Decimaleintheilung. Um also x in Decimalsekunden zu erhalten, muſs man mit 636617'',88 multipliciren; der Logarithme dieses Factors ist 5,8038788; für Sexagesimalsekunden ist dieser Logarithme bekanntlich 5,3144251.

woraus man 10536,''2 [11]) für den beständigen Theil der Mondsparallaxe unter dem Parallelkreis, wovon die Rede ist, findet. Dieser Werth ist sehr wenig von dem beständigen Theil 10540,''7 verschieden, welchen Triesnecker durch die Vergleichung einer grofsen Anzahl beobachteter Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen geschlossen hat. Es ist also sicher, dafs die Hauptkraft, welche den Mond in seiner Bahn zurückhält, die im Verhältnifs des Quadrats der Entfernung verminderte Erdschwere ist. Das Gesetz der Abnahme der Schwere, welches für die von verschiedenen Satelliten begleiteten Planeten aus der Vergleichung ihrer Umlaufszeiten und Abstände bewiesen wird, wird für den Mond durch die Vergleichung seiner Bewegung mit der Bewegung der auf der Oberfläche der Erde geworfenen Körper bewiesen. Es erhellet hieraus, dafs man in Berechnung der anziehenden Kräfte der himmlischen Körper auf Körper, welche auf ihrer Oberfläche oder aufserhalb derselben sich befinden, ihre Abstände vom Schwerpunkt an gerechnet nehmen mufs, weil dieses für die Erde bewiesen ist, deren anziehende Kraft von eben der Natur wie die der übrigen Himmelskörper ist, wie wir so eben gesehen haben.

6. Die Sonne und die Planeten, welche Satelliten haben, besitzen also eine anziehende Kraft, welche ins Unendliche verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen abnimmt und alle Körper in der Sphäre ihrer Thätigkeit umfafst. Der Analogie gemäfs sind wir geneigt zu glauben, dafs sich im Allgemeinen eine ähnliche Kraft in allen Planeten und Kometen befindet; man kann sich aber davon direct auf folgende Art versichern. Es ist ein beständiges Gesetz der Natur, dafs ein Körper nicht auf einen andern wirken kann, ohne von ihm eine gleich grofse und entgegengesetzte Rückwirkung zu erfahren; da also die Planeten und Kometen gegen die Sonne zu angezogen werden, so müssen sie auch dieses Gestirn nach dem nämlichen Gesetz anziehen. Aus eben dem Grunde ziehen die Nebenplaneten ihre Hauptplaneten an; die anziehende Eigenschaft ist also den Planeten, Kometen und Satelliten gemein, und man kann folglich die Gravitation der himmlischen Körper gegen einander als eine allgemeine Eigenschaft dieses Weltalls ansehen.

Wir haben so eben gesehen, dafs sie im verkehrten Verhältnifs der Quadrate der Entfernungen abnimmt; dieses Gesetz ist in der That nur durch die

11) 10536,''2 = 56' 54,''7 Sexagesimaleintheilung.
10540,''7 = 56' 56,''2 Sexagesimaleintheilung.

Gesetze der elliptischen Bewegung gegeben, welchen die himmlischen Bewegungen nicht in aller Schärfe unterworfen sind. Man muſs aber bedenken, daſs es natürlich ist, anfangs anzunehmen, daſs die Schwere sich verkehrt wie eine Potenz der Entfernung verhält, weil wir immer die einfachsten Gesetze so lange vorziehen müssen, bis die Beobachtungen uns zwingen, sie zu verlassen, und man findet denn durch Rechnung, daſs der geringste Unterschied zwischen dieser Potenz und dem Quadrat äuſserst bemerkbar in der Lage der Sonnennähen der Planetenbahnen werden würde, in welchen die Beobachtungen nur fast unmerkliche Bewegungen erkennen lassen, deren Ursachen wir entwickeln werden. Man wird im Allgemeinen im Lauf dieses Werkes sehen, daſs das Gesetz der Schwere, daſs sie im verkehrten Verhältniſs der Quadrate der Entfernungen abnimmt, mit der äuſsersten Genauigkeit alle beobachtete Ungleichheiten der himmlischen Bewegungen darstellt. Diese Uebereinstimmung und die Einfachheit dieses Gesetzes berechtigen uns zu glauben, daſs es in aller Schärfe das Gesetz der Natur ist.

Die Gravitation ist den Massen proportional; denn es folgt aus dem dritten Satz, daſs, wenn man annimmt, daſs die Planeten und Kometen in gleicher Entfernung von der Sonne und ihrer Schwere gegen dieses Gestirn überlassen sind, sie in gleicher Zeit um eine gleiche Höhe fallen würden, so daſs ihre Schwere ihren Massen proportional seyn würde. Die fast kreisförmigen Bewegungen der Satelliten um ihre Planeten beweisen, daſs sie, so wie ihre Planeten, im Verhältniſs ihrer Massen gegen die Sonne schwer sind; der geringste Unterschied hierin würde in der Bewegung der Nebenplaneten merklich werden, und die Beobachtungen haben keine von dieser Ungleichheit abhängende Ungleichheit zu erkennen gegeben. Man sieht also, daſs die Kometen, Planeten und ihre Satelliten, in gleiche Entfernung von der Sonne gesetzt, gegen dieses Gestirn im Verhältniſs ihrer Massen schwer seyn würden; hieraus folgt vermöge der Gleichheit der Wirkung und der Rückwirkung, daſs sie die Sonne in dem nämlichen Verhältniſs anziehen, und daſs also ihre Wirkungen auf dieses Gestirn ihren Massen, durch das Quadrat ihrer Abstände von seinem Mittelpunkt dividirt, proportional sind.

Das nämliche Gesetz hat auf der Erde Statt; man hat sich durch sehr genaue, vermittelst des Pendels angestellte; Versuche versichert, daſs sich ohne den Widerstand der Luft alle Körper mit gleicher Geschwindigkeit gegen ihren

Mittelpunkt herabstürzen würden; die Erdkörper sind also gegen die Erde im Verhältnifs ihrer Massen schwer, so wie die Planeten gegen die Sonne, und die Satelliten gegen ihre Hauptplaneten schwer sind. Diese Gleichförmigkeit der Natur mit sich selbst auf der Erde und in dem unendlichen Raum des Himmels zeigt uns auf die auffallendste Art, dafs die hienieden beobachtete Schwere nur ein besonderer Fall eines allgemeinen im Weltall verbreiteten Gesetzes ist.

Die anziehende Eigenschaft der himmlischen Körper gehört ihnen nicht nur in Masse zu, sie ist auch jedem ihrer Theilchen eigen. Wenn die Sonne nur auf den Mittelpunkt der Erde wirkte, ohne jedes Theilchen der Erde besonders anzuziehen, so würden daraus Schwankungen im Meer entstehen, welche weit gröfser und sehr von denen verschieden seyn würden, welche man jetzt beobachtet. Die Schwere der Erde gegen die Sonne ist also das Resultat der Schweren aller ihrer Theilchen, welche folglich die Sonne im Verhältnifs ihrer Massen anziehen. Aufserdem ist jeder Körper auf der Erde im Verhältnifs seiner Masse gegen ihren Mittelpunkt schwer; er wirkt also auf sie zurück und zieht sie im nämlichen Verhältnifs an. Wenn dies nicht der Fall wäre, wenn irgend ein auch noch so kleiner Theil der Erde den andern nicht anzöge, so wie er von ihm angezogen wird, so würde der Schwerpunkt der Erde vermöge der Schwere eine Bewegung im Raum haben, welches unmöglich ist.

Die Erscheinungen am Himmel, mit den Gesetzen der Bewegung verglichen, führen uns also auf den grofsen Grundsatz der Natur, dafs alle materielle Theilchen sich gegenseitig im Verhältnifs der Massen und im verkehrten Verhältnifs des Quadrats der Entfernungen anziehen. Man wird nun schon in dieser allgemeinen Schwere die Ursache der Stöhrungen gewahr, welche die himmlischen Körper erfahren; denn da die Planeten und Kometen ihren gegenseitigen Stöhrungen unterworfen sind, so müssen sie sich ein wenig von den elliptischen Bewegungsgesetzen entfernen, welche sie genau befolgen würden, wenn sie nur der Wirkung der Sonne gehorchten. Die Satelliten werden in ihren Bewegungen um ihre Hauptplaneten durch ihre gegenseitige Anziehung und durch die Anziehung der Sonne gestöhrt, und entfernen sich auf eine ähnliche Art von den elliptischen Bewegungsgesetzen. Man sieht noch, dafs die Theilchen jedes Himmelskörpers, durch die anziehende Kraft vereinigt, eine fast kugelförmige Masse bilden müssen, und dafs die aus ihren Wirkungen auf die Oberfläche des Körpers zusammengesetzte Kraft daselbst alle Erscheinungen der Schwere her-

vorbringen mufs. Man sieht ferner, dafs die Umdrehungsbewegung der himmlischen Körper ihre Kugelgestalt ein wenig ändern und sie an den Polen abplatten mufs, und dafs alsdann die aus ihren gegenseitigen Wirkungen zusammengesetzte Kraft, weil sie nicht genau durch ihren Schwerpunkt geht, in ihren Umdrehungsaxen Bewegungen hervorbringen mufs, welche denen an ihnen beobachteten ähnlich sind. Man sieht endlich, dafs die Theilchen des Meers, welche ungleich von Sonne und Mond angezogen werden, eine der Ebbe und Fluth des Meers ähnliche Schwankungsbewegung haben müssen. Die Entwickelung dieser verschiedenen Wirkungen der allgemeinen Schwere erfordert aber eine tiefe Analysis. Um sie mit der gröfsten Allgemeinheit zu umfassen, wollen wir die Differenzialgleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern, welche ihren gegenseitigen Anziehungen unterworfen sind, geben, und die genauen Integrale, welche man erhalten kann, aufsuchen. Wir werden dann die Erleichterungen benutzen, welche die Verhältnisse der Massen und der Entfernungen der himmlischen Körper darbieten, um immer mehr und mehr genäherte Integrale zu erhalten, und um so die Erscheinungen des Himmels mit aller Genauigkeit, welche die Beobachtungen verstatten, zu bestimmen.

Zweytes Kapitel.

Von den Differenzialgleichungen der Bewegung eines Systems von Körpern, welche ihren gegenseitigen Anziehungen unterworfen sind.

7. Es sollen m, m', m'' etc. die Massen der verschiedenen Körper des Systems, als eben so viel Punkte betrachtet, seyn; x, y, z die rechtwinklichten Koordinaten des Körpers m; x', y', z' die des Körpers m', und so für die übrigen. Da nun die Entfernung des Körpers m' von m gleich

$$\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

ist, so wird seine Wirkung auf m vermöge des allgemeinen Gesetzes der Schwere gleich

$$\frac{m'}{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}$$

seyn. Zerlegt man diese Wirkung parallel mit den Axen der x, der y und der z, so wird die mit der Axe der x parallele und in entgegengesetzter Richtung vom Anfangspunkt wirkende Kraft

$$\frac{m'(x'-x)}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

oder

$$\frac{1}{m}\cdot\left\{\frac{d\cdot\frac{m\,.\,m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}}{dx}\right\}.$$

Man wird auf eine ähnliche Art

$\frac{1}{m}$

$$\frac{1}{m} \cdot \left\{ \frac{d \cdot \frac{m \cdot m''}{\sqrt{(x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2}}}{dx} \right\}$$

für die Wirkung des Körpers m'' auf m parallel mit der Axe der x haben, und so für die übrigen. Es sey also

$$\lambda = \frac{m \cdot m'}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}} + \frac{m \cdot m''}{\sqrt{(x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2}}$$

$$+ \frac{m' \cdot m''}{\sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2}} + \text{etc.}$$

wo also λ die Summe aller Producte der Massen m, m', m'' etc., zwey zu zwey genommen und jedes Product durch den gegenseitigen Abstand der zwey Massen von einander dividirt, ist; so wird $\frac{1}{m} \cdot \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)$ die Summe der Wirkungen der Kräfte m', m'' etc. auf m, parallel mit der Axe der x zerlegt und in entgegengesetzter Richtung des Anfangspunkts der Koordinaten genommen, seyn. Bezeichnet man also mit dt das Element der Zeit, welches beständig angenommen wird, so wird man nach den Grundsätzen der Dynamik, welche wir im vorhergehenden Buch entwickelt haben, folgende Gleichung haben:

$$o = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dx}\right).$$

Auf eine ähnliche Art erhält man

$$o = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)$$

$$o = m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dz}\right).$$

Betrachtet man auf dieselbe Art die Wirkung der Körper m, m'' etc. auf m'; die der Körper m, m' etc. auf m'' und so weiter, so wird man folgende Gleichungen erhalten:

$$o = m' \cdot \frac{d^2x'}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dx'}\right); \quad o = m' \cdot \frac{d^2y'}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dy'}\right); \quad o = m' \cdot \frac{d^2z'}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dz'}\right)$$

$$o = m'' \cdot \frac{d^2x''}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dx''}\right); \quad o = m'' \cdot \frac{d^2y''}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dy''}\right); \quad o = m'' \cdot \frac{d^2z''}{dt^2} - \left(\frac{d\lambda}{dz''}\right)$$

etc.

Die Bestimmung der Bewegungen der Massen m, m', m'' etc. hängt von der Integration dieser Differenzialgleichungen ab; es ist aber bis jetzt noch nicht möglich gewesen, sie vollständig zu integriren, den einzigen Fall ausgenommen, wo das System nur aus zwey Körpern besteht. In den andern Fällen hat man nur eine kleine Anzahl vollkommen genauer Integrale erhalten können, welche wir entwickeln wollen.

8. Hierzu wollen wir anfangs die Differenzialgleichungen für x, x', x'' etc. betrachten. Addirt man sie und bemerkt man, daſs man, vermöge der Natur der Function λ,

$$o = \left(\frac{d\lambda}{dx}\right) + \left(\frac{d\lambda}{dx'}\right) + \left(\frac{d\lambda}{dx''}\right) + \text{etc.}$$ [12])

hat, so wird man $o = \Sigma \,.\, m \,.\, \frac{d^2x}{dt^2}$ erhalten. Eben so wird man $o = \Sigma . m . \frac{d^2y}{dt^2}$ und $o = \Sigma \,.\, m \,.\, \frac{d^2z}{dt^2}$ erhalten. Es sollen X, Y, Z die drey Koordinaten des Schwerpunkts des Systems seyn, so wird man vermöge der Eigenschaften dieses Punktes

$$X = \frac{\Sigma \,.\, mx}{\Sigma \,.\, m}; \quad Y = \frac{\Sigma \,.\, my}{\Sigma \,.\, m}; \quad Z = \frac{\Sigma \,.\, mz}{\Sigma \,.\, m}$$

12) Man betrachte folgendes allgemeine Glied von λ:

$$\frac{\overset{(r)}{m} \,.\, \overset{(n)}{m}}{\sqrt{\left(\overset{(r)}{x} - \overset{(n)}{x}\right)^2 + \left(\overset{(r)}{y} - \overset{(n)}{y}\right)^2 + \left(\overset{(r)}{z} - \overset{(n)}{z}\right)^2}},$$

wo (r) und (n) Ordnungsexponenten sind, so daſs $\overset{(r)}{m}$ die Masse des rten Körpers anzeigt. Nun ist, wenn man bloſs dies Glied betrachtet,

$$\left(\frac{d\lambda}{d\overset{(r)}{x}}\right) = 2\left(\overset{(r)}{x} - \overset{(n)}{x}\right).\overset{(r)}{m} \,.\, \overset{(n)}{m} \,.\left[\left(\overset{(r)}{x} - \overset{(n)}{x}\right)^2 + \left(\overset{(r)}{y} - \overset{(n)}{y}\right)^2 + \left(\overset{(r)}{z} - \overset{(n)}{z}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{d\lambda}{d\overset{(n)}{x}}\right) = -2\left(\overset{(r)}{x} - \overset{(n)}{x}\right).\overset{(r)}{m}.\overset{(n)}{m}\left[\left(\overset{(r)}{x} - \overset{(n)}{x}\right)^2 + \left(\overset{(r)}{y} - \overset{(n)}{y}\right)^2 + \left(\overset{(r)}{z} - \overset{(n)}{z}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}$$

die Summe dieser zwey Glieder ist also gleich Null. Da nun r und n jeden Werth haben können, so gilt dies für jedes Paar Glieder, und die Summe aller Glieder ist folglich gleich Null, oder $o = \Sigma \,.\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)$. Die Function λ ist so beschaffen, daſs jedem Ausdruck von x ein vollkommen ähnlicher Ausdruck von y und von z entspricht; ein Satz, der in Beziehung auf x von dieser Function gilt, gilt auch in Beziehung auf y und auf z; man hat also auch $o = \Sigma \,.\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)$ und $o = \Sigma \,.\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)$.

und folglich [13])

$$0 = \frac{d^2X}{dt^2}; \quad 0 = \frac{d^2Y}{dt^2}; \quad 0 = \frac{d^2Z}{dt^2}$$

haben; hieraus erhält man durch Integriren

$$X = a + bt; \quad Y = a' + b't; \quad Z = a'' + b''t;$$

wo a, b, a', b', a'', b'' willkührliche beständige Gröfsen sind. Man sieht hieraus, dafs die Bewegung des Schwerpunkts des Systems geradlinicht und gleichförmig ist, und dafs sie folglich durch die gegenseitige Wirkung der Körper des Systems nicht geändert wird; welches mit dem, was wir im fünften Kapitel des ersten Buchs gesehen haben, übereinstimmt.

Wir wollen nun die Differenzialgleichungen für die Bewegung dieser Körper wieder vornehmen. Multiplicirt man die Differenzialgleichungen für y, y', y'' etc. respective mit x, x', x'' etc. und addirt sie zu den Differenzialgleichungen für x, x', x'' etc., welche man respective mit $-y$, $-y'$, $-y''$ etc. multiplicirt hat, so erhält man

$$0 = m \cdot \frac{(x\,d^2y - y\,d^2x)}{dt^2} + m' \cdot \frac{(x'\,d^2y' - y'\,d^2x')}{dt^2} + \text{etc.}$$
$$+ y \cdot \left(\frac{d\lambda}{dx}\right) + y' \cdot \left(\frac{d\lambda}{dx'}\right) + \text{etc.}$$
$$- x \cdot \left(\frac{d\lambda}{dy}\right) - x' \cdot \left(\frac{d\lambda}{dy'}\right) - \text{etc.}$$

Die Natur der Function λ giebt aber [14])

13) $$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{\Sigma \cdot m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}}{\Sigma \cdot m} = \frac{0}{\Sigma \cdot m} = 0.$$

14) Multiplicirt man den in der vorhergehenden 12ten Anmerk. gegebenen Werth von $\left(\frac{d\lambda}{dx^{(r)}}\right)$ mit $y^{(r)}$, so erhält man, wenn man statt der zur Potenz $-\frac{3}{2}$ erhobenen Gröfse Q setzt,

$$y^{(r)}\left(\frac{d\lambda}{dx^{(r)}}\right) = \left(2y^{(r)}\,x^{(r)} - 2\,y^{(r)}\,x^{(n)}\right) \cdot m^{(r)} \cdot m^{(n)} \cdot Q^{-\frac{3}{2}},$$

ferner $$y^{(n)}\left(\frac{d\lambda}{dx^{(n)}}\right) = \left(-2y^{(n)}\,x^{(r)} + 2y^{(n)} \cdot x^{(n)}\right) \cdot m^{(r)} \cdot m^{(n)} \cdot Q^{-\frac{3}{2}},$$

und hieraus, wenn man x und y verwechselt,

$$o = y \cdot \left(\frac{d\lambda}{dx}\right) + y' \cdot \left(\frac{d\lambda}{dx'}\right) + \text{etc.}$$
$$- x \cdot \left(\frac{d\lambda}{dy}\right) - x' \cdot \left(\frac{d\lambda}{dy'}\right) - \text{etc.}$$

Man erhält also, wenn man die vorhergehende Gleichung integrirt,

$$c = \Sigma \cdot m \cdot \left(\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}\right).$$

Auf eine ähnliche Art wird man

$$c' = \Sigma \cdot m \cdot \left(\frac{x\,dz - z\,dx}{dt}\right)$$

$$c'' = \Sigma \cdot m \cdot \left(\frac{y\,dz - z\,dy}{dt}\right)$$

erhalten, wo c, c', c'' etc. willkührliche beständige Gröſsen sind. Diese drey Integrale enthalten den Grundsatz der Winkelflächen, welchen wir im 5ten Kapitel des ersten Buchs erklärt haben.

Multiplicirt man endlich die Differenzialgleichungen für x, x', x'' etc. respective mit dx, dx', dx'' etc.; die Differenzialgleichungen für y, y', y'' etc. respective mit dy, dy', dy'' etc.; die für z, z', z'' etc. mit dz, dz', dz'' etc., und addirt sie, so wird man

$$o = \Sigma \cdot m \cdot \frac{(dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y + dz \cdot d^2z)}{dt^2} - d\lambda$$

erhalten, und wenn man integrirt,

$$h = \Sigma \cdot m \cdot \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) - 2\lambda,$$

wo h eine neue beständige Gröſse ist. Dieses Integral enthält den Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte, welchen wir im 5ten Kapitel des ersten Buchs dargestellt haben.

$$- x^{(r)} \left(\frac{d\lambda}{dy^{(r)}}\right) = \left(- 2y^{(r)}\, x^{(r)} + 2x^{(r)} \cdot y^{(n)}\right) \cdot m^{(r)} \cdot m^{(n)} \cdot Q^{-\frac{3}{2}},$$
$$- x^{(n)} \left(\frac{d\lambda}{dy^{(n)}}\right) = \left(+ 2x^{(n)}\, y^{(r)} - 2x^{(n)} \cdot y^{(n)}\right) \cdot m^{(r)} \cdot m^{(n)} \cdot Q^{-\frac{3}{2}}.$$

Die Summe aller 4 Glieder ist gleich Null. Da man nun statt n, r alle ganze Zahlen setzen kann, so ist die Summe jeder 4 ähnlichen Glieder gleich Null, und also $\Sigma\, y \left(\frac{d\lambda}{dx}\right) - \Sigma\, x \left(\frac{d\lambda}{dy}\right) = o.$

Die sieben vorhergehenden Integrale sind die einzigen genauen Integrale, welche man bis jetzt hat erhalten können: in dem Fall, wo das System nur aus zwey Körpern besteht, bringen sie die Bestimmung ihrer Bewegungen auf Differenzialgleichungen der ersten Ordnung zurück, welche man, wie man in der Folge sehen wird, integriren kann. Wenn aber das System aus drey oder mehr Körpern besteht, so muſs man nothwendig die Näherungsmethoden gebrauchen.

9. Da man nur relative Bewegungen beobachten kann, so bezieht man die Bewegungen der Planeten und der Kometen auf den Mittelpunkt der Sonne, und die Bewegungen der Satelliten auf den Mittelpunkt ihrer Hauptplaneten. Um also die Theorie mit den Beobachtungen vergleichen zu können, muſs man die relative Bewegung eines Systems von Körpern um einen Körper, welcher als der Mittelpunkt ihrer Bewegungen angesehen wird, bestimmen.

Es sey M dieser letzte Körper; m, m', m'' etc. die übrigen Körper, deren relative Bewegung um M man sucht; es sollen ξ, η und γ die rechtwinklichten Koordinaten von M seyn; $\xi + x$, $\eta + y$, $\gamma + z$ die rechtwinklichten Koordinaten von m; $\xi + x'$, $\eta + y'$, $\gamma + z'$ die von m' u. s. w., so ist augenscheinlich, daſs x, y, z die Koordinaten von m in Beziehung auf M; x', y', z' die Koordinaten von m' in Beziehung auf denselben Körper sind, und so für die übrigen. Wir nennen r, r' etc. die Entfernungen der Körper m, m' etc. vom Körper M, so daſs

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \text{ etc.}$$

ist, und wir setzen

$$\lambda = \frac{m \, . \, m'}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}} + \frac{m \, . \, m''}{\sqrt{(x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2}}$$
$$+ \frac{m' \, . \, m''}{\sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2}} + \text{etc.}$$

Dieses vorausgesetzt, wird die Wirkung von m auf M, parallel mit der Axe der x zerlegt und in entgegengesetzter Richtung ihres Anfangspunkts genommen, $\frac{mx}{r^3}$ seyn; die Wirkung von m' auf M nach der nämlichen Richtung zerlegt, wird $\frac{m'x'}{r'^3}$ seyn, und so für die übrigen. Man wird also um ξ zu bestimmen, die Differenzialgleichung

$$o = \frac{d^2\xi}{dt^2} - \Sigma \cdot \frac{mx}{r^3}$$

haben; auf eine ähnliche Art wird man

$$o = \frac{d^2\Pi}{dt^2} - \Sigma \cdot \frac{my}{r^3}$$

$$o = \frac{d^2\gamma}{dt^2} - \Sigma \cdot \frac{mz}{r^3}$$

erhalten. Die Wirkung von M auf m, parallel mit der Axe der x zerlegt und in entgegengesetzter Richtung ihres Anfangspunkts genommen, wird $-\frac{Mx}{r^3}$ seyn, und die Summe der Wirkungen der Körper m', m'' etc. auf m nach der nämlichen Richtung zerlegt, wird $\frac{1}{m} \cdot \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)$ seyn; man wird also

$$o = \frac{d^2 \cdot (\xi + x)}{dt^2} + \frac{Mx}{r^3} - \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)$$

haben. Substituirt man statt $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ seinen Werth $\Sigma \cdot \frac{mx}{r^3}$, so erhält man

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Mx}{r^3} + \Sigma \cdot \frac{mx}{r^3} - \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{d\lambda}{dx}\right) \quad (1)$$

Eben so erhält man

$$o = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{My}{r^3} + \Sigma \cdot \frac{my}{r^3} - \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{d\lambda}{dy}\right) \quad (2)$$

$$o = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Mz}{r^3} + \Sigma \cdot \frac{mz}{r^3} - \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{d\lambda}{dz}\right) \quad (3).$$

Verwandelt man nach und nach in den Gleichungen (1), (2), (3) die Gröſsen m, x, y, z in m', x', y', z'; m'', x'', y'', z'' etc. und umgekehrt; so wird man die Gleichungen für die Bewegung der Körper m', m'' u. s. w. um den Körper M erhalten.

Multiplicirt man die Differenzialgleichung für ξ mit $M + \Sigma \cdot m$; die für x mit m; die für x' mit m' und so für die übrigen; addirt man sie dann, und bemerkt man hierbey, daſs man vermöge der Natur der Function λ

$$o = \left(\frac{d\lambda}{dx}\right) + \left(\frac{d\lambda}{dx'}\right) + \text{etc.}$$

hat [15]), so wird man

$$o = (M + \Sigma . m) . \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \Sigma . m . \frac{d^2 x}{dt^2}$$

erhalten, und hieraus durch Integriren

$$\xi = a + bt - \frac{\Sigma . mx}{M + \Sigma . m},$$

wo a und b zwey willkührliche beständige Gröſsen sind. Auf eine ähnliche Art erhält man

$$\pi = a' + b't - \frac{\Sigma . my}{M + \Sigma . m};$$

$$\gamma = a'' + b''t - \frac{\Sigma . mz}{M + \Sigma . m};$$

wo a', b', a'', b'' willkührliche beständige Gröſsen sind. Man wird also die absolute Bewegung des Körpers M im Raum haben, wenn man die relativen Bewegungen von m, m' etc. um ihn kennt.

Multiplicirt man die Differenzialgleichungen für x mit

$$-my + m . \frac{\Sigma . my}{M + \Sigma . m},$$

und die Differenzialgleichung für y mit

$$mx - m . \frac{\Sigma . mx}{M + \Sigma . m};$$

multiplicirt man eben so die Differenzialgleichung für x' mit

$$-m'y' + m' . \frac{\Sigma . my}{M + \Sigma . m};$$

15) Setzt man statt der Zeichen $\Sigma . \frac{mx}{r^3}$ und Σm die Gröſsen, welche sie ausdrücken, und multiplicirt man, so erhält man

$$M . \Sigma \frac{mx}{r^3} = M . \frac{mx}{r^3} + M . \frac{m'x'}{r'^3} + M . \frac{m''x''}{r''^3} + \ldots \text{ und also}$$

$$-M . \Sigma \frac{mx}{r^3} + m . \frac{Mx}{r^3} + m' . \frac{Mx'}{r'^3} + m'' . \frac{Mx''}{r''^3} + \ldots = o;$$

Ferner $\Sigma m . \Sigma \frac{mx}{r^3} = (m + m' + m'' + m''' \ldots) . \Sigma \frac{mx}{r^3}$, folglich

$$-\Sigma m . \Sigma \frac{mx}{r^3} + m . \Sigma \frac{mx}{r^3} + m' . \Sigma \frac{mx}{r^3} + m'' . \Sigma \frac{mx}{r^3} + \ldots = o.$$

und die Differenzialgleichung für y' mit

$$m'x' - m' \cdot \frac{\Sigma \cdot mx}{M + \Sigma \cdot m};$$

und so für die übrigen; addirt man hernach alle diese Gleichungen [16]) und beobachtet hierbey, daſs die Natur der Function λ

$$o = \Sigma \cdot x \cdot \left(\frac{d\lambda}{dy}\right) - \Sigma \cdot y \cdot \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)$$

$$o = \Sigma \cdot \left(\frac{d\lambda}{dx}\right); \quad o = \Sigma \cdot \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)$$

giebt, so wird man die Gleichung

o =

16) Man verrichtet diese Multiplication und Addition am bequemsten, wenn man nur die erste dieser Gleichungen, wo die Gröſsen m, x, y, z keine Striche haben, mit dem zugehörigen Factor multiplicirt, und dann für die Gröſsen, welche nach und nach mit ein, zwey, drey u. s. w. Strichen bezeichnet werden müssen, das Summenzeichen Σ setzt. Z. B. $\frac{d^2x}{dt^2}$ mit $-my$ multiplicirt, giebt $-my \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$, und die Summe der ähnlichen Glieder aller übrigen Gleichungen ist $-my \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - m'y' \cdot \frac{d^2x'}{dt^2} - m''y'' \cdot \frac{d^2x''}{dt^2}$ — etc. welches offenbar gleich $\Sigma \cdot -my \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$ ist. Auf diese Art erhält man, wenn man die Gleichungen (1) und (2) bloſs mit $-my$ und mx multiplicirt,

$$-\Sigma my \cdot \frac{d^2x}{dt^2} - \Sigma my \cdot \frac{Mx}{r^3} - \Sigma my \cdot \Sigma \frac{mx}{r^3} + \Sigma y \cdot \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)$$
$$+ \Sigma mx \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \Sigma mx \cdot \frac{My}{r^3} + \Sigma mx \cdot \Sigma \frac{my}{r^3} - \Sigma x \cdot \left(\frac{d\lambda}{dy}\right);$$

hier ist offenbar $-\Sigma my \cdot \frac{Mx}{r^3} + \Sigma mx \cdot \frac{My}{r^3} = M\left[-\Sigma \frac{myx}{r^3} + \Sigma \frac{mxy}{r^3}\right] = o.$

Eben so $-\Sigma my \cdot \Sigma \frac{mx}{r^3} + \Sigma mx \cdot \Sigma \frac{my}{r^3} = o,$

ferner $\Sigma y \left(\frac{d\lambda}{dx}\right) - \Sigma x \cdot \left(\frac{d\lambda}{dy}\right) = o$, vermöge der 14ten Anmerkung.

Es bleibt also bloſs $-\Sigma my \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \Sigma mx \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma \cdot m \left(\frac{x d^2y - y d^2x}{dt^2}\right)$ übrig. Multiplicirt man ferner die Gleichungen (1) und (2) mit den zweyten Gliedern der gegebenen Factoren, so erhält man

$$+\frac{\Sigma my}{M + \Sigma m} \cdot \Sigma \frac{m\, d^2x}{dt^2} + \frac{\Sigma my}{M + \Sigma m} \cdot M \cdot \Sigma \frac{mx}{r^3} + \frac{\Sigma my}{M + \Sigma m} \cdot \Sigma m \cdot \Sigma \frac{mx}{r^3} - \frac{\Sigma my}{M + \Sigma m} \cdot \Sigma \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)$$
$$-\frac{\Sigma mx}{M + \Sigma m} \cdot \Sigma \frac{m\, d^2y}{dt^2} - \frac{\Sigma mx}{M + \Sigma m} \cdot M \cdot \Sigma \frac{my}{r^3} - \frac{\Sigma mx}{M + \Sigma m} \cdot \Sigma m \cdot \Sigma \frac{my}{r^3} + \frac{\Sigma mx}{M + \Sigma m} \cdot \Sigma \left(\frac{d\lambda}{dy}\right).$$

Hier sind die zweyten und dritten über einander stehenden Glieder identisch einander gleich, und also ihre Differenz gleich Null. Die beiden letzten Glieder sind vermöge der 12ten Anmerkung gleich Null. Es bleiben also nur die zwey ersten Glieder übrig, welche mit dem vorhergehenden vereinigt die Gleichung des Hrn. Verfassers geben.

$$o = \Sigma . m . \frac{(x d^2y - y d^2x)}{dt^2} - \frac{\Sigma . mx}{M + \Sigma . m} . \Sigma . m . \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\Sigma . my}{M + \Sigma . m} . \Sigma . m . \frac{d^2x}{dt^2}$$

erhalten, deren Integral folgende Gleichung ist:

$$\text{best. Gr.} = \Sigma . m . \frac{(xdy - ydx)}{dt} - \frac{\Sigma . mx}{M + \Sigma . m} . \Sigma . m . \frac{dy}{dt} + \frac{\Sigma . my}{M + \Sigma . m} . \Sigma . m . \frac{dx}{dt},$$

oder [17])

$$c = M . \Sigma . m . \frac{(xdy - ydx)}{dt} + \Sigma . mm' . \left[\frac{(x'-x).(dy'-dy) - (y'-y).(dx'-dx)}{dt}\right] \quad (4)$$

17) Man multiplicire die vorhergehende Gleichung mit $M + \Sigma m$, so erhält man

$$c = M . \Sigma m . \frac{xdy - ydx}{dt} + \Sigma m . \Sigma \frac{mxdy - mydx}{dt} - \Sigma mx . \Sigma m . \frac{dy}{dt} + \Sigma my . \Sigma m . \frac{dx}{dt}.$$

Das zweyte Glied des zweyten Theils dieser Gleichung läſst sich in folgende zwey zerlegen:

$\Sigma m . \Sigma mx . \frac{dy}{dt} - \Sigma m . \Sigma my . \frac{dx}{dt}$. Verbindet man diese mit den beiden letzten Gliedern derselben Gleichung, so erhält man $\Sigma m . \Sigma mx . \frac{dy}{dt} - \Sigma mx . \Sigma m . \frac{dy}{dt}$

$$\text{und} - \Sigma m . \Sigma my . \frac{dx}{dt} + \Sigma my . \Sigma m . \frac{dx}{dt}.$$

Der Ausdruck $\Sigma mx . \Sigma m . \frac{dy}{dt}$, oder das Product von $(mx + m'x' + m''x'' \ldots)\left(m\frac{dy}{dt} + m'\frac{dy'}{dt} + m''\frac{dy''}{dt} \ldots\right)$ enthält offenbar alle mögliche Verbindungen von mx, $m'x' \ldots m\frac{dy}{dt}$, $m'\frac{dy'}{dt} \ldots$

Die Summe dieser Verbindungen drückt folgendes Zeichen aus: $\Sigma m^{(r)} m^{(n)} x^{(r)} . \frac{dy^{(n)}}{dt}$, wo die Ordnungsexponenten (r) und (n) jeden Werth haben können. Man hat also

$$- \Sigma mx . \Sigma m . \frac{dy}{dt} = - \Sigma m^{(r)} m^{(n)} x^{(r)} . \frac{dy^{(n)}}{dt}.$$

Eben so findet man

$$+ \Sigma m . \Sigma mx . \frac{dy}{dt} = + \Sigma m^{(n)} m^{(n)} x^{(n)} . \frac{dy^{(n)}}{dt} + \Sigma m^{(p)} m^{(n)} x^{(n)} . \frac{dy^{(n)}}{dt},$$

wo aber (n) und (p) einander nie gleich seyn dürfen, weil diese Glieder schon unter dem ersten Summenzeichen enthalten sind. Addirt man beide gefundene Gleichungen, so erhält man

$$- \Sigma mx . \Sigma m . \frac{dy}{dt} + \Sigma m . \Sigma mx . \frac{dy}{dt} = - \Sigma m^{(n)} m^{(p)} x^{(n)} . \frac{dy^{(p)}}{dt} + \Sigma m^{(p)} m^{(n)} x^{(n)} . \frac{dy^{(n)}}{dt},$$

wo n und p nie einander gleich seyn dürfen; denn es ist klar, daſs der Ausdruck $\Sigma m^{(n)} m^{(n)} x^{(n)} . \frac{dy^{(n)}}{dt}$ im Ausdruck $- \Sigma m^{(r)} m^{(n)} x^{(r)} . \frac{dy^{(n)}}{dt}$ alle Glieder aufhebt, wo r und n einander gleich sind. Es

wo c eine willkührliche beständige Gröſse ist. Man wird auf die nämliche Art zu den beiden folgenden Integralen gelangen:

$$c' = M.\Sigma.m.\frac{(xdz-zdx)}{dt} + \Sigma.mm'.\left[\frac{(x'-x).(dz'-dz)-(z'-z).(dx'-dx)}{dt}\right] \quad (5)$$

$$c'' = M.\Sigma.m.\frac{(ydz-zdy)}{dt} + \Sigma.mm'.\left[\frac{(y'-y).(dz'-dz)-(z'-z).(dy'-dy)}{dt}\right] \quad (6),$$

wo c' und c'' zwey neue beständige willkührliche Gröſsen sind. Multiplicirt man die Differenzialgleichung für x mit

$$2\,m\,dx - 2\,m\,.\frac{\Sigma\,.\,m\,dx}{M+\Sigma\,.\,m},$$

die Differenzialgleichung für y mit

$$2\,m\,dy - 2\,m\,.\frac{\Sigma\,.\,m\,dy}{M+\Sigma\,.\,m},$$

die Differenzialgleichung für z mit

$$2\,m\,dz - 2\,m\,.\frac{\Sigma\,.\,m\,dz}{M+\Sigma\,.\,m};$$

multiplicirt man ferner die Differenzialgleichung für x' mit

$$2\,m'\,dx' - 2\,m'\,.\frac{\Sigma\,.\,m\,dx}{M+\Sigma\,.\,m},$$

die Differenzialgleichung für y' mit

$$2\,m'\,dy' - 2\,m'\,.\frac{\Sigma\,.\,m\,dy}{M+\Sigma\,.\,m},$$

folgt aus diesem allgemeinen Ausdruck, daſs nur folgende 4 Glieder den gemeinschaftlichen Factor $m^{(n)}\,m^{(p)}$ haben:

$$-x^{(n)}\frac{dy^{(p)}}{dt} - x^{(p)}\frac{dy^{(n)}}{dt} + x^{(n)}\frac{dy^{(n)}}{dt} + x^{(p)}\frac{dy^{(p)}}{dt},$$

deren Summe $\left(x^{(n)}-x^{(p)}\right).\left(\frac{dy^{(p)}}{dt}-\frac{dy^{(n)}}{dt}\right)$ ist. Folglich ist

$$-\Sigma mx.\Sigma m.\frac{dy}{dt} + \Sigma m.\Sigma mx.\frac{dy}{dt} = \Sigma\, m^{(n)}\,m^{(p)}\left(x^{(n)}-x^{(p)}\right).\left(\frac{dy^{(p)}}{dt}-\frac{dy^{(n)}}{dt}\right).$$

Hieraus folgt, wenn man x mit y und y mit x verwechselt, und die Zeichen ändert,

$$+\Sigma my.\Sigma m.\frac{dx}{dt} - \Sigma m.\Sigma my.\frac{dx}{dt} = -\Sigma m^{(n)}\,m^{(p)}\left(y^{(n)}-y^{(p)}\right).\left(\frac{dx^{(p)}}{dt}-\frac{dx^{(n)}}{dt}\right).$$

Die Summe beider Gleichungen giebt den Ausdruck im Text.

die Differenzialgleichung für z' mit

$$2\, m' dz' - 2\, m' \, . \, \frac{\Sigma \, . \, m\, dz}{M + \Sigma \, . \, m},$$

und so für die übrigen; addirt man dann diese verschiedenen Gleichungen [18]), und beobachtet hierbey, daſs

18) Man multiplicire die drey Gleichungen für x, y, z zuerst mit $2m\,dx$, $2m\,dy$, $2m\,dz$, und bediene sich, wie vorher, des Summenzeichens Σ, so erhält man

$$\Sigma\, 2m\, dx \, . \, \frac{d^2x}{dt^2} + M \, . \, \Sigma \, \frac{2m\,dx \, . \, x}{r^3} + \Sigma\, 2m\,dx \, . \, \Sigma \, \frac{mx}{r^3} - \Sigma\, 2\,dx \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)$$

$$\Sigma\, 2m\, dy \, . \, \frac{d^2y}{dt^2} + M \, . \, \Sigma \, \frac{2m\,dy \, . \, y}{r^3} + \Sigma\, 2m\,dy \, . \, \Sigma \, \frac{my}{r^3} - \Sigma\, 2\,dy \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)$$

$$\Sigma\, 2m\, dz \, . \, \frac{d^2z}{dt^2} + M \, . \, \Sigma \, \frac{2m\,dz \, . \, z}{r^3} + \Sigma\, 2m\,dz \, . \, \Sigma \, \frac{mz}{r^3} - \Sigma\, 2\,dz \left(\frac{d\lambda}{dz}\right).$$

Die Summe der drey ersten unter einander stehenden Glieder ist $\Sigma 2m \, \frac{dx\,.\,d^2x + dy\,.\,d^2y + dz\,.\,d^2z}{dt^2}$,

die Summe der darauf folgenden drey verticalen Glieder ist $M \, . \, \Sigma 2m \, . \, \frac{dr}{r^2}$. Denn $xdx = dx \, . \left(\frac{dr}{dx}\right) . \, r$; $ydy = dy \, . \left(\frac{dr}{dy}\right) . \, r$; $zdz = dz \left(\frac{dr}{dz}\right) . \, r$, und ihre Summe ist gleich

$r \, . \, dx \left(\frac{dr}{dx}\right) + r \, . \, dy \left(\frac{dr}{dy}\right) + r \, . \, dz \left(\frac{dr}{dz}\right) = r \, . \, dr$, und also die Summe dieser drey Glieder $= 2\, M\, \Sigma \, \frac{mdr}{r^2}$.

Die folgenden drey Glieder in der dritten Vertikalreihe müssen mit den aus der Multiplication des zweyten Factors entstehenden Gliedern verbunden werden.

Die Summe der drey letzten Glieder ist unmittelbar gleich $2\, d\lambda$.

Man multiplicire nun die Gleichungen (1), (2), (3) mit den zweyten Gliedern der gegebenen Factoren, so erhält man

$$-\frac{\Sigma\, m\, dx}{M + \Sigma m} \, \Sigma 2m \, \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{\Sigma\, m\, dx}{M + \Sigma m} \, . \, M \, . \, \Sigma \, \frac{2mx}{r^3} - \frac{\Sigma\, m\, dx}{M + \Sigma m} \, . \, \Sigma\, 2m \, . \, \Sigma \, \frac{mx}{r^3} + \frac{\Sigma\, m\, dx}{M + \Sigma m} \, . \, \Sigma\, 2 \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)$$

$$-\frac{\Sigma\, m\, dy}{M + \Sigma m} \, \Sigma 2m \, \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\Sigma\, m\, dy}{M + \Sigma m} \, . \, M \, . \, \Sigma \, \frac{2my}{r^3} - \frac{\Sigma\, m\, dy}{M + \Sigma m} \, . \, \Sigma\, 2m \, . \, \Sigma \, \frac{my}{r^3} + \frac{\Sigma\, m\, dy}{M + \Sigma m} \, . \, \Sigma\, 2 \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)$$

$$-\frac{\Sigma\, m\, dz}{M + \Sigma m} \, \Sigma 2m \, \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{\Sigma\, m\, dz}{M + \Sigma m} \, . \, M \, . \, \Sigma \, \frac{2mz}{r^3} - \frac{\Sigma\, m\, dz}{M + \Sigma m} \, . \, \Sigma\, 2m \, . \, \Sigma \, \frac{mz}{r^3} + \frac{\Sigma\, m\, dz}{M + \Sigma m} \, . \, \Sigma\, 2 \left(\frac{d\lambda}{dz}\right).$$

Die drey letzten verticalen Glieder sind jedes gleich Null, man sehe die 12te Anmerk. Vereinigt man das 2te und 3te horizontale Glied mit dem 3ten des vorhergehenden Products, so erhält man

$$+ \Sigma\, 2m dx \, . \, \Sigma \, \frac{mx}{r^3} - \Sigma\, m\, dx \, . \, \Sigma \, \frac{2\,mx}{r^3} \, . \, \frac{M}{M + \Sigma m} - \frac{\Sigma\, m\, dx \, . \, \Sigma\, 2m \, . \, \Sigma \, \frac{mx}{r^3}}{M + \Sigma m};$$

man multiplicire und dividire das erste Glied mit $M + \Sigma m$, so erhalten alle drey Glieder den gemeinschaftlichen Divisor $M + \Sigma m$; der Zähler ist gleich

$$M \, . \, \Sigma\, 2m\, dx \, . \, \Sigma \, \frac{mx}{r^3} + \Sigma m \, . \, \Sigma 2m\, dx \, . \, \Sigma \, \frac{mx}{r^3} - M \, . \, \Sigma m\, dx \, . \, \Sigma 2mx - \Sigma m\, dx \, . \, \Sigma 2m \, . \, \Sigma \, \frac{mx}{r^3}$$

$$0 = \Sigma . \left(\frac{d\lambda}{dx}\right); \qquad 0 = \Sigma . \left(\frac{d\lambda}{dy}\right); \qquad 0 = \Sigma . \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)$$

ist, so wird man folgende Gleichung erhalten:

$$0 = 2\Sigma . m . \frac{(dx . d^2x + dy . d^2y + dz . d^2z)}{dt^2} - \frac{2\Sigma . m\, dx}{M + \Sigma . m} . \Sigma . \frac{m . d^2x}{dt^2}$$

$$- \frac{2\Sigma . m\, dy}{M + \Sigma . m} . \Sigma . \frac{m\, d^2y}{dt^2} - \frac{2\Sigma . m\, dz}{M + \Sigma . m} . \Sigma . \frac{m . d^2z}{dt^2} + 2M . \Sigma . \frac{m\, dr}{r^2} - 2\, d\lambda$$

aus welcher man durch Integriren folgende erhält:

$$\text{best. Gr.} = \Sigma . m . \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) - \frac{(\Sigma . m\, dx)^2 - (\Sigma . m\, dy)^2 - (\Sigma . m\, dz)^2}{(M + \Sigma . m) . dt^2}$$

$$- 2M . \Sigma . \frac{m}{r} - 2\lambda,$$

oder [19])

$$h = M . \Sigma . m . \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + \Sigma . mm' . \left[\frac{(dx' - dx)^2 + (dy' - dy)^2 + (dz' - dz)^2}{dt^2}\right]$$

$$- \left(2M . \Sigma . \frac{m}{r} + 2\lambda\right)(M + \Sigma . m) \quad (7),$$

wo h eine willkührliche beständige Gröſse ist. Wir sind schon auf diese verschiedenen Integrale im 5ten Kapitel des ersten Buchs, in Beziehung auf ein System von Körpern, welche auf einander auf irgend eine Art zurück wirken, gekommen; wir haben aber geglaubt, sie hier von neuem wegen ihres Nutzens in der Theorie des Weltsystems beweisen zu müssen.

10. Da diese Integrale die einzigen sind, welche man bey dem jetzigen Zustand der Analysis hat erhalten können, so ist man gezwungen, zu Näherungsmethoden seine Zuflucht zu nehmen, und die Erleichterungen, welche zu diesem Zweck die Einrichtung des Weltsystems darbietet, zu benutzen. Eine der vor-

oder

$$2M . \Sigma m\, dx . \Sigma \frac{mx}{r^3} + 2\Sigma m . \Sigma m\, dx . \Sigma \frac{mx}{r^3} - 2M \Sigma m\, dx . \Sigma m x - 2\Sigma m\, dx . \Sigma m . \Sigma \frac{mx}{r^3},$$

welcher Zähler also gleich Null ist. Die ähnlichen Ausdrücke für y und z sind folglich ebenfalls gleich Null, weil man nur x mit y oder mit z zu verwechseln braucht, um diese Ausdrücke zu erhalten.

Es bleiben also von allen obigen 12 Gliedern nur die drey ersten unter einander stehenden Glieder übrig, welche mit den aus den vorigen drey Reihen erhaltenen Gliedern vereinigt die im Text gegebene Gleichung hervorbringen.

19) Den Beweis dieser Verwandlung findet man in der 44sten Anmerk. des ersten Buchs.

züglichsten beruht darauf, daſs das Sonnensystem in einzelne Systeme, welche die Planeten und ihre Satelliten bilden, getheilt ist: diese Systeme sind so beschaffen, daſs die Entfernungen der Satelliten von ihren Planeten beträchtlich kleiner sind, als die Entfernung des Planeten von der Sonne. Es folgt hieraus, daſs die Satelliten, weil die Wirkung der Sonne auf sie und auf ihren Hauptplaneten fast dieselbe ist, sich fast eben so bewegen, als ob sie nur der Wirkung des Planeten gehorchten. Es folgt auch noch hieraus die merkwürdige Eigenschaft, daſs die Bewegung des gemeinschaftlichen Schwerpunkts eines Planeten und seiner Satelliten fast eben so beschaffen ist, als ob alle diese Körper in diesem Punkt vereinigt wären.

Wir nehmen, um dies zu beweisen, an, daſs die gegenseitigen Abstände der Körper m, m', m'' etc. in Vergleichung des Abstands ihres gemeinschaftlichen Schwerpunkts vom Körper M sehr klein sind. Es sey

$$x = X + x_{,}; \qquad y = Y + y_{,}; \qquad z = Z + z_{,};$$
$$x' = X + x'_{,}; \qquad y' = Y + y'_{,}; \qquad z' = Z + z'_{,};$$
etc.

wo X, Y, Z die Koordinaten des Schwerpunkts des Systems der Körper m, m', m'' etc. sind, für welche, so wie für die Koordinaten x, y, z, x', y', z' etc. der Mittelpunkt von M als Anfangspunkt angenommen wird. Es ist klar, daſs $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, $x'_{,}$ etc. die Koordinaten von m, m' etc. in Beziehung auf ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt seyn werden; wir werden annehmen, daſs sie sehr kleine Gröſsen der ersten Ordnung in Vergleich mit X, Y, Z sind. Dieses vorausgesetzt, wird man, wie man im ersten Buch gesehen hat, die Kraft, welche parallel mit irgend einer geraden Linie auf den Schwerpunkt des Systems wirkt, erhalten, wenn man jede der Kräfte, welche auf die Körper parallel mit dieser geraden Linie wirken, mit der zugehörenden Masse multiplicirt, und die Summe dieser Producte mit der Summe der Massen dividirt. Man hat überdies noch im ersten Buch gesehen, daſs die gegenseitige Wirkung der auf irgend eine Art vereinigten Körper die Bewegung des Schwerpunkts des Systems nicht ändert, und nach dem 8ten Satz hat auch die gegenseitige Anziehung der Körper keinen Einfluſs auf diese Bewegung; es ist also in der Aufsuchung der Kräfte, welche auf den Schwerpunkt des Systems wirken, hinreichend, auf die Wirkung des nicht zum System gehörenden Körpers M Rücksicht zu nehmen.

Die Wirkung von M auf m, parallel mit der Axe der x zerlegt, und in entgegengesetzter Richtung ihres Anfangspunkts genommen, ist $-\frac{M \,.\, x}{r^3}$; die ganze Kraft, welche parallel mit dieser geraden Linie auf den Schwerpunkt des Systems der Körper m, m', m'' etc. wirkt, ist also

$$\frac{-M \,.\, \Sigma \,.\, \frac{mx}{r^3}}{\Sigma \,.\, m}.$$

Substituirt man statt x und r ihre Werthe, so erhält man

$$\frac{x}{r^3} = \frac{X + x_{,}}{[(X + x_{,})^2 + (Y + y_{,})^2 + (Z + z_{,})^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Vernachlässigt man die sehr kleinen Grölsen der zweyten Ordnung, nämlich die Quadrate und Producte der veränderlichen Grölsen $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$, x', etc. und bezeichnet man mit R die Entfernung $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ des Schwerpunkts des Systems vom Körper M, so erhält man [20])

$$\frac{x}{r^3} = \frac{X}{R^3} + \frac{x_{,}}{R^3} - \frac{3\,X\,(Xx_{,} + Yy_{,} + Zz_{,})}{R^5}.$$

Bezeichnet man nach und nach mit einem Strich, mit zwey Strichen u. s. w. die Buchstaben $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ im zweyten Theil dieser Gleichung, so wird man die Werthe von $\frac{x'}{r'^3}$, $\frac{x''}{r''^3}$ etc. erhalten. Man hat aber durch die Natur des Schwerpunkts

$$0 = \Sigma \,.\, mx_{,}\,; \qquad 0 = \Sigma \,.\, my_{,}\,; \qquad 0 = \Sigma \,.\, mz_{,},$$

und folglich bis auf die Grölsen der zweyten Ordnung [21])

20) Es ist nämlich $[(X + x_{,})^2 + (Y + y_{,})^2 + (Z + z_{,})^2]^{-\frac{3}{2}} = [X^2 + Y^3 + Z^2 + 2(Xx_{,} + Yy_{,} + Zz_{,}]^{-\frac{3}{2}}$ $= [R^2 + 2(Xx_{,} + Yy_{,} + Zz_{,})]^{-\frac{3}{2}}$, welche Potenz nach dem binomischen Lehrsatz gleich $R^{-3} - 3 \,.\, (Xx_{,} + Yy_{,} + Zz_{,})\, R^{-5}$ ist, wo man die übrigen Glieder wegläſst, weil sie Quadrate und Producte der kleinen Gröſsen $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ enthalten würden. Multiplicirt man diese Gröſse mit $X + x_{,}$, so erhält man den im Text gegebenen Ausdruck; man muſs das Product von $x_{,}$ mit dem zweyten Gliede dieses Ausdrucks weglassen, weil dieses Glied schon $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ enthält.

21) Es ist nämlich $\Sigma\,\frac{mx}{r^3} = \frac{X}{R^3}\,\Sigma m + \frac{\Sigma\, m x_{,}}{R^3} - \frac{(3\,XX \,.\, \Sigma\, m x_{,} + 3\,XY \,.\, \Sigma\, m y_{,} + 3\,XZ \,.\, \Sigma\, m z_{,})}{R^5}$, wo die beständigen Gröſsen X, Y, Z überall auſserhalb des Summenzeichens gesetzt worden sind, weil

$$-\frac{M \,.\, \Sigma \,.\, \frac{mx}{r^3}}{\Sigma \,.\, m} = -\frac{M \,.\, X}{R^3}.$$

Die Wirkung des Körpers M auf den Schwerpunkt des Systems, parallel mit der Axe der x, ist also sehr nahe eben dieselbe, als ob alle Körper des Systems in dem Schwerpunkt vereinigt wären. Dasselbe findet offenbar auch in Beziehung auf die Axen der y und der z Statt, so daſs die Kräfte, welche auf den Schwerpunkt des Systems vermöge des Körpers M wirken $-\frac{M \,.\, Y}{R^3}$ und $-\frac{M.Z}{R^3}$, sind.

Wenn man die relative Bewegung des Schwerpunkts des Systems um M betrachtet, so muſs man die Kraft, welche auf diesen Körper wirkt, in entgegengesetzter Richtung an ihn anbringen. Diese aus den Wirkungen von m, m', m'' etc. auf M entstehende Kraft ist gleich $\Sigma \,.\, \frac{mx}{r^3}$, wenn man sie parallel mit der Axe der x zerlegt, und in entgegengesetzter Richtung des Anfangspunkts nimmt. Diese Function ist aber nach dem Vorhergehenden gleich

$$\frac{X \,.\, \Sigma \,.\, m}{R^3},$$

wenn man die Gröſsen der zweyten Ordnung vernachläſsigt. Auf eben dieselbe Art sind die Kräfte, womit das System, parallel mit den Axen der y und der z und in entgegengesetzter Richtung ihres Anfangspunkts, auf M wirkt

$$\frac{Y \,.\, \Sigma \,.\, m}{R^3} \text{ und } \frac{Z \,.\, \Sigma \,.\, m}{R^3}.$$

Man sieht also, daſs die Wirkung des Systems auf den Körper M fast eben dieselbe ist, als ob alle Körper dieses Systems in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkt vereinigt wären. Bringt man die drey vorhergehenden Kräfte mit entgegengesetzten Zeichen an den Schwerpunkt an, so werden auf diesen Punkt in

$\Sigma \alpha x_{\prime} = \alpha \Sigma x_{\prime}$, so wie $\int \alpha\, x_{\prime} = \alpha \int x_{\prime}$, so bald α eine beständige Gröſse ist. Da nun $\Sigma m x_{\prime}$, $\Sigma m y_{\prime}$, $\Sigma m z_{\prime}$ gleich Null sind, so giebt die obige Gleichung unmittelbar $\Sigma\, \frac{mx}{r^3} = \frac{X}{R^3}\, \Sigma m$, und also

$$\frac{-M \,.\, \Sigma\, \frac{mx}{r^3}}{\Sigma m} = -\frac{M X}{R^3}.$$

seiner relativen Bewegung um M die drey folgenden mit den Axen der x, der y und der z parallelen Kräfte wirken:

$$-(M+\Sigma.m).\frac{X}{R^3}; \quad -(M+\Sigma.m).\frac{Y}{R^3}; \quad -(M+\Sigma.m).\frac{Z}{R^3}.$$

Diese Kräfte sind dieselben, als ob alle Körper m, m', m'' etc. in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkt vereinigt wären; dieser Schwerpunkt bewegt sich also, wenn man die Gröſsen der zweyten Ordnung vernachläſsigt, eben so, als wenn alle diese Körper in ihm vereinigt wären.

Es folgt hieraus, daſs, wenn man verschiedene Systeme hat, deren Schwerpunkte, in Vergleichung mit den Entfernungen der Körper jedes Systems, sehr von einander entfernt sind, daſs diese Schwerpunkte sich sehr nahe eben so bewegen werden, als wenn alle Körper jedes Systems in denselben vereinigt wären. Denn die Wirkung des ersten Systems auf jeden Körper des zweyten Systems ist nach dem, was wir so eben gesehen haben, sehr nahe eben dieselbe, als ob alle Körper des ersten Systems in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkt vereinigt wären: die Wirkung des ersten Systems auf den Schwerpunkt des zweyten ist also nach dem Vorhergehenden eben dieselbe, als in dieser Voraussetzung. Hieraus kann man im Allgemeinen schlieſsen, daſs die gegenseitige Wirkung der verschiedenen Systeme auf ihre Schwerpunkte dieselbe ist, als ob die Körper jedes Systems in demselben vereinigt wären, und daſs also diese Schwerpunkte sich so, wie im Fall dieser Vereinigung bewegen. Es ist sichtbar, daſs dieses Resultat auf gleiche Art Statt hat, die Körper jedes Systems mögen frey oder auf irgend eine Art verbunden seyn, weil ihre gegenseitige Wirkung auf die Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunkts keinen Einfluſs hat.

Das System eines Planeten wirkt also auf die übrigen Körper des Sonnensystems fast eben so, als ob der Planet und seine Satelliten in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkt vereinigt wären, und dieser Schwerpunkt wird von den verschiedenen Körpern des Sonnensystems eben so, wie in dieser Hypothese angezogen.

Da jeder Körper aus einer unendlichen Menge mit Anziehungskraft begabter Theilchen besteht, und da sein Durchmesser in Vergleichung mit seiner Entfernung von den übrigen Körpern des Systems sehr klein ist, so wird sein Schwerpunkt sehr nahe eben so angezogen, als wenn seine ganze Masse in ihm vereinigt wäre; und er selbst wirkt eben so auf diese verschiedenen Körper, als

er

er in dieser Voraussetzung wirkt; man kann also in der Untersuchung der Bewegung der Schwerpunkte der himmlischen Körper diese Körper als eben so viel im Schwerpunkt sich befindende schwere Punkte ansehen. Die kugelförmige Gestalt der Planeten und ihrer Satelliten macht diese schon der Wahrheit sehr nahe Voraussetzung noch weit genauer. Man kann in der That annehmen, daſs diese verschiedenen Körper aus einer unendlichen Menge Kugelschalen bestehen, deren Dichtigkeit sich nach einem gegebenen Gesetze ändert, und wir werden zeigen, daſs die Wirkung einer Kugelschale auf einen Körper auſserhalb derselben eben dieselbe ist, als ob ihre Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre. Wir wollen hierzu über die Anziehungskräfte der sphäroidischen Körper einige allgemeine Sätze geben, welche uns in der Folge sehr nützlich seyn werden.

11. Es sollen x, y, z die drey Koordinaten des angezogenen Punktes seyn, welchen wir mit m bezeichnen wollen; es sey dM ein Theilchen des Sphäroids, und x', y', z' die Koordinaten dieses Theilchens; nennt man nun ϱ seine Dichte, wo ϱ eine Function von x', y', z', aber von x, y, z unabhängig ist, so wird man

$$dM = \varrho \,.\, dx' \,.\, dy' \,.\, dz'$$

haben. Die Wirkung von dM auf m, parallel mit der Axe der x zerlegt und gegen ihren Anfangspunkt gerichtet, wird

$$\frac{\varrho \,.\, dx' \,.\, dy' \,.\, dz' \,(x-x')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}$$

und folglich gleich

$$-\left\{ \frac{d \,.\, \dfrac{\varrho \,.\, dx' \,.\, dy' \,.\, dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}}{dx} \right\}$$

seyn. Nennt man nun V das Integral

$$\int \frac{\varrho \,.\, dx' \,.\, dy' \,.\, dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}},$$

welches auf die ganze Masse des Sphäroids erstreckt werden muſs, so wird man $-\left(\frac{dV}{dx}\right)$ für die gänzliche Wirkung des Sphäroids auf den Punkt m erhalten, wenn man sie parallel mit der Axe der x zerlegt, und in der Richtung ihres Anfangspunkts nimmt.

V ist die Summe der Theilchen des Sphäroids, jedes durch seinen Abstand vom angezogenen Punkt dividirt; um die Anziehung des Sphäroids auf diesen Punkt parallel mit irgend einer geraden Linie zu erhalten, muſs man V als Function dreyer rechtwinklichten Koordinaten ansehen, wovon eine mit dieser geraden Linie parallel ist, und diese Function in Beziehung auf diese Koordinate differenziiren. Der Koefficient dieses Differenzials, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, wird der Ausdruck der mit der gegebenen geraden Linie parallelen, und gegen den Anfangspunkt der ihr parallelen Koordinate gerichteten Anziehung des Sphäroids seyn.

Bezeichnet man mit β die Function $[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-\frac{1}{2}}$, so wird man

$$V=\int \beta\,.\,\varrho\,.\,dx'\,.\,dy'\,.\,dz'$$

haben. Da die Integration sich nur auf die veränderlichen Gröſsen x', y', z' bezieht, so ist klar, daſs man

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)=\int \varrho\,.\,dx'\,.\,dy'\,.\,dz'\,.\left[\left(\frac{d^2\beta}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2\beta}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2\beta}{dz^2}\right)\right]$$

haben wird. Man hat aber [22])

$$0=\left(\frac{d^2\beta}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2\beta}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2\beta}{dz^2}\right);$$

man wird also auch

$$0=\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right) \quad \text{(A)}$$

haben. Diese merkwürdige Gleichung wird uns von dem gröſsten Nutzen in der Theorie der Gestalt der himmlischen Körper seyn. Man kann ihr andere unter

22) Da $\beta=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z'^2]^{-\frac{1}{2}}$, so ist

$$\left(\frac{d\beta}{dx}\right)=-(x-x')\,[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-\frac{3}{2}}$$

oder $\left(\frac{d\beta}{dx}\right)=-(x-x')\,\beta^3$. Differenziirt man von neuem, so erhält man

$$\left(\frac{d^2\beta}{dx^2}\right)=-\beta^3-3\,(x-x')\,\beta^2\left(\frac{d\beta}{dx}\right)=-\beta^3+3\,(x-x')^2\,\beta^5.$$

Eben so ist $\left(\frac{d^2\beta}{dy^2}\right)=-\beta^3+3\,(y-y')^2\,\beta^5$ und $\left(\frac{d^2\beta}{dz^2}\right)=-\beta^3+3\,(z-z')^2\,\beta^5$; und die Summe dieser drey Gröſsen ist gleich $-3\,\beta^3+3\,[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]\,\beta^5$ $=-3\,\beta^3+3\,\beta^{-2}\,.\,\beta^5=0$.

verschiedenen Umständen bequemere Gestalten geben; man stelle sich zum Beyspiel vor, dafs man vom Anfangspunkt der Koordinaten einen Halbmesser zu dem angezogenen Punkt ziehe, welchen wir r nennen; es sey θ der Winkel, welchen dieser Radius mit der Axe der x macht, und ϖ der Winkel, welchen die durch r und durch diese Axe gehende Ebene mit der Ebene der x und der y macht, so wird man haben

$$x = r \cdot \cos\theta; \quad y = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varpi; \quad z = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varpi.$$

Hieraus erhält man

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \tang\varpi = \frac{z}{y};$$

man wird also die partiellen Differenziale von r, θ und ϖ in Bezug auf die veränderlichen Gröfsen x, y, z haben können, und man wird daraus die Werthe von $\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)$ durch partielle Differenziale von V in Bezug auf die veränderlichen Gröfsen r, θ und ϖ ausdrücken können. Da wir sehr oft von diesen Verwandlungen der partiellen Differenziale Gebrauch machen werden, so ist es nützlich, hier den Grund derselben ins Gedächtnifs zurück zu rufen [23]). Betrachtet man V als Function der veränderlichen Gröfsen x, y, z, und hernach als Function von r, θ, ϖ, so hat man

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \left(\frac{dV}{dr}\right) \cdot \left(\frac{dr}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{d\theta}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{d\varpi}\right) \cdot \left(\frac{d\varpi}{dx}\right).$$

23) Wenn V eine Function von r, und r eine Function von x ist, so ist auch V eine Function von x, und es ist identisch, ob man V unmittelbar durch x ausdrückt und dann differenziirt, oder ob man V in Beziehung auf r differenziirt, und dann statt dr seinen Werth, durch x ausgedrückt, setzt; dieses giebt $\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dx}$. Ist V eine Function von r, θ und ϖ, und jede dieser Gröfsen durch x gegeben, so ist, weil bekanntlich

$$dV = \left(\frac{dV}{dr}\right) \cdot dr + \left(\frac{dV}{d\theta}\right) \cdot d\theta + \left(\frac{dV}{d\varpi}\right) \cdot d\varpi$$

$$\frac{dV}{dx} = \left(\frac{dV}{dr}\right) \cdot \frac{dr}{dx} + \left(\frac{dV}{d\theta}\right) \cdot \frac{d\theta}{dx} + \left(\frac{dV}{d\varpi}\right) \cdot \frac{d\varpi}{dx}.$$

Die vorhergehende Gleichung gilt auch, wenn V, r, θ, ϖ Functionen von x, y, z sind, wofern man blofs x als veränderlich annimmt, das heifst, die partiellen Differenziale dieser Gröfsen in Beziehung auf x nimmt; dieses giebt nach der gewöhnlichen Bezeichnungsart der partiellen Differenziale

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \left(\frac{dV}{dr}\right) \cdot \left(\frac{dr}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{d\theta}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dx}\right) + \left(\frac{dV}{d\varpi}\right) \cdot \left(\frac{d\varpi}{dx}\right).$$

Differenziirt man nach diesem Grundsatz von neuem in Beziehung auf x, so erhält man

Um die partiellen Differenziale $\left(\frac{dr}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)$ zu erhalten, darf man nur x in den vorhergehenden Ausdrücken für r, $\cos\theta$ und tang ϖ als veränderlich ansehen; differenziirt man also diese Ausdrücke, so erhält man

$$\left(\frac{dr}{dx}\right) = \cos\theta; \qquad \left(\frac{d\theta}{dx}\right) = -\frac{\sin\theta}{r}; \qquad \left(\frac{d\varpi}{dx}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)\cdot\left(\frac{dr}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2V}{dr\,.\,d\theta}\right)\cdot\left(\frac{dr}{dx}\right)\cdot\left(\frac{d\theta}{dx}\right) + 2\left(\frac{d^2V}{dr\,.\,d\varpi}\right)\cdot\left(\frac{dr}{dx}\right)\cdot\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)$$
$$+ \left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)\cdot\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{d^2V}{d\theta\,.\,d\varpi}\right)\cdot\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\cdot\left(\frac{d\varpi}{dx}\right) + \left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right)\cdot\left(\frac{d\varpi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dr}\right)\cdot\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right)$$
$$+ \left(\frac{dV}{d\theta}\right)\cdot\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right) + \left(\frac{dV}{d\varpi}\right)\cdot\left(\frac{d^2\varpi}{dx^2}\right),$$

eine Gleichung, in welcher man nur x in y oder in z zu verwandeln braucht, um $\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)$ oder $\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)$ zu erhalten.

Nun ist $\left(\frac{dr}{dx}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} = \frac{r\,.\cos\theta}{r} = \cos\theta;$

ferner $\left(\frac{d\,.\,\cos\theta}{dx}\right) = -\left(\frac{d\theta}{dx}\right).\sin\theta,$

und $\left[\frac{d\,.\,[x\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}]}{dx}\right] = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$= \frac{1}{r}\left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right] = \frac{1}{r}\,(1 - \cos\theta^2) = \frac{\sin\theta^2}{r};$$

beide Differenziale einander gleich gesetzt, giebt $\left(\frac{d\theta}{dx}\right) = -\frac{\sin\theta}{r}.$

Da endlich tang ϖ und also ϖ von x unabhängig ist, so ist $\left(\frac{d\varpi}{dx}\right) = 0.$

Aus diesen ersten Differenzialen finden sich nun leicht die zweyten, nämlich

$$\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right) = \left(\frac{d\,.\cos\theta}{dx}\right) = \frac{\sin\theta^2}{r}$$
$$\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right) = -\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\cdot\frac{\cos\theta}{r} + \left(\frac{dr}{dx}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{r^2} = \frac{2\sin\theta\,.\,\cos\theta}{r^2}$$
$$\left(\frac{d^2\varpi}{dx^2}\right) = 0.$$

Diese Werthe in obige allgemeine Formel substituirt, giebt

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right).\cos\theta^2 - 2\left(\frac{d^2V}{dr\,.\,d\theta}\right).\frac{\sin\theta\,.\,\cos\theta}{r} + \left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)\frac{\sin\theta^2}{r^2} + \left(\frac{dV}{dr}\right)\frac{\sin\theta^2}{r}$$
$$+ 2\left(\frac{dV}{d\theta}\right)\frac{\sin\theta\,.\,\cos\theta}{r^2}.$$

Man hat ferner für y

dieses giebt

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \cos\theta \,.\, \left(\frac{dV}{dr}\right) - \frac{\sin\theta}{r} \,.\, \left(\frac{dV}{d\theta}\right).$$

Man wird also auf diese Art das partielle Differenzial $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ durch partielle Differenziale der Function V in Bezug auf die veränderlichen Gröſsen r, θ und ϖ ausgedrückt erhalten. Differenziirt man diesen Werth von $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ von neuem,

$$\left(\frac{dr}{dy}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{r} = \sin\theta \,.\, \cos\varpi$$

$$-\left(\frac{d\,.\,\cos\theta}{dy}\right) = -\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\sin\theta, \text{ und } \left[\frac{d\,.\,x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}}{dy}\right] = -y\,.\,x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-y\,.\,x}{r^3}$$

$= \frac{-\cos\theta\,.\,\sin\theta\,.\,\cos\varpi}{r}$; beide Differenziale einander gleich gesetzt, giebt

$$\left(\frac{d\theta}{dy}\right) = \frac{\cos\theta\,.\,\cos\varpi}{r},$$

ferner $\left(\frac{d\,.\,\mathrm{tang}\,\varpi}{dy}\right) = \left(\frac{d\varpi}{dy}\right)\frac{1}{\cos\varpi^2}$ und $\left(\frac{d\,.\,zy^{-1}}{dy}\right) = \frac{-z}{y^2} = \frac{-\sin\varpi}{r\,.\,\sin\theta\,.\,\cos\varpi^2}$.

Beide Differenziale einander gleich gesetzt, giebt $\left(\frac{d\varpi}{dy}\right) = -\frac{\sin\varpi}{r\,.\,\sin\theta}$.

Differenziirt man diese Differenziale von neuem in Beziehung auf y, so erhält man

$$\left(\frac{d^2r}{dy^2}\right) = \left(\frac{d\theta}{dy}\right)\cos\theta\,.\,\cos\varpi - \left(\frac{d\varpi}{dy}\right)\sin\varpi\,.\,\sin\theta = \frac{\cos\theta^2\,.\,\cos\varpi^2}{r} + \frac{\sin\varpi^2}{r}$$

$$\left(\frac{d^2\theta}{dy^2}\right) = -\left(\frac{d\theta}{dy}\right).\frac{\sin\theta\,.\,\cos\varpi}{r} - \left(\frac{d\varpi}{dy}\right).\frac{\sin\varpi\,.\,\cos\theta}{r} - \left(\frac{dr}{dy}\right).\frac{\cos\theta\,.\,\cos\varpi}{r^2}$$

$$= -\frac{\cos\theta\,.\,\sin\theta\,.\,\cos\varpi^2}{r^2} + \frac{\sin\varpi^2\,.\,\cos\theta}{r^2\,.\,\sin\theta} - \frac{\sin\theta\,.\,\cos\theta\,.\,\cos\varpi^2}{r^2} = \frac{\sin\varpi^2\,.\,\cos\theta - \sin\theta^2\,.\,\cos\theta\,.\,\cos\varpi^2}{r^2\,.\,\sin\theta}$$

$$\left(\frac{d^2\varpi}{dy^2}\right) = -\left(\frac{d\varpi}{dy}\right)\frac{\cos\varpi}{r\,.\,\sin\theta} + \left(\frac{dr}{dy}\right)\frac{\sin\varpi}{r^2\,.\,\sin\theta} + \left(\frac{d\theta}{dy}\right)\frac{\sin\varpi\,.\,\cos\theta}{r\,.\,\sin\theta^2}$$

$$= +\frac{\sin\varpi\,.\,\cos\varpi}{r^2\,.\,\sin\theta^2} + \frac{\sin\varpi\,.\,\cos\varpi}{r^2} + \frac{\cos\varpi\,.\,\sin\varpi\,.\,\cos\theta^2}{r^2\,.\,\sin\theta^2} = \frac{\sin\varpi\,.\,\cos\varpi}{r^2\,.\,\sin\theta^2}[1+\sin\theta^2+\cos\theta^2] = \frac{2\sin\varpi.\cos\varpi}{r^2\,.\,\sin\theta^2}.$$

Diese Werthe in die allgemeine Formel substituirt, giebt

$$\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right) = \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)\sin\theta^2\,.\,\cos\varpi^2 + 2\left(\frac{d^2V}{dr\,.\,d\theta}\right).\frac{\sin\theta\,.\,\cos\varpi^2\,.\,\cos\theta}{r} - 2\left(\frac{d^2V}{dr\,.\,d\varpi}\right).\frac{\sin\varpi\,.\,\cos\varpi}{r}$$

$$+\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right).\frac{\cos\theta^2\,.\,\cos\varpi^2}{r^2} - 2\left(\frac{d^2V}{d\theta\,.\,d\varpi}\right).\frac{\cos\theta\,.\,\cos\varpi\,.\,\sin\varpi}{r^2\,.\,\sin\theta} + \left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right).\frac{\sin\varpi^2}{r^2\,.\,\sin\theta^2}$$

$$+\left(\frac{dV}{dr}\right).\left(\frac{\cos\theta^2\,.\,\cos\varpi^2 + \sin\varpi}{r}\right) + \left(\frac{dV}{d\theta}\right).\left(\frac{\sin\varpi^2\,.\,\cos\theta - 2\sin\theta^2\,.\,\cos\theta\,.\,\cos\varpi^2}{r^2\,.\,\sin\theta\,.}\right)$$

$$+\left(\frac{dV}{d\varpi}\right)\,.\,\frac{2\sin\varpi\,.\,\cos\varpi}{r^2\,.\,\sin\theta^2\,.}.$$

so wird man das partielle Differenzial $\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)$ in partiellen in Beziehung auf die veränderlichen Grössen r, θ und ϖ genommenen Differenzialen erhalten. Durch eben dieses Verfahren wird man die Werthe von $\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)$ erhalten.

Für z hat man endlich

$$\left(\frac{dr}{dz}\right) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{r} = \sin\theta \,.\, \sin\varpi$$

$$-\left(\frac{d\theta}{dz}\right) . \sin\theta = -x \,.\, z\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-x\,.\,z}{r^3} = \frac{-\sin\theta\,.\,\cos\theta\,.\,\sin\varpi}{r},$$

folglich $+\left(\frac{d\theta}{dz}\right) = \frac{\cos\theta\,.\,\sin\varpi}{r}$

$$\left(\frac{d\varpi}{dz}\right) \cdot \frac{1}{\cos\varpi^2} = \frac{1}{y} = \frac{1}{r\,.\,\sin\theta\,.\,\cos\varpi},$$

folglich $\left(\frac{d\varpi}{dz}\right) = \frac{\cos\varpi}{r\,.\,\sin\theta}$.

Differenziirt man diese Differenziale von neuem in Beziehung auf z, so erhält man

$$\left(\frac{d^2r}{dz^2}\right) = \left(\frac{d\theta}{dz}\right) . \cos\theta \,.\, \sin\varpi + \left(\frac{d\varpi}{dz}\right) . \cos\varpi \,.\, \sin\theta = \frac{\cos\theta^2\,.\,\sin\varpi^2 + \cos\varpi^2}{r}$$

$$\left(\frac{d^2\theta}{dz^2}\right) = -\left(\frac{d\theta}{dz}\right) \cdot \frac{\sin\theta\,.\,\sin\varpi}{r} + \left(\frac{d\varpi}{dz}\right) . \frac{\cos\varpi\,.\,\cos\theta}{r} - \left(\frac{dr}{dz}\right) \cdot \frac{\cos\theta\,.\,\sin\varpi}{r^2}$$

$$= -\frac{\sin\theta\,.\,\cos\theta\,.\,\sin\varpi^2}{r^2} + \frac{\cos\varpi^2\,.\,\cos\theta}{r^2\,.\,\sin\theta} - \frac{\sin\theta\,.\,\cos\theta\,.\,\sin\varpi^2}{r^2}$$

$$= \frac{\cos\varpi^2\,.\,\cos\theta - 2\sin\theta^2\,.\,\cos\theta\,.\,\sin\varpi^2}{r^2\,.\,\sin\theta}$$

$$\left(\frac{d^2\varpi}{dz^2}\right) = -\left(\frac{d\varpi}{dz}\right) . \frac{\sin\varpi}{r\,.\,\sin\theta} - \left(\frac{dr}{dz}\right) . \frac{\cos\varpi}{r^2\,.\,\sin\theta} - \left(\frac{d\theta}{dz}\right) . \frac{\cos\theta\,.\,\cos\varpi}{r\,.\,\sin\theta^2}$$

$$= -\frac{\sin\varpi\,.\,\cos\varpi}{r^2\,.\,\sin\theta^2} - \frac{\sin\varpi\,.\,\cos\varpi}{r^2} - \frac{\cos\theta^2\,.\,\cos\varpi\,.\,\sin\varpi}{r^2\,.\,\sin\theta^2}$$

$$= -\frac{\sin\varpi\,.\,\cos\varpi}{r^2\,.\,\sin\theta^2}\,[1 + \sin\theta^2 + \cos\theta^2] = \frac{-2\,.\,\sin\varpi\,.\,\cos\varpi}{r^2\,.\,\sin\theta^2}.$$

Hieraus erhält man

$$\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right) = \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)\sin\theta^2\,.\,\sin\varpi^2 + 2\left(\frac{d^2V}{dr\,.\,d\theta}\right) \cdot \frac{\sin\theta\,.\,\cos\theta\,.\,\sin\varpi^2}{r} + 2\left(\frac{d^2V}{dr\,.\,d\varpi}\right) . \frac{\sin\varpi\,.\cos\varpi}{r}$$

$$+ \left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right) . \frac{\cos\theta^2\,.\,\sin\varpi^2}{r^2} + 2\left(\frac{d^2V}{d\theta\,.\,d\varpi}\right) . \frac{\cos\theta\,.\,\sin\varpi\,.\,\cos\varpi}{r^2\,.\,\sin\theta} + \left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right) \cdot \frac{\cos\varpi^2}{r^2\,.\,\sin\theta^2}$$

$$+ \left(\frac{dV}{dr}\right)\left(\frac{\cos\theta^2\,.\,\sin\varpi^2 + \cos\varpi^2}{r}\right) + \left(\frac{dV}{d\theta}\right)\left(\frac{\cos\varpi^2\,.\cos\theta - 2\sin\theta^2\,.\,\cos\theta\,.\,\sin\varpi^2}{r^2\,.\,\sin\theta}\right)$$

$$- 2\left(\frac{dV}{d\varpi}\right) \cdot \frac{\sin\varpi\,.\,\cos\varpi}{r^2\,.\,\sin\theta^2}.$$

Auf diese Art wird man die Gleichung (A) in folgende verwandeln:

$$o = \left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right) + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \left(\frac{dV}{d\theta}\right) + \frac{\left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right)}{\sin\theta^2} + r \cdot \left(\frac{d^2 \cdot rV}{dr^2}\right); \quad \text{(B)}$$

und wenn man $\cos\theta = \mu$ setzt, so wird die letzte Gleichung sich in folgende verwandeln:

Substituirt man diese Werthe der partiellen Differenziale von V in die Gleichung (A), so erhält man folgende Gleichung:

$$o = \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right)(\cos\theta^2 + \sin\theta^2 . \cos\varpi^2 + \sin\theta^2 . \sin\varpi^2) + 2\left(\frac{d^2V}{dr . d\theta}\right)\left[\frac{-\sin\theta.\cos\theta + \sin\theta.\cos\theta(\cos\varpi^2 + \sin\varpi^2)}{r}\right]$$

$$+ 2\left(\frac{d^2V}{dr . d\varpi}\right)\left(-\frac{\sin\varpi . \cos\varpi}{r} + \frac{\sin\varpi . \cos\varpi}{r}\right) + \left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right)\left[\frac{\sin\theta^2 + \cos\theta^2 (\cos\varpi^2 + \sin\varpi^2)}{r^2}\right]$$

$$+ 2\left(\frac{d^2V}{d\theta . d\varpi}\right)\left(\frac{-\cos\theta . \cos\varpi . \sin\varpi + \cos\theta . \cos\varpi . \sin\varpi}{r^2 . \sin\theta}\right) + \left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right)\left(\frac{\sin\varpi^2 + \cos\varpi^2}{r^2 . \sin\theta^2}\right)$$

$$+ \left(\frac{dV}{dr}\right) . \left[\frac{\sin\theta^2 + \cos\theta^2 (\cos\varpi^2 + \sin\varpi^2) + \sin\varpi^2 + \cos\varpi^2}{r}\right]$$

$$+ \left(\frac{dV}{d\theta}\right) . \left[\frac{2 . \sin\theta^2 . \cos\theta\,(1 - \sin\varpi^2) - 2\sin\theta^2 . \cos\theta . \cos\varpi^2 + (\sin\varpi^2 + \cos\varpi^2)\cos\theta}{r^2 . \sin\theta}\right]$$

$$+ \left(\frac{dV}{d\varpi}\right) . \left(\frac{2\sin\varpi . \cos\varpi - 2\sin\varpi . \cos\varpi}{r^2 . \sin\theta^2}\right),$$

welche sich sehr leicht in folgende verwandelt:

$$o = \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right) . \frac{1}{r^2} + \left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right) . \frac{1}{r^2 . \sin\theta^2} + \left(\frac{dV}{dr}\right) . \frac{2}{r} + \left(\frac{dV}{d\theta}\right) . \frac{\cos\theta}{r^2 . \sin\theta},$$

oder wenn man mit r^2 multiplicirt

$$o = r^2 . \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right) . \frac{1}{\sin\theta^2} + 2r . \left(\frac{dV}{dr}\right) + \left(\frac{dV}{d\theta}\right) . \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Nun ist $r^2 . \left(\frac{d^2V}{dr^2}\right) + 2r . \left(\frac{dV}{dr}\right) = r . \left(\frac{d^2 . rV}{dr^2}\right)$, folglich

$$o = r . \left(\frac{d^2 . rV}{dr^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right) + \left(\frac{dV}{d\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) + \left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right) . \frac{1}{\sin\theta^2} \quad \text{(B).}$$

Jetzt kann man nur noch versuchen, die auf θ sich beziehenden Differenziale in ein Glied zu vereinigen. Es ist $\left(\frac{d^2V}{d\theta^2}\right) + \left(\frac{dV}{d\theta}\right) . \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \left(\frac{d^2V}{d\theta^2 . \sin\theta^2}\right)\sin\theta^2 + \left(\frac{dV}{d\theta . \sin\theta}\right)\cos\theta,$

welche Gröfse, wenn man $\cos\theta = \mu$ setzt, sich in folgende verwandelt:

$$\left(\frac{d^2V}{d\mu^2}\right)(1 - \mu\mu) - \left(\frac{dV}{d\mu}\right)\mu,$$

und man sieht leicht, dafs dieser Ausdruck das partielle Differenzial von $(1 - \mu\mu)\left(\frac{dV}{d\mu}\right)$, in Beziehung auf μ genommen, ist. Dadurch verwandelt sich die Gleichung (B) in die im Text gegebene Gleichung C.

$$0 = \left\{\frac{d \, . \left[(1-\mu\mu) \, . \left(\frac{dV}{d\mu}\right)\right]}{d\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right)}{1-\mu\mu} + r \, . \left(\frac{d^2 \, . \, rV}{dr^2}\right) \quad \text{(C)}.$$

12. Man nehme nun an, daſs das Sphäroid eine Kugelschale und der Anfangspunkt der Koordinaten im Mittelpunkt derselben sey, so ist klar, daſs V nur von r abhängen, und weder μ noch ϖ enthalten wird. Die Gleichung (C) wird also folgende geben:

$$0 = \left(\frac{d^2 \, . \, rV}{dr^2}\right);$$

woraus man durch Integriren [24])

$$V = A + \frac{B}{r}$$

erhält, wo A und B zwey willkührliche beständige Gröſsen sind. Man hat also

$$-\left(\frac{dV}{dr}\right) = \frac{B}{r^2}.$$

Nach dem Vorhergehenden drückt aber $-\left(\frac{dV}{dr}\right)$ die Wirkung der Kugelschale auf den Punkt m aus, welche nach der Richtung des Halbmessers r zerlegt und gegen den Mittelpunkt der Kugelschale gekehrt ist; nun ist aber klar, daſs die ganze Wirkung der Kugelschale nach diesem Halbmesser gerichtet seyn muſs; folglich drückt $-\left(\frac{dV}{dr}\right)$ die ganze Wirkung der Kugelschale auf den Punkt m aus.

Wir wollen nun anfangs annehmen, daſs dieser Punkt sich innerhalb der Kugelschale befinde. Wäre er im Mittelpunkt selbst, so würde die Wirkung der Kugelschale gleich Null seyn; man hat also, wenn $r = 0$ ist, $-\left(\frac{dV}{dr}\right) = 0$ oder

24) Da V bloſs von r abhängt, so ist $\left(\frac{d^2 \, . \, rV}{dr^2}\right) = \frac{d^2 \, . \, rV}{dr^2}$. Um integriren zu können, muſs man mit dr multipliciren, so erhält man $d \, . \, \frac{d \, . \, rV}{dr} = 0$, und also $\frac{d \, . \, rV}{dr} = A$, wo A eine beständige Gröſse und folglich $d \, . \, rV = A \, . \, dr$ ist; integrirt man, so ist $rV = Ar + B$, wo B die zweyte beständige Gröſse ist.

oder $\frac{B}{r^2} = 0$; dies giebt $B = 0$ und folglich im Allgemeinen, was auch der Werth von r sey, $-\left(\frac{dV}{dr}\right) = 0$; hieraus folgt, daſs ein innerhalb einer Kugelschale sich befindender Punkt von ihr keine Wirkung erfährt, oder, welches eben so viel sagt, von allen Seiten gleich stark angezogen wird.

Befindet sich der Punkt auſserhalb der Kugelschale, so ist sichtbar, daſs wenn man ihn unendlich entfernt von deren Mittelpunkt annimmt, die Wirkung der Kugelschale eben dieselbe seyn wird, als ob die ganze Masse der Kugelschale in diesem Mittelpunkt vereinigt wäre; nennt man also die Masse dieser Kugelschale M, so wird in diesem Fall $-\left(\frac{dV}{dr}\right)$ oder $\frac{B}{r^2}$ gleich $\frac{M'}{r^2}$ werden, dieses giebt $B = M'$; man hat also im Allgemeinen für alle äuſsere Punkte

$$-\left(\frac{dV}{dr}\right) = \frac{M}{r^2},$$

das heiſst, die Kugelschale zieht sie so an, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre.

Da eine Kugel eine Kugelschale ist, wovon der innern Fläche Halbmesser gleich Null ist, so sieht man, daſs ihre Anziehung auf einen auf der Oberfläche oder auſserhalb derselben sich befindenden Punkt dieselbe ist, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre.

Dieses Resultat hat auch bey Kugeln Statt, welche aus concentrischen Kugelschalen bestehen, deren Dichte nach einem gegebenen Gesetze vom Mittelpunkt bis zum Umfang sich ändert, weil es für jede dieser Schalen wahr ist. Da nun die Sonne, die Planeten und die Satelliten sehr nahe als solche Kugeln angesehen werden können, so ziehen sie die äuſsern Körper sehr nahe eben so an, als wenn ihre Massen in ihrem Schwerpunkt vereinigt wären, welches dem, was wir im 5ten Satz durch die Beobachtungen gefunden haben, gemäſs ist. Die Gestalt der himmlischen Körper ist in der That zwar etwas von der Kugel verschieden; der Unterschied ist aber sehr klein, und der Irrthum, welcher hieraus in der vorhergehenden Voraussetzung entstehen kann, ist für Punkte, welche nahe an der Oberfläche sind, von derselben Ordnung, wie dieser Unterschied. Für entfernte Punkte aber ist der Irrthum und das Product dieses Unterschiedes in das Quadrat des Verhältnisses der Halbmesser der anziehenden Körper zu

ihren Entfernungen von den angezogenen Punkten von einerley Ordnung. Denn man hat im 10ten Satz gesehen, daſs wenn man bloſs die Entfernungen betrachtet, der Irrthum der vorhergehenden Voraussetzung und das Quadrat dieses Verhältnisses von derselben Ordnung sind. Die Himmelskörper ziehen sich also sehr nahe so an, als ob ihre Massen in ihren Schwerpunkten vereinigt wären, nicht nur, weil ihre Entfernungen von einander in Vergleichung mit ihren Abmessungen sehr groſs sind, sondern auch weil ihre Gestalt sehr wenig von der Kugel verschieden ist.

Die Eigenschaft, welche die Kugeln beym Gesetz der Natur besitzen, so anzuziehen, als ob ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt wären, ist sehr merkwürdig, und man kann neugierig seyn zu wissen, ob sie in andern Attractionsgesetzen Statt hat. Hierzu bemerken wir, daſs, wenn das Gesetz der Schwere so beschaffen ist, daſs eine gleich dichte Kugel einen äuſsern Punkt so anzieht, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre, dasselbe Resultat für eine Kugelschale von gleicher Dicke Statt finden muſs. Denn wenn man von einer Kugel eine Kugelschale von gleicher Dicke wegnimmt, so wird man eine neue Kugel von kleinerm Halbmesser erhalten, welche aber, so wie die vorhergehende, die Eigenschaft haben wird, so anzuziehen, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre. Nun ist aber augenscheinlich, daſs beide Kugeln nur dann diese gemeinschaftliche Eigenschaft haben können, wenn die Kugelschale, um welche sie von einander verschieden sind, auch diese Eigenschaft hat. Dadurch ist die Aufgabe darauf zurückgebracht, die Attractionsgesetze zu bestimmen, nach welchen eine Kugelschale von unendlich kleiner aber beständiger Dicke auf einen äuſsern Punkt so wirkt, als ob ihre ganze Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre.

Es sey r die Entfernung des angezogenen Punktes vom Mittelpunkt der Kugelschale, u der Halbmesser dieser Kugelschale, und du ihre Dicke. Es sey θ der Winkel, welchen der Halbmesser u mit der geraden Linie r macht, ϖ der Winkel, welchen die durch die Linien r und u gehende Ebene mit einer durch r gehenden festen Ebene macht; das Element der Kugelschale wird $u^2 \,.\, du \,.\, d\varpi \,.\, d\theta \,.\, \sin\theta$ seyn [25]. Nennt man ferner f die Entfernung dieses Elements vom angezogenen Punkt, so wird man

25) Will man sich die hier vorkommenden Winkel und Ebenen, ohne eine Figur zu entwerfen, vorstellen, so nenne man die durch r und u gehende Ebene die Ebene der Ekliptik; die Durchschnittslinie der

$$f^2 = r^2 - 2ru \cdot \cos\theta + u^2$$

haben. Wir wollen durch $\phi(f)$ das Gesetz der Anziehung in der Entfernung f ausdrücken, so wird die mit r parallele und gegen den Mittelpunkt gerichtete Wirkung der Kugelschale auf den angezogenen Punkt

$$u^2 \cdot du \cdot d\varpi \cdot d\theta \cdot \sin\theta \cdot \frac{r - u \cdot \cos\theta}{f} \cdot \phi(f)$$

seyn [26]); man hat aber

$$\frac{r - u \cdot \cos\theta}{f} = \left(\frac{df}{dr}\right).$$

Dieses giebt der vorhergehenden Gröſse folgende Gestalt:

$$u^2 \cdot du \cdot d\varpi \cdot d\theta \cdot \sin\theta \cdot \left(\frac{df}{dr}\right) \cdot \phi(f).$$

Bezeichnet man also $\int df \cdot \phi(f)$ mit $\phi_{,}(f)$, so wird man die ganze Wirkung der Kugelschale auf den angezogenen Punkt erhalten, wenn man das Integral $u^2 \cdot du \cdot \int d\varpi \cdot d\theta \cdot \sin\theta \cdot \phi_{,}(f)$ in Beziehung auf r differenziirt und mit dr dividirt.

Dieses Integral muſs in Beziehung auf ϖ von $\varpi = 0$ an bis ϖ gleich dem ganzen Umkreis genommen werden, und nach dieser Integration wird es

festen Ebene und der Ekliptik, oder die Linie r, gehe durch den Nullpunkt des Widders; es sey ferner m der Punkt der Kugelfläche, wo der Halbmesser u sie schneidet, so ist θ die Länge des Punkts m; ϖ der Winkel der Ekliptik und der festen Ebene. Man ziehe durch m einen Breitenkreis bis zur festen Ebene. Es sey M ein zweyter Punkt der Kugelfläche, unendlich nahe bey m; man ziehe durch M einen zweyten Breitenkreis, und von M bis zum Nullpunkt des Widders einen Bogen, den wir C nennen wollen. Der Winkel, welchen die Ekliptik und der Bogen C mit einander machen, ist die Aenderung des Winkels ϖ, und also offenbar gleich $d\varpi$. Das zwischen der Ekliptik und zwischen C enthaltene Stück des Breitenkreises von m ist gleich $d\varpi \cdot \sin\theta$ vermöge des bekannten Satzes, daſs ein auf zwey Kreisbogen senkrechter kleiner Bogen dem gegenüberstehenden Winkel, mit dem Sinus des Kreisbogens, auf welchem er senkrecht ist, multiplicirt, gleich ist. Auf einer Kugelfläche vom Halbmesser u ist also dieses Stück des Breitenkreises gleich $u \cdot d\varpi \cdot \sin\theta$. Das Stück des Breitenkreises von M ist gleich $u \cdot d\varpi \cdot \sin(\theta + d\theta)$ oder dem vorhergehenden Stück $u \cdot d\varpi \cdot \sin\theta$. Das zwischen den zwey Breitenkreisen enthaltene Stück der Ekliptik ist offenbar $u \cdot d\theta$, und folglich ist der Inhalt des Parallelogramms, welches diese beiden Linien bilden, gleich $u^2 d\varpi \cdot d\theta \cdot \sin\theta$. Dies ist das Differenzial der Kugelfläche, und wenn man diese Gröſse mit der Dicke du, welche man als eine beständige Gröſse ansehen muſs, multiplicirt, so erhält man das Differenzial der Kugelschale.

26) Im Dreyeck, dessen Seiten r, f, u sind, und wo der der Seite f gegenüberstehende Winkel θ ist, fälle man vom Endpunkt der Seite f eine senkrechte Linie auf r; diese Senkrechte theilt die Linie r in zwey Theile $r - u \cdot \cos\theta$ und $u \cdot \cos\theta$; der erste Theil $r - u \cdot \cos\theta$ drückt die mit r parallele Kraft aus, wenn f die Totalkraft vorstellt.

$$2\pi \,.\, u^2 \,.\, du \,.\, \int d\theta \,.\, \sin\theta \,.\, \varphi_{,}(f),$$

wo π das Verhältniſs des halben Umkreises zum Halbmesser ist. Differenziirt man den Werth von f in Bezug auf θ, so wird man

$$d\theta \,.\, \sin\theta = \frac{f \,.\, df}{ru}$$

und folglich

$$2\pi \,.\, u^2 du \,.\, \int d\theta \,.\, \sin\theta \,.\, \varphi_{,}(f) = 2\pi \,.\, \frac{u \,.\, du}{r} \,.\, \int f\, df \,.\, \varphi_{,}(f)$$

erhalten. Das Integral, welches sich auf θ bezieht, muſs von $\theta = 0$ an bis $\theta = \pi$ genommen werden, und zwischen diesen beiden Grenzen hat man $f = r - u$ und $f = r + u$, folglich muſs das Integral, in Beziehung auf f, von $f = r - u$ an bis $f = r + u$ genommen werden; es sey also $\int f\, df \,.\, \varphi_{,}(f) = \psi(f)$, so wird man

$$\frac{2\pi \,.\, u\, du}{r} \int f\, df \,.\, \varphi_{,}(f) = \frac{2\pi \,.\, u\, du}{r} \,.\, [\psi(r+u) - \psi(r-u)]$$

haben. Der Koefficient von dr im Differenzial des zweyten Theils dieser Gleichung, welches in Bezug auf r genommen worden ist, wird die Anziehung der Kugelschale auf den angezogenen Punkt geben; und man kann leicht daraus schlieſsen, daſs in der Natur, wo $\varphi(f) = \frac{1}{f^2}$ ist, diese Anziehung gleich $\frac{4\pi . u^2 du}{r}$ ist [27]), d. h. daſs sie eben dieselbe ist, als ob die ganze Masse der Kugelschale in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre, welches einen neuen Beweis der Eigenschaft giebt, welche wir vorher über die Anziehung der Kugeln festgesetzt haben.

Wir wollen nun $\varphi(f)$ durch die Bedingung bestimmen, daſs die Anziehung der Kugelschale eben dieselbe seyn soll, als ob ihre Masse in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre. Diese Masse ist gleich $4\pi \,.\, u^2 du$, und wenn sie in ihrem Mittelpunkt vereinigt wäre, so würde ihre Wirkung auf den angezogenen Punkt gleich $4\pi \,.\, u^2 du \,.\, \varphi(r)$ seyn; man hat also

27) Wenn $\varphi f = \frac{1}{f^2}$ ist, so ist $\varphi_{,} f$ oder $\int df \,.\, \varphi f = \int \frac{df}{f^2} = -f^{-1}$; ferner ist $\psi(f)$ oder $\int f df \,.\, \varphi_{,}(f)$ gleich $-\int df = -f$, also die Anziehung der Kugelschale

$$\frac{2\pi \,.\, u\, du}{r} \,.\, [-(r+u) + (r-u)] = \frac{4\pi \,.\, u^2\, du}{r}.$$

$$2\pi \,.\, u\,du \,.\, \left\{\frac{d \,.\, \left[\frac{1}{r}\left[\psi(r+u) - \psi(r-u)\right]\right]}{dr}\right\} = 4\pi \,.\, u^2 du \,.\, \Phi(r) \quad \text{(D).}$$

Integrirt man in Beziehung auf r, so erhält man

$$\psi(r+u) - \psi(r-u) = 2ru \,.\, \int dr \,.\, \Phi(r) + rU,$$

wo U eine Function von u und von beständigen Gröſsen ist, welche zum Integral $2u \,.\, \int dr \,.\, \Phi(r)$ hinzugesetzt werden muſs. Bezeichnet man die Gröſse $\psi(r+u) - \psi(r-u)$ mit R, so erhält man, wenn man die vorhergehende Gleichung differenziirt,

$$\left(\frac{d^2R}{dr^2}\right) = 4u \,.\, \Phi(r) + 2ru \,.\, \frac{d \,.\, \Phi(r)}{dr}$$

$$\left(\frac{d^2R}{du^2}\right) = r \,.\, \left(\frac{d^2U}{du^2}\right).$$

Man hat aber durch die Natur der Function R [28])

$$\left(\frac{d^2R}{dr^2}\right) = \left(\frac{d^2R}{du^2}\right),$$

folglich

$$2u \,.\, \left(2\Phi(r) + r \,.\, \frac{d \,.\, \Phi(r)}{dr}\right) = r \,.\, \left(\frac{d^2U}{du^2}\right)$$

oder

$$\frac{2\Phi(r)}{r} + \frac{d \,.\, \Phi(r)}{dr} = \frac{1}{2u} \,.\, \left(\frac{d^2U}{du^2}\right).$$

Da nun der erste Theil dieser Gleichung von u, und der zweyte von r unab-

28) Wenn ψ', ψ'', willkührliche Functionen bezeichnen, so hat man dR oder $d \,.\, [\psi(r+u) - \psi(r-u)]$ gleich $(dr + du)\,\psi'(r+u) - (dr - du)\,\psi'(r-u)$, oder $dr \,.\, [\psi'(r+u) - \psi'(r-u)] + du\,[\psi'(r+u) + \psi'(r-u)]$; folglich

$$\left(\frac{dR}{dr}\right) = \psi'(r+u) - \psi'(r-u) \text{ und}$$

$$\left(\frac{dR}{du}\right) = \psi'(r+u) + \psi'(r-u).$$

Differenziirt man diese Werthe von neuem, so giebt die erste Gleichung

$$\left(\frac{d^2R}{dr^2}\right) = \psi''(r+u) - \psi''(r-u), \text{ und die zweyte}$$

$$\left(\frac{d^2R}{du^2}\right) = \psi''(r+u) - \psi''(r-u).$$

hängig ist, so muſs jeder dieser Theile einer beständigen willkührlichen Gröſse gleich seyn, welche wir mit $3A$ bezeichnen wollen; man hat also

$$\frac{2 \cdot \phi(r)}{r} + \frac{d \cdot \phi(r)}{dr} = 3A,$$

woraus man, wenn man integrirt, folgende Gleichung erhält [29]):

$$\phi(r) = Ar + \frac{B}{r^2},$$

wo B eine neue beständige Gröſse ist. Alle Attractionsgesetze, nach welchen eine Kugel auf einen äuſsern, in der Entfernung r von ihrem Mittelpunkt sich befindenden, Punkt eben so wirkt, als ob ihre ganze Masse in diesem Mittelpunkt vereinigt wäre, sind in der allgemeinen Formel

$$Ar + \frac{B}{r^2}$$

begriffen, und man sieht leicht, daſs dieser Werth in der That der Gleichung (D) Genüge thut, was auch immer A und B seyn mögen.

Setzt man $A = 0$, so erhält man das Gesetz der Natur, und man sieht, daſs unter der unendlichen Menge Gesetze, welche die Attraction in groſsen Entfernungen sehr klein geben, das Gesetz der Natur das einzige ist, in welchem die Kugeln die Eigenschaft haben, so zu wirken, als ob ihre Massen in ihren Mittelpunkten vereinigt wären.

Dieses Gesetz ist auch noch das einzige, nach welchem ein innerhalb einer überall gleich dicken Kugelschale sich befindender Körper von allen Seiten gleich stark angezogen wird. Es erhellet aus der vorhergehenden Analysis,

29) Aus dem Fall, der in der Natur Statt findet, kann man vermuthen, daſs $\varphi(r)$ folgende Form hat:

$ar^{\alpha} + br^{\beta} + cr^{\gamma} + \ldots$ Dann ist

$$\frac{2\varphi(r)}{r} = 2ar^{\alpha-1} + 2br^{\beta-1} + 2cr^{\gamma-1} + \ldots$$

$$\frac{d \cdot \varphi(r)}{dr} = \alpha a r^{\alpha-1} + \beta b r^{\beta-1} + \gamma c r^{\gamma-1} + \ldots$$

$$3A = a(2+\alpha)r^{\alpha-1} + b(2+\beta)r^{\beta-1} + c(2+\gamma)r^{\gamma-1} + \ldots$$

also $\alpha = 1$ und $a = A$; die übrigen Koefficienten müssen alle gleich Null seyn, also $b(2+\beta) = 0$, das heiſst, $2 + \beta = 0$ oder $\beta = -2$. Der folgende und alle übrigen Koefficienten $c(2+\gamma)$ haben die nämliche Form wie der vorhergehende; wollte man den Factor $2+\gamma$ gleich Null setzen, so würde γ von β nicht verschieden seyn; man kann also nur den Factor c gleich Null setzen.

dafs die Wirkung einer Kugelschale, deren Dicke du ist, auf einen innerhalb sich befindenden Punkt, durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$2\pi \,.\, udu \,.\left\{\frac{d \,.\, \frac{1}{r}\,[\psi(u+r) - \psi(u-r)]}{dr}\right\}.$$

Soll diese Function gleich Null seyn, so muſs man

$$\psi(u+r) - \psi(u-r) = r \,.\, U$$

haben, wo U eine Function von u, aber unabhängig von r ist, und man sieht leicht, dafs dieses im Gesetz der Natur, wo $\varphi(f) = \frac{B}{f^2}$ ist, Statt hat. Um aber zu zeigen, dafs dies nur bey diesem Gesetze Statt hat, wollen wir das durch df dividirte Differenzial von $\psi(f)$ mit $\psi'(f)$ bezeichnen; wir werden ferner das mit df dividirte Differenzial von $\psi'(f)$ mit $\psi''(f)$ bezeichnen, und so die übrigen. Differenziirt man dann zweymal die vorhergehende Gleichung in Beziehung auf r, so erhält man

$$\psi''(u+r) - \psi''(u-r) = 0.$$

Diese Gleichung hat für jeden Werth von u und r Statt, und es folgt hieraus, dafs $\psi''(f)$ für jeden Werth von f einer beständigen Gröſse, und folglich $\psi'''(f)$ gleich Null seyn muſs; man hat aber nach dem Vorhergehenden

$$\psi'(f) = f \,.\, \varphi_{\prime}(f);$$

hieraus erhält man

$$\psi'''(f) = 2\,\varphi(f) + f \,.\, \varphi'(f)$$

man hat folglich

$$0 = 2\,\varphi(f) + f \,.\, \varphi'(f),$$

woraus man durch Integriren $\varphi(f) = \frac{B}{f^2}$, und folglich das Gesetz der Natur erhält.

13. Wir wollen nun die Gleichung (C) des 11ten Satzes wieder vornehmen. Könnte man diese Gleichung im Allgemeinen integriren, so würde man einen Ausdruck für V erhalten, welcher zwey willkührliche Gröſsen enthalten würde, die man dadurch bestimmte, dafs man die Attraction des Sphäroids auf einen Punkt, dessen Lage diese Untersuchung erleichtert, suchen und diese Attraction mit ihrem allgemeinen Ausdruck vergleichen würde. Die Integration

der Gleichung (*C*) ist aber nur in einigen besondern Fällen möglich, z. B. in dem Fall, wo das anziehende Sphäroid eine Kugel ist, wodurch diese Gleichung auf die gewöhnlichen Differenziale zurück gebracht wird. Sie ist auch noch in dem Fall möglich, wo dies Sphäroid ein Cylinder ist, dessen Grundfläche eine in sich zurückkehrende krumme Linie und dessen Länge unendlich ist: man wird im 3ten Buche sehen, daſs dieser besondere Fall die Theorie der Saturns - Ringe enthält.

Wir wollen den Anfangspunkt der r auf der Axe des Cylinders selbst annehmen, welche wir auf jeder Seite dieses Anfangspunkts von unendlicher Länge annehmen werden. Nennt man nun die Entfernung des angezogenen Punktes r', so wird man

$$r' = r \cdot \sqrt{1 - \mu^2}$$

haben. Es ist sichtbar, daſs V nur von r' und von ϖ abhängt, weil es für alle Punkte, für welche diese beiden veränderlichen Gröſsen dieselben Werthe haben, denselben Werth hat; es enthält also nur μ, in so fern r' Function dieser veränderlichen Gröſse ist; dieses giebt

$$\left(\frac{dV}{d\mu}\right) = \left(\frac{dV}{dr'}\right) \cdot \left(\frac{dr'}{d\mu}\right) = - \frac{r\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \cdot \left(\frac{dV}{dr'}\right)$$

$$\left(\frac{d^2V}{d\mu^2}\right) = \frac{r^2 \mu^2}{1 - \mu^2} \cdot \left(\frac{d^2V}{dr'^2}\right) - \frac{r}{(1 - \mu^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{dV}{dr'}\right).$$

Dadurch verwandelt sich die Gleichung (*C*) in folgende:

$$0 = r'^2 \cdot \left(\frac{d^2V}{dr'^2}\right) + \left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right) + r' \cdot \left(\frac{dV}{dr'}\right),$$

aus welcher man durch Integriren folgende erhält [30]):

$$V = \Phi$$

30) Da $r'^2 \cdot \left(\frac{d^2V}{dr'^2}\right) + r' \cdot \left(\frac{dV}{dr'}\right) = \frac{r'\left[r' \cdot d \cdot \left(\frac{dV}{dr'}\right) + dr' \cdot \left(\frac{dV}{dr'}\right)\right]}{dr'} = r' \cdot \left[\frac{d \cdot \left[r'\left(\frac{dV}{dr'}\right)\right]}{dr'}\right]$, so verwandelt sich die für V gegebene Gleichung in folgende:

$$- r' \cdot \left[\frac{d \cdot \left[r'\left(\frac{dV}{dr'}\right)\right]}{dr'}\right] = \left(\frac{d^2V}{d\varpi^2}\right).$$

Man sieht leicht, daſs, wenn V von der Form $r' \cdot Z$ ist, wo Z eine Function von ϖ ist, dann

r'.

$V = \phi\,(r' \,.\, \cos\varpi + r' \,.\, \sqrt{-1} \,.\, \sin\varpi) + \psi\,(r' \,.\, \cos\varpi - r' \,.\, \sqrt{-1} \,.\, \sin\varpi)$; wo $\phi\,(r')$ und $\psi\,(r')$ willkührliche Funktionen von r' sind, welche man dadurch bestimmen kann, daſs man die Attraction des Cylinders sucht, wenn ϖ gleich Null, und wenn ϖ einem rechten Winkel gleich ist.

Wenn die Grundfläche des Cylinders ein Kreis ist, so wird V offenbar eine Funktion von r' und unabhängig von ϖ seyn; dann verwandelt sich die vorhergehende Gleichung zwischen den partiellen Differenzialen in folgende:

$$0 = r'^2 \,.\, \left(\frac{d^2V}{dr'^2}\right) + r' \,.\, \left(\frac{dV}{dr'}\right),$$

aus welcher man durch Integriren

$$-\left(\frac{dV}{dr'}\right) = \frac{H}{r'}$$

erhält, wo H eine beständige Gröſse ist. Um sie zu bestimmen, werden wir r' in Vergleichung mit dem Halbmesser der Grundfläche des Cylinders unendlich groſs setzen, wodurch es erlaubt ist, den Cylinder wie eine gerade unendlich

$r' \,.\, \left(\frac{dV}{dr'}\right)$ gleich V seyn wird; differenziirt man dieses Differenzial von neuem in Beziehung auf r', und multiplicirt man mit r', so erhält man $r' \,.\, \left(\frac{dV}{dr'}\right)$, welches gleich V ist. Der erste Theil der obigen Gleichung ist also gleich $-V$, und man hat $-r'Z = r'\left(\frac{d^2Z}{d\varpi^2}\right)$, wo Z bloſs als Function von ϖ betrachtet werden muſs. Nun ist bekanntlich $\left(\frac{d^n \,.\, c^{\alpha\varpi}}{d\varpi^n}\right) = \alpha^n \,.\, c^{\alpha\varpi}$; vergleicht man diese Gleichung mit der vorhergehenden, so findet man $-e^{\alpha\varpi} = Z$; $n = 2$; $\alpha^2 = -1$, also $\alpha = \pm\sqrt{-1}$. Vorher war $V = r' \,.\, Z$; der vollständige Werth von V ist daher $r' \,.\, e^{\pm\varpi\sqrt{-1}}$. Dieser Werth von V thut zwar der gegebenen Gleichung Genüge, ist aber nicht ihr vollständiges Integral; denn dieses muſs zwey willkührliche Gröſsen enthalten. Es erhellet aber aus diesen zwey gefundenen besondern Integralen, daſs der Werth von V allgemeiner folgender ist:

$$V = A \,.\, r' e^{+\varpi\sqrt{-1}} + B \,.\, r' \,.\, e^{-\varpi\sqrt{-1}},$$

wo A und B zwey willkührliche beständige Gröſsen sind. Man wird aber leicht aus der gewöhnlichen Form der aus partiellen Differenzialen entstandenen Integrale vermuthen, daſs das vollständige Integral in folgender Gleichung enthalten ist:

$$V = \varphi\left(r' e^{+\varpi\sqrt{-1}}\right) + \psi\left(r' e^{-\varpi\sqrt{-1}}\right),$$

und man wird sich leicht durch die Differenziation versichern, daſs sie der gegebenen Differenzialgleichung Genüge thut.

große Linie zu betrachten. Es sey diese Grundfläche gleich A, und z die Entfernung irgend eines Punktes der Axe des Cylinders von dem Punkte, wo diese Axe von r' geschnitten wird, und man sehe die Wirkung des Cylinders wie in seiner Axe vereinigt an; so wird seine mit r' parallele Wirkung gleich

$$\int \frac{A r' \, . \, dz}{(r'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

seyn. Nimmt man das Integral von $z = -\infty$ bis $z = \infty$, so wird es gleich $\frac{2A}{r'}$; dies ist der Werth von $-\left(\frac{dV}{dr'}\right)$, wenn r' sehr groß ist. Vergleicht man ihn mit dem vorhergehenden Werth, so erhält man $H = 2A$, und man sieht, daß die Wirkung des Cylinders auf einen äußern Punkt für jeden Werth von r' gleich $\frac{2A}{r'}$ ist.

Ist der angezogene Punkt innerhalb einer cylindrischen kreisförmigen Schale, deren Dicke beständig und deren Länge unendlich groß ist; so hat man noch ebenfalls $-\left(\frac{dV}{dr'}\right) = \frac{H}{r'}$; und da die Attraction Null ist, wenn der angezogene Punkt auf der Axe der Schale selbst sich befindet, so wird ein Punkt innerhalb der Schale von allen Seiten gleich stark angezogen.

14. Man kann die Gleichungen (A), (B) und (C) des 11ten Satzes auf die Bewegung eines Körpers erstrecken, und daraus eine sehr nützliche Bedingungsgleichung herleiten, wodurch man theils die Berechnungen der Theorie, theils die Theorie der allgemeinen Schwere selbst prüfen kann. Man kann den Differenzialgleichungen (1), (2), (3) des 9ten Satzes, welche die relative Bewegung von m um M bestimmen, folgende Gestalt geben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{dx}\right); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{dy}\right); \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{dz}\right); \qquad \text{(i)}$$

wo Q gleich $\frac{M+m}{r} - \Sigma \, . \, \frac{m'(xx'+yy'+zz')}{r'^3} + \frac{\lambda}{m}$ ist [31]); und man sieht leicht, daß man

31) Es ist nämlich $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = -(M+m)\left(\frac{dr}{dx}\right) r^{-2} - \left(\frac{d \, . \, \Sigma \, . \, m'(xx'+yy'+zz') \, . \, r'^{-3}}{dx}\right) + \frac{\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)}{m}$.

$$o = \left(\frac{d^2Q}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^2Q}{dy^2}\right) + \left(\frac{d^2Q}{dz^2}\right) \quad (E)$$

hat, wenn die veränderlichen Grölsen x', y', z', x'' etc., welche Q enthält, von x, y, z unabhängig sind.

Wir wollen nun die veränderlichen Grölsen x, y, z in andere zum astronomischen Gebrauch bequemere verwandeln. Es sey r der aus dem Mittelpunkt von M nach m gezogene Halbmesser; wir nennen v den Winkel, welchen der auf die Ebene der x und der y projicirte Halbmesser mit der Axe der x macht, und θ die Neigung von r gegen dieselbe Ebene; so hat man

$$x = r \,.\, \cos\theta \,.\, \cos v$$
$$y = r \,.\, \cos\theta \,.\, \sin v$$
$$z = r \,.\, \sin\theta.$$

Bezieht man nun die Gleichung (E) auf diese neuen veränderlichen Grölsen, so wird sie sich nach dem 11ten Satz in folgende verwandeln:

$$o = r^2 \,.\, \left(\frac{d^2Q}{dr^2}\right) + 2r \,.\, \left(\frac{dQ}{dr}\right) + \frac{\left(\frac{d^2Q}{dv^2}\right)}{\cos\theta^2} + \left(\frac{d^2Q}{d\theta^2}\right) - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} . \left(\frac{dQ}{d\theta}\right) \quad (F).$$

Multiplicirt man die erstere der Gleichungen (i) mit $\cos\theta \,.\, \cos v$, die zweyte mit $\cos\theta \,.\, \sin v$; die dritte mit $\sin\theta$, und setzt man der Kürze wegen

$$M' = \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r \,.\, dv^2}{dt^2} \,.\, \cos\theta^2 - \frac{r \,.\, d\theta^2}{dt^2},$$

Nun ist $\left(\frac{dr}{dx}\right) = \left(\frac{d \,.\, \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{dx}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$.

Ferner $\left(\frac{d \,.\, \Sigma \,.\, m'\,(xx'+yy'+zz')\, r'^{-3}}{dx}\right) = \Sigma \,.\, \left(\frac{d \,.\, m'\,(xx'+yy'+zz')\, r'^{-3}}{dx}\right)$

$$= \Sigma \,.\, \frac{m'\,x'}{r'^3}. \quad \text{Hieraus folgt}$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = -\frac{(M+m)\,x}{r^3} - \Sigma \,.\, \frac{m'\,x'}{r'^3} + \frac{1}{m} \,.\, \left(\frac{d\lambda}{dx}\right), \text{ oder}$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = -\frac{Mx}{r^3} - \frac{mx}{r^3} - \Sigma \,.\, \frac{m'\,x'}{r'^3} + \frac{1}{m} \,.\, \left(\frac{d\lambda}{dx}\right), \text{ oder}$$

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = -\frac{Mx}{r^3} - \Sigma \,.\, \frac{mx}{r^3} + \frac{1}{m} \,.\, \left(\frac{d\lambda}{dx}\right).$$

so erhält man, wenn man die drey Gleichungen addirt [32]),

$$M = \left(\frac{dQ}{dr}\right).$$

Multiplicirt man auf eben diese Art die erste der Gleichungen (i) mit

32) Multiplicirt man die Gleichungen (i) auf die vorgeschriebene Art, und addirt sie, so erhält man

$(d^2x.\cos\theta.\cos\nu + d^2y.\cos\theta.\sin\nu + d^2z.\sin\theta)\,\frac{1}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{dx}\right)\cos\theta.\cos\nu + \left(\frac{dQ}{dy}\right).\cos\theta.\sin\nu + \left(\frac{dQ}{dz}\right).\sin\theta.$

Nun ist $\cos\theta\,.\,\cos\nu = \left(\frac{dx}{dr}\right)$; $\cos\theta\,.\,\sin\nu = \left(\frac{dy}{dr}\right)$; $\sin\theta = \left(\frac{dz}{dr}\right)$; substituirt man diese Werthe im zweyten Theil der vorhergehenden Gleichung, so verwandelt er sich in

$\left(\frac{dQ}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dr}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dr}\right) + \left(\frac{dQ}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dr}\right)$, welches gleich $\left(\frac{dQ}{dr}\right)$ ist. Man hat ferner

$\cos\theta\,.\,\cos\nu = \frac{x}{r}$; $\cos\theta\,.\,\sin\nu = \frac{y}{r}$; $\sin\theta = \frac{z}{r}$, dadurch verwandelt sich der erste Theil der gegebenen Gleichung in $(x\,.\,d^2x + y\,.\,d^2y + z\,.\,d^2z)\,\frac{1}{r\,.\,dt^2}$.

Nun ist $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, folglich $x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr$, und wenn man von neuem differenziirt, $xd^2x + yd^2y + zd^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2 = rd^2r + dr^2$, oder

$xd^2x + yd^2y + zd^2z = rd^2r + dr^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$; dadurch verwandelt sich der erste Theil der gegebenen Gleichung in

$$(r\,.\,d^2r + dr^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)\,\frac{1}{r\,.\,dt^2}.$$

Nun ist $x = (r\,.\,\cos\theta)\,.\,\cos\nu$, folglich

$dx = \cos\nu\,.\,d\,(r\,.\,\cos\theta) - d\nu\,.\,\sin\nu\,.\,(r\,.\,\cos\theta)$, und wenn man quadrirt,

$dx^2 = \cos\nu^2\,.\,[d(r\,.\,\cos\theta)]^2 - d\nu^2\,.\,\sin\nu^2\,.\,(r\,.\,\cos\theta)^2 - 2\,.\,d\nu\,.\,d(r\,.\,\cos\theta)\,.\,\sin\nu\,.\,\cos\nu\,.\,(r\,.\,\cos\theta)$.

Da man y aus x erhält, wenn man ν in $90^\circ - \nu$, und also $d\nu$ in $-d\nu$ verwandelt, so erhält man durch dieselben Verwandlungen dy^2 aus dx^2; nämlich

$dy^2 = \sin\nu^2\,[d\,(r\,.\,\cos\theta)]^2 - d\nu^2\,.\,\cos\nu^2\,.\,(r\,.\,\cos\theta)^2 + 2\,d\nu\,.\,d\,(r\,.\,\cos\theta)\,.\,\cos\nu\,.\,\sin\nu\,.\,(r\,.\,\cos\theta)$,

und also $dx^2 + dy^2 = [\,d\,(r\,.\,\cos\theta)]^2 - d\nu^2\,.\,(r\,.\,\cos\theta)^2$

$= (dr\,.\,\cos\theta - d\theta\,.\,r\,.\,\sin\theta)^2 - d\nu^2\,.\,r^2\,.\,\cos\theta^2$

$= dr^2\,.\,\cos\theta^2 + d\theta^2\,.\,r^2\,.\,\sin\theta^2 - 2\,dr\,.\,d\theta\,.\,r\,.\,\cos\theta\,.\,\sin\theta - d\nu^2\,.\,r^2\,.\,\cos\theta^2$.

Man hat endlich $z = r\,.\,\sin\theta$ und $dz = dr\,.\,\sin\theta + d\theta\,.\,r\,.\,\cos\theta$,

und $dz^2 = dr^2\,.\,\sin\theta^2 + d\theta^2\,.\,r^2\,.\,\cos\theta^2 + 2\,dr\,.\,d\theta\,.\,r\,.\,\sin\theta\,.\,\cos\theta$.

Addirt man diese Gleichung zur vorhergehenden für $dx^2 + dy^2$, so erhält man

$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\,.\,d\theta^2 - d\nu^2\,.\,r^2\,.\,\cos\theta^2$, oder

$dr^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = d\nu^2\,.\,r^2\,.\,\cos\theta^2 - r^2\,.\,d\theta^2$, und also

$\frac{(r\,.\,d^2r + dr^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)}{r\,.\,dt^2} = \frac{(r\,.\,d^2r + d\nu^2\,.\,r^2\,.\,\cos\theta^2 - r^2\,.\,d\theta^2)}{r\,.\,dt^2}$, oder, wenn man jedes Glied einzeln mit $r\,dt$ dividirt, $\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{d\nu^2}{dt^2}\,.\,r\,.\,\cos\theta^2 - r\,.\,\frac{d\theta^2}{dt^2}$.

$- r \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\nu$, die zweyte mit $r \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\nu$, und addirt sie, so erhält man [33])

$$N' = \left(\frac{dQ}{d\nu}\right)$$

wo

$$N' = \frac{d \,.\, \left(r^2 \,.\, \frac{d\nu}{dt} \,.\, \cos\theta^2\right)}{dt}$$

ist. Multiplicirt man endlich die erste der Gleichungen (i) mit $- r.\sin\theta \,.\, \cos\nu$, die zweyte mit $- r \,.\, \sin\theta \,.\, \sin\nu$, die dritte mit $r \,.\, \cos\theta$, und addirt sie, so erhält man

$$P' = \left(\frac{dQ}{d\theta}\right) \text{ [34])},$$

33) Da $\left(\frac{dQ}{d\nu}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx}{d\nu}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) \cdot \left(\frac{dy}{d\nu}\right) + \left(\frac{dQ}{dz}\right) \cdot \left(\frac{dz}{d\nu}\right)$ ist, so muſs man die erste der Gleichungen (i) mit $\left(\frac{dx}{d\nu}\right)$ d. h. mit $- r \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\nu$, die zweyte mit $\left(\frac{dy}{d\nu}\right)$ d. h. mit $r \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\nu$, die dritte mit $\left(\frac{dz}{d\nu}\right)$ d. h. mit o multipliciren, dann wird die Summe der zweyten Theile dieser Gleichungen $\left(\frac{dQ}{d\nu}\right)$ geben. Die Summe der ersten Theile dieser drey Gleichungen ist

$$\frac{+1}{dt^2} \left(- d^2x \,.\, r \,.\, \cos\theta \,.\, \sin\nu + d^2y \,.\, r \,.\, \cos\theta \,.\, \cos\nu\right) = \frac{1}{dt^2} \left(- y \,.\, d^2x + x \,.\, d^2y\right).$$

Nun ist $\frac{y}{x} = \text{tang}\, \nu$, und wenn man differenziirt $- y\,dx + x\,dy = d\nu \,.\, x^2 \,.\, \cos\nu^{-2}$; differenziirt man von neuem, so erhält man $- y \,.\, d^2x + x\,d^2y = d \,.\, (d\nu \,.\, r^2 \,.\, \cos\theta^2)$. Substituirt man diesen Werth, so erhält man für den ersten Theil der gegebenen Gleichung

$$\frac{d \,.\, (d\nu \,.\, r^2 \,.\, \cos\theta^2)}{dt^2} \text{ oder } \frac{d \,.\, \left(\frac{d\nu}{dt} \,.\, r^2 \,.\, \cos\theta^2\right)}{dt}.$$

34) Da $\left(\frac{dQ}{d\theta}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx}{d\theta}\right) + \left(\frac{dQ}{dy}\right) \cdot \left(\frac{dy}{d\theta}\right) + \left(\frac{dQ}{dz}\right) \cdot \left(\frac{dz}{d\theta}\right)$ ist, so multiplicire man die erste der Gleichungen (i) mit $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)$ d. h. mit $- r \,.\, \cos\nu \,.\, \sin\theta$; die zweyte mit $\left(\frac{dy}{d\theta}\right)$ d. h. mit $- r \,.\, \sin\nu \,.\, \sin\theta$, die dritte mit $\left(\frac{dz}{d\theta}\right)$ d. h. mit $r \,.\, \cos\theta$; dann ist die Summe der zweyten Theile dieser drey Gleichungen gleich $\left(\frac{dQ}{d\theta}\right)$. Die Summe der ersten Theile derselben Gleichungen ist

wo

$$P' = r^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + r^2 \cdot \frac{dv^2}{dt^2} \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta + \frac{2\,r\,dr \cdot d\theta}{dt^2}$$

ist. Die Werthe von r, v und θ enthalten sechs willkührliche durch die Integration eingeführte Grössen. Wir wollen irgend drey dieser willkührlichen Grössen betrachten, welche wir mit a, b, c bezeichnen wollen. Die Gleichung $M' = \left(\frac{dQ}{dr}\right)$ wird folgende drey geben:

$$\left(\frac{d^2Q}{dr^2}\right) \cdot \left(\frac{dr}{da}\right) + \left(\frac{d^2Q}{dr \cdot dv}\right) \cdot \left(\frac{dv}{da}\right) + \left(\frac{d^2Q}{dr \cdot d\theta}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{da}\right) = \left(\frac{dM'}{da}\right);$$

$$\left(\frac{d^2Q}{dr^2}\right) \cdot \left(\frac{dr}{db}\right) + \left(\frac{d^2Q}{dr \cdot dv}\right) \cdot \left(\frac{dv}{db}\right) + \left(\frac{d^2Q}{dr \cdot d\theta}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{db}\right) = \left(\frac{dM'}{db}\right);$$

$$\left(\frac{d^2Q}{dr^2}\right) \cdot \left(\frac{dr}{dc}\right) + \left(\frac{d^2Q}{dr \cdot dv}\right) \cdot \left(\frac{dv}{dc}\right) + \left(\frac{d^2Q}{dr \cdot d\theta}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dc}\right) = \left(\frac{dM'}{dc}\right).$$

$$\frac{1}{dt^2}(- d^2x \cdot r \cdot \cos v \cdot \sin\theta - d^2y \cdot r \cdot \sin v \cdot \sin\theta + d^2z \cdot r \cdot \cos\theta), \text{ oder}$$

$$\frac{1}{dt^2}[- r \cdot \sin\theta\,(d^2x \cdot \cos v + d^2y \cdot \sin v) + d^2z \cdot r \cdot \cos\theta].$$

Die doppelten Differenziale schafft man durch folgende Verwandlungen weg.

$$d^2x \cdot \cos v = d\,(dx \cdot \cos v) + dv \cdot dx \cdot \sin v$$
$$d^2y \cdot \sin v = d\,(dy \cdot \sin v) - dv \cdot dy \cdot \cos v.$$

$$d^2x \cdot \cos v + d^2y \cdot \sin v = d\,(dx \cdot \cos v + dy \cdot \sin v) + dv\,(dx \sin v - dy \cos v).$$

Nun ist, wenn man die Werthe von dx und dy aus der vorhergehenden 32sten Anmerkung nimmt,

$$dx \cdot \cos v = \cos v^2 \cdot d\,(r \cdot \cos\theta) - dv \cdot \sin v \cdot \cos v \cdot (r \cdot \cos\theta)$$
$$dy \cdot \sin v = \sin v^2 \cdot d\,(r \cdot \cos\theta) + dv \cdot \cos v \cdot \sin v \cdot (r \cdot \cos\theta)$$

$$dx \cdot \cos v + dy \cdot \sin v = d\,(r \cdot \cos\theta), \text{ und } d\,(dx \cos v + dy \sin v) = d^2\,(r \cos\theta).$$

Ferner $dx \cdot \sin v = \sin v \cdot \cos v \cdot d\,(r \cdot \cos\theta) - dv \cdot \sin v^2 \cdot (r \cdot \cos\theta)$

$$- dy \cdot \cos v = - \cos v \cdot \sin v \cdot d\,(r \cdot \cos\theta) - dv \cdot \cos v^2 \cdot (r \cdot \cos\theta)$$

$$dx \cdot \sin v - dy \cdot \cos v = - dv \cdot r \cdot \cos\theta,$$

und $dv\,(dx \cdot \sin v - dy \cdot \cos v) = - dv^2 \cdot r \cdot \cos\theta$.

Endlich $d^2z = d\,(dz) = d\,(dr \cdot \sin\theta + d\theta \cdot r \cdot \cos\theta) = d^2r \cdot \sin\theta + 2\,d\theta \cdot dr \cos\theta - d\theta^2 \cdot r \cdot \sin\theta + d^2\theta \cdot r \cdot \cos\theta$. Verwandelt man in diesem Ausdruck von d^2z, θ in $90^\circ - \theta$, und also $d\theta$ in $- d\theta$, so erhält man, $d^2\,(r \cdot \cos\theta)$, nämlich $d^2\,(r \cdot \cos\theta) = d^2r \cdot \cos\theta - 2\,d\theta \cdot dr \cdot \sin\theta - d\theta^2 \cdot r \cdot \cos\theta - d^2\theta \cdot r \cdot \sin\theta$. Substituirt man diese Werthe, so erhält man

$$- r \cdot \sin\theta \cdot (d^2x \cos v + d^2y \sin v) = - d^2r \cdot r \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta + 2\,d\theta \cdot dr \cdot r \cdot \sin\theta^2 + d\theta^2 \cdot r^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$$
$$+ d^2\theta \cdot r^2 \cdot \sin\theta^2 + dv^2 \cdot r^2 \sin\theta \cdot \cos\theta,$$

und $d^2z \cdot r \cdot \cos\theta = r \cdot d^2r \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta + 2\,d\theta \cdot dr \cdot r \cdot \cos\theta^2 - d\theta^2 \cdot r^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta + d^2\theta \cdot r^2 \cdot \cos\theta^2$.

Man wird aus diesen Gleichungen den Werth von $\left(\frac{d^2Q}{dr^2}\right)$ erhalten, und wenn man

$$m = \left(\frac{dv}{db}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dc}\right) - \left(\frac{dv}{dc}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{db}\right);$$

$$n = \left(\frac{dv}{dc}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{da}\right) - \left(\frac{dv}{da}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dc}\right);$$

$$p = \left(\frac{dv}{da}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{db}\right) - \left(\frac{dv}{db}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{da}\right);$$

$$\beta = \left(\frac{dr}{da}\right) \cdot \left(\frac{dv}{db}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dc}\right) - \left(\frac{dr}{da}\right) \cdot \left(\frac{dv}{dc}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{db}\right)$$
$$+ \left(\frac{dr}{db}\right) \cdot \left(\frac{dv}{dc}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{da}\right) - \left(\frac{dr}{db}\right) \cdot \left(\frac{dv}{da}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dc}\right)$$
$$+ \left(\frac{dr}{dc}\right) \cdot \left(\frac{dv}{da}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{db}\right) - \left(\frac{dr}{dc}\right) \cdot \left(\frac{dv}{db}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{da}\right) \text{ [35])}$$

setzt, so erhält man

$$\beta \cdot \left(\frac{d^2Q}{dr^2}\right) = m \cdot \left(\frac{dM}{da}\right) + n \cdot \left(\frac{dM}{db}\right) + p \cdot \left(\frac{dM}{dc}\right).$$

Setzt man auf eine ähnliche Art

$$m' = \left(\frac{dr}{dc}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{db}\right) - \left(\frac{dr}{db}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dc}\right);$$

$$n' = \left(\frac{dr}{da}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dc}\right) - \left(\frac{dr}{dc}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{da}\right);$$

$$p' = \left(\frac{dr}{db}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{da}\right) - \left(\frac{dr}{da}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{db}\right),$$

Die Summe der zweyten Theile dieser Gleichungen ist

$$2\, d\theta \,.\, dr \,.\, r + d^2\theta \,.\, r^2 + dv^2 \,.\, r^2 \sin\theta \,.\, \cos\theta,$$

woraus man, wenn man mit dt^2 dividirt, den Werth von P' erhält.

35) β ist gleich $m \cdot \left(\frac{dr}{da}\right) + n \cdot \left(\frac{dr}{db}\right) + p \cdot \left(\frac{dr}{dc}\right)$, ferner

$\beta = m' \cdot \left(\frac{dv}{da}\right) + n' \cdot \left(\frac{dv}{db}\right) + p' \cdot \left(\frac{dv}{dc}\right)$, und endlich

$\beta = m'' \cdot \left(\frac{d\theta}{da}\right) + n'' \cdot \left(\frac{d\theta}{db}\right) + p'' \cdot \left(\frac{d\theta}{dc}\right)$.

so wird die Gleichung $N' = \left(\frac{dQ}{dv}\right)$ folgende geben:

$$\beta \cdot \left(\frac{d^2Q}{dv^2}\right) = m' \cdot \left(\frac{dN'}{da}\right) + n' \cdot \left(\frac{dN'}{db}\right) + p' \cdot \left(\frac{dN'}{dc}\right).$$

Setzt man endlich

$$m'' = \left(\frac{dr}{db}\right) \cdot \left(\frac{dv}{dc}\right) - \left(\frac{dr}{dc}\right) \cdot \left(\frac{dv}{db}\right);$$

$$n'' = \left(\frac{dr}{dc}\right) \cdot \left(\frac{dv}{da}\right) - \left(\frac{dr}{da}\right) \cdot \left(\frac{dv}{dc}\right);$$

$$p'' = \left(\frac{dr}{da}\right) \cdot \left(\frac{dv}{db}\right) - \left(\frac{dr}{db}\right) \cdot \left(\frac{dv}{da}\right),$$

so wird die Gleichung $P' = \left(\frac{dQ}{d\theta}\right)$ folgende geben:

$$\beta \cdot \left(\frac{d^2Q}{d\theta^2}\right) = m'' \cdot \left(\frac{dP'}{da}\right) + n'' \cdot \left(\frac{dP'}{db}\right) + p'' \cdot \left(\frac{dP'}{dc}\right).$$

Die Gleichung (F) wird sich dadurch in folgende verwandeln:

$$\left.\begin{aligned} 0 = {} & m \cdot r^2 \cdot \cos\theta^2 \cdot \left(\frac{dM'}{da}\right) + n r^2 \cdot \cos\theta^2 \cdot \left(\frac{dM'}{db}\right) + p \cdot r^2 \cdot \cos\theta^2 \cdot \left(\frac{dM'}{dc}\right) \\ & + m' \cdot \left(\frac{dN'}{da}\right) + n' \left(\frac{dN'}{db}\right) + p' \left(\frac{dN'}{dc}\right) \\ & + m'' \cdot \cos\theta^2 \cdot \left(\frac{dP'}{da}\right) + n'' \cdot \cos\theta^2 \cdot \left(\frac{dP'}{db}\right) + p'' \cdot \cos\theta^2 \cdot \left(\frac{dP'}{dc}\right) \\ & + \beta \left(2 r M' \cdot \cos\theta^2 - P' \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta\right). \end{aligned}\right\} (G).$$

In der Theorie des Mondes vernachläſsigt man die Stöhrungen, welche seine Wirkung in der relativen Bewegung der Sonne um die Erde hervorbringt, welches eben so viel ist, als ob man seine Masse als unendlich klein annehme. Alsdann sind die veränderlichen, auf die Sonne sich beziehenden, Gröſsen x', y', z' von x, y, z unabhängig, und die Gleichung (G) hat in dieser Theorie Statt; die für r, v und θ gefundenen Werthe müssen ihr also Genüge thun, welches ein Mittel giebt, diese Werthe zu prüfen. Wenn die in der Bewegung des Mondes beobachteten Ungleichheiten das Resultat der gegenseitigen Anziehungen der drey Körper, der Sonne, der Erde und des Mondes sind, so müssen die aus den Beobachtungen abgeleiteten Werthe von r, v und θ der Gleichung (G) Genüge thun; dieses giebt ein Mittel, die Theorie der allgemeinen Schwere zu prüfen.

Denn

Denn die mittlern Längen des Monds, seiner Erdferne, und seines aufsteigenden Knotens befinden sich in diesen Werthen, und man kann für a, b, c diese Längen nehmen.

Vernachläſsigt man in der Theorie der Planeten die Quadrate der stöhrenden Kräfte, welches fast immer erlaubt ist, so muſs man in der Theorie des Planeten, dessen Koordinaten x, y, z sind, annehmen können, daſs die Koordinaten x', y', z', x'' etc. der übrigen Planeten, sich auf ihre elliptische Bewegung beziehen, und also von x, y, z unabhängig sind; die Gleichung (G) hat also ebenfalls in dieser Theorie Statt.

15. Die Differenzialgleichungen des vorhergehenden Satzes

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r\,.\,dv^2}{dt^2}\,.\,\cos\theta^2 - r\,.\,\frac{d\theta^2}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{dr}\right)\\
&\frac{d\,.\left(r^2\,.\,\frac{dv}{dt}\,.\,\cos\theta^2\right)}{dt} = \left(\frac{dQ}{dv}\right)\\
&r^2\,.\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + r^2\,.\,\frac{dv^2}{dt^2}\,.\,\sin\theta\,.\,\cos\theta + \frac{2\,r\,dr\,.\,d\theta}{dt^2} = \left(\frac{dQ}{d\theta}\right)
\end{aligned}\right\}\quad (H)$$

sind nur eine Verbindung der Differenzialgleichungen (i) desselben Satzes; sie sind aber bequemer und dem astronomischen Gebrauch angemessener. Man kann ihnen andere Formen geben, welche in verschiedenen Umständen nützlich seyn können.

Statt der veränderlichen Gröſsen r und θ wollen wir u und s betrachten, wo $u = \frac{1}{r\,.\,\cos\theta}$, das heiſst der Einheit, durch den auf die Ebene der x und der y projicirten Radius vector dividirt, gleich ist; und wo $s = \operatorname{tang}\theta$ oder der Tangente der Breite von m über dieselbe Fläche gleich ist. Multiplicirt man die zweyte der Gleichungen (H) mit $r^2\,.\,dv\,.\,\cos\theta^2$, und integrirt sie dann, so wird man

$$\left(\frac{dv}{u^2\,dt}\right)^2 = h^2 + 2\int\left(\frac{dQ}{dv}\right)\,.\,\frac{dv}{u^2}$$

erhalten, wo h eine willkührliche beständige Gröſse ist; man hat also

$$dt = \frac{dv}{u^2 \cdot \sqrt{h^2 + 2\int\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}}}.$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (H) mit $-\cos\theta$, die dritte mit $\frac{\sin\theta}{r}$, und addirt sie, so erhält man [36])

36) Man erhält nämlich

$$-\cos\theta \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} + r \cdot \frac{dv^2}{dt^2} \cdot \cos\theta^3 + r \cdot \cos\theta \cdot \frac{d\theta^2}{dt^2} = -\cos\theta \cdot \left(\frac{dQ}{dr}\right)$$

$$\text{und } r \cdot \sin\theta \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + r \cdot \frac{dv^2}{dt^2} \cdot \sin\theta^2 \cdot \cos\theta + \frac{2\,dr \cdot d\theta}{dt^2} \cdot \sin\theta = \frac{\sin\theta}{r} \cdot \left(\frac{dQ}{d\theta}\right).$$

Die Summe der beiden Glieder $r \cdot \frac{dv^2}{dt^2} \cdot \cos\theta^3 + r \cdot \frac{dv^2}{dt^2} \cdot \sin\theta^2 \cdot \cos\theta$ ist $r \cdot \cos\theta \cdot \frac{dv^2}{dt^2} (\cos\theta^2 + \sin\theta^2)$ oder $r \cdot \cos\theta \cdot \frac{dv^2}{dt^2}$ oder $\frac{1}{u} \cdot \frac{dv^2}{dt^2}$. Die übrigen vier Glieder des ersten Theils enthalten die Differenziale von r und θ, man muſs dafür die Differenziale von u und s einführen. Man suche zuerst die Differenziale von r wegzuschaffen, weil es immer leicht seyn wird, s und ds statt θ und seiner Differenziale zu substituiren, da diese Gröſsen unmittelbar von einander abhängen. Da $\frac{1}{u} = r \cdot \cos\theta$ ist, so kann d^2r nur in $d^2 \cdot \frac{1}{u}$ vorkommen. Nun ist $d \cdot \frac{1}{u} = dr \cdot \cos\theta - d\theta \cdot r \cdot \sin\theta$, und wenn man noch einmal differenziirt, $d^2 \cdot \frac{1}{u} = d^2r \cdot \cos\theta - 2\,dr \cdot d\theta \cdot \sin\theta - d^2\theta \cdot r \cdot \sin\theta - d\theta^2 \cdot r \cdot \cos\theta$.

Man sieht also, daſs die Summe der übrigen vier Glieder gleich $-\frac{d^2 \cdot \frac{1}{u}}{dt^2}$ ist; und die Summe der beiden ersten Theile der gegebenen Gleichungen ist $-\frac{d^2 \cdot \frac{1}{u}}{dt^2} + \frac{1}{u} \cdot \frac{dv^2}{dt^2}$. Wir wollen nun die zweyten Theile dieser Gleichungen betrachten.

Man hat $\left(\frac{dQ}{dr}\right) = \left(\frac{dQ}{du}\right) \cdot \left(\frac{du}{dr}\right) + \left(\frac{dQ}{ds}\right) \cdot \left(\frac{ds}{dr}\right)$ und $\left(\frac{dQ}{d\theta}\right) = \left(\frac{dQ}{du}\right) \cdot \left(\frac{du}{d\theta}\right) + \left(\frac{dQ}{ds}\right) \cdot \left(\frac{ds}{d\theta}\right)$.

Nun ist $\left(\frac{du}{dr}\right) = -u^2 \cdot \cos\theta$; $\left(\frac{ds}{dr}\right) = 0$, weil s bloſs Function von θ ist;

$\left(\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{\sin\theta}{r \cdot \cos\theta^2} = u^2\,r \cdot \sin\theta$; und aus der Gleichung $s = \text{tang}\,\theta$ folgt $\left(\frac{ds}{d\theta}\right) = \frac{1}{\cos\theta^2} = \frac{urs}{\sin\theta}$.

Substituirt man diese Werthe, so erhält man

$$-\cos\theta \cdot \left(\frac{dQ}{dr}\right) + \frac{\sin\theta}{r} \cdot \left(\frac{dQ}{d\theta}\right) = u^2 \cdot \left(\frac{dQ}{du}\right) + us \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right).$$

Folgende sehr schöne Methode ist dem Uebersetzer vom Hrn. Verfasser mitgetheilt worden. Da Q eine Function von v, θ, r, und hernach eine Function von v, s, u ist, so hat man

$$-\frac{d^2 \cdot \frac{1}{u}}{dt^2} + \frac{1}{u} \cdot \frac{dv^2}{dt^2} = u^2 \cdot \left(\frac{dQ}{du}\right) + us \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right);$$

hieraus erhält man

$$d \cdot \left(\frac{du}{u^2 . dt}\right) + \frac{dv^2}{u \cdot dt} = u^2 \cdot dt \cdot \left[\left(\frac{dQ}{du}\right) + \frac{s}{u} \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right)\right].$$

Substituirt man statt dt seinen vorhergehenden Werth, und nimmt man dv als beständig an, so erhält man [37])

$$o = \frac{d^2 u}{dv^2} + u + \frac{\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{du}{u^2 \cdot dv} - \left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{s}{u} \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right)}{h^2 + 2\int\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}}.$$

$$dQ = \left(\frac{dQ}{dv}\right) dv + \left(\frac{dQ}{d\theta}\right) d\theta + \left(\frac{dQ}{dr}\right) dr$$

$$dQ = \left(\frac{dQ}{dv}\right) dv + \left(\frac{dQ}{ds}\right) ds + \left(\frac{dQ}{du}\right) du,$$

und folglich $\left(\frac{dQ}{d\theta}\right) d\theta + \left(\frac{dQ}{dr}\right) dr = \left(\frac{dQ}{ds}\right) ds + \left(\frac{dQ}{du}\right) du.$

Nun ist $ds = \frac{d\theta}{\cos\theta^2}$ und $du = \frac{-dr}{r^2 \cdot \cos\theta} + \frac{d\theta \cdot \sin\theta}{r \cdot \cos\theta^2}$.

Man substituire diese Werthe und vergleiche dann die Koeffizienten von $d\theta$ und dr einzeln mit einander, so erhält man $\left(\frac{dQ}{d\theta}\right) = \left(\frac{dQ}{du}\right) \frac{\sin\theta}{r \cdot \cos\theta^2} + \left(\frac{dQ}{ds}\right) \cdot \frac{1}{\cos\theta^2}$ und $\left(\frac{dQ}{dr}\right) = -\left(\frac{dQ}{du}\right) \cdot \frac{1}{r^2 . \cos\theta}$, woraus man durch leichte Verwandlungen die obige Gleichung erhält.

37) Man setze der Kürze wegen statt $\sqrt{h^2 + 2\int\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}}$ den Buchstaben A, so ist

$$u^2 dt = \frac{dv}{A}, \text{ und } dA = \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2} \cdot \frac{1}{A},$$

ferner $d \cdot \left(\frac{du}{u^2 dt}\right) = d \cdot \left(\frac{A du}{dv}\right) = \frac{dA \cdot du}{dv} + \frac{A \cdot d^2 u}{dv}$

und $\frac{dv^2}{u dt} = \frac{u dv^2}{u^2 dt} = Au \cdot dv.$

Die vorhergehende Gleichung verwandelt sich so in folgende:

$$o = \frac{dA \cdot du}{dv} + \frac{A \cdot d^2 u}{dv} + Au \cdot dv - \frac{dv}{A} \cdot \left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{s \cdot dv}{Au} \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right),$$

und wenn man statt dA seinen Werth substituirt,

$$o = \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{du}{u^2} \cdot \frac{1}{A} + A \cdot \frac{d^2 u}{dv} + Au\, dv - \frac{dv}{A} \cdot \left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{s\, dv}{Au} \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right),$$

Die dritte der Gleichungen (H) wird auf eben die Art, wenn man dv als beständig ansieht, sich in folgende verwandeln [38]):

$$o = \frac{d^2 s}{dv^2} + s + \frac{\frac{ds}{dv} \cdot \left(\frac{dQ}{dv}\right) - (1 + ss) \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right) - us \cdot \left(\frac{dQ}{du}\right)}{u^2 \left[h^2 + 2\int\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}\right]}.$$

Man wird also statt der drey Differenzialgleichungen (H) folgende drey erhalten:

dividirt man durch $A\,dv$, so erhält man

$$o = \frac{\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{du}{u^2 \cdot dv} - \left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{s}{u}\left(\frac{dQ}{ds}\right)}{A^2} + u + \frac{d^2 u}{dv^2}.$$

38) Um dv als beständig annehmen zu können, muſs man das zweyte Differenzial $d^2\theta$ wegschaffen. Man sieht sogleich, daſs $r^2 . \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2 r dr . d\theta}{dt^2} = \frac{d . \left(\frac{r^2 . d\theta}{dt}\right)}{dt}$

$= \frac{d . \left(r^2 . \frac{ds}{dt} . \cos\theta^2\right)}{dt} = \frac{d . \left(u^{-2} . \frac{ds}{dt}\right)}{dt}$; differenziirt man wirklich, so erhält man

$$r^2 . \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 r . \frac{dr . d\theta}{dt^2} = - \frac{2\, du . ds}{u^3\, dt^2} + \frac{d^2 s}{u^2\, dt^2} - \frac{d^2 t . ds}{u^2 . dt^3}.$$

Setzt man der Kürze wegen die Wurzelgröſse $\sqrt{h^2 + 2\int\left(\frac{dQ}{dv}\right) . \frac{dv}{u^2}}$ gleich A, so hat man nach der vorher für dt gegebenen Gleichung: $dt = \frac{dv}{u^2 A}$. Substituirt man diesen Werth von dt in die vorhergehende Gleichung, so erhält man, da $\frac{- d^2 t}{dt^3} = \frac{1}{2}\, d . (dt)^{-2}$ ist,

$$r^2 . \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2 r . dr . d\theta}{dt^2} = - \frac{2 . du . ds}{dv^2} . u A^2 + \frac{d^2 s}{dv^2} u^2 A^2 + \frac{2\, du . ds}{dv^2} . u A^2 + \frac{d . (A)^2 . ds}{2\, dv^2} u^2,$$

oder $= \frac{d^2 s}{dv^2} u^2 A^2 + \left(\frac{dQ}{dv}\right) . \frac{ds}{dv}$.

Das zweyte Glied der dritten der Gleichungen (H), $r^2 . \frac{dv^2}{dt^2} . \sin\theta . \cos\theta$ ist gleich

$$r^2 . \cos\theta^2 . \frac{dv^2}{dt^2} . \operatorname{tang}\theta = \frac{dv^2}{dt^2} . \frac{s}{u^2} = u^2 . s . A^2.$$

Der zweyte Theil derselben Gleichung, $\left(\frac{dQ}{d\theta}\right)$ ist gleich $\left(\frac{dQ}{ds}\right)\left(\frac{ds}{d\theta}\right) + \left(\frac{dQ}{du}\right)\left(\frac{du}{d\theta}\right)$; wir haben vorher gefunden $\left(\frac{ds}{d\theta}\right) = 1 + ss$ und $\left(\frac{du}{d\theta}\right) = us$, folglich

$$\left.\begin{aligned}
dt &= \frac{dv}{u^2 \cdot \sqrt{h^2 + 2\int\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}}} \\
0 &= \frac{d^2u}{dv^2} + u + \frac{\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{du}{u^2.dv} - \left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{s}{u} \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right)}{h^2 + 2\int\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}} \\
0 &= \frac{d^2s}{dv^2} + s + \frac{\frac{ds}{dv} \cdot \left(\frac{dQ}{dv}\right) - us \cdot \left(\frac{dQ}{du}\right) - (1 + ss) \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right)}{u^2 \cdot \left[h^2 + 2\int\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}\right]}.
\end{aligned}\right\} \text{(K).}$$

Will man die Brüche und Wurzelzeichen vermeiden, so kann man diesen Gleichungen folgende Gestalt geben [39]):

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{d^2t}{dv^2} + \frac{2\,du\,.\,dt}{u\,dv^2} + u^2 \cdot \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dt^3}{dv^3}; \\
0 &= \left(\frac{d^2u}{dv^2} + u\right) \cdot \left[1 + \frac{2}{h^2} \cdot \int\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}\right] \\
&\quad + \frac{1}{h^2} \cdot \left[\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{du}{u^2.dv} - \left(\frac{dQ}{du}\right) - \frac{s}{u} \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right)\right]; \\
0 &= \left(\frac{d^2s}{dv^2} + s\right) \cdot \left[1 + \frac{2}{h^2} \cdot \int\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2}\right] \\
&\quad + \frac{1}{h^2u^2} \cdot \left[\frac{ds}{dv} \cdot \left(\frac{dQ}{dv}\right) - us \cdot \left(\frac{dQ}{du}\right) - (1 + ss) \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \text{(L).}$$

$$\left(\frac{dQ}{d\theta}\right) = (1 + ss) \cdot \left(\frac{dQ}{ds}\right) + us \cdot \left(\frac{dQ}{du}\right).$$

Die dritte der Gleichungen (H) verwandelt sich so in folgende:

$$\frac{d^2s}{dv^2}\,u^2 A^2 + u^2 s \,.\, A^2 + \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{ds}{dv} = (1 + ss)\left(\frac{dQ}{ds}\right) + us\left(\frac{dQ}{du}\right),$$

woraus man sogleich, wenn man mit $u^2 A^2$ dividirt, die im Text gegebene Gleichung erhält.

39) Die erste der Gleichungen K giebt, wenn man quadrirt,

$$h^2 + 2\int\left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2} = \frac{dv^2}{u^4\,dt^2};$$ differenziirt man, so erhält man

$$2 \cdot \left(\frac{dQ}{dv}\right) \cdot \frac{dv}{u^2} = -\frac{4 \,.\, du \,.\, dv^2}{u^5 \,.\, dt^2} - \frac{2 \,.\, d^2t \,.\, dv^2}{u^4 \,.\, dt^3}.$$

Braucht man andere Koordinaten, so wird man neue Systeme von Differenzialgleichungen erhalten. Wir wollen z. B. annehmen, dafs man die Koordinaten x und y der Gleichungen (i) des 14ten Satzes in andere verwandelt, welche sich auf zwey bewegliche, in der Ebene dieser Koordinaten liegende, Axen beziehen, wovon die erstere die mittlere Länge des Körpers m anzeigt, während die zweyte auf ihr senkrecht ist. Es sollen $x_{,}$ und $y_{,}$ die Koordinaten von m in Beziehung auf diese Axen seyn, und wir wollen die mittlere Länge von m, oder den Winkel, welchen die bewegliche Axe der $x_{,}$ mit der Axe der x macht, mit $nt + \varepsilon$ bezeichnen, so wird man

$$x = x_{,} \,.\, \cos(nt + \varepsilon) - y_{,} \,.\, \sin(nt + \varepsilon);$$
$$y = x_{,} \,.\, \sin(nt + \varepsilon) + y_{,} \,.\, \cos(nt + \varepsilon)$$

haben; hieraus erhält man, wenn man dt beständig annimmt [40]),

$$d^2x \,.\, \cos(nt + \varepsilon) + d^2y \,.\, \sin(nt + \varepsilon) = d^2x_{,} - n^2x_{,} \,.\, dt^2 - 2n\,dy_{,} \,.\, dt;$$
$$d^2y \,.\, \cos(nt + \varepsilon) - d^2x \,.\, \sin(nt + \varepsilon) = d^2y_{,} - n^2y_{,} \,.\, dt^2 + 2n\,dx_{,} \,.\, dt.$$

Substituirt man in Q statt x und y ihre vorhergehenden Werthe, so wird man folgende Gleichungen erhalten [41]):

Multiplicirt man mit $\frac{u^4}{2\,dv^4}\,dt^3$, so erhält man

$$u^2 \left(\frac{dQ}{dv}\right) \,.\, \frac{dt^3}{dv^3} = - \frac{2 \,.\, du \,.\, dt}{u \,.\, dv^2} - \frac{d^2t}{dv^2}.$$

40) Man erhält durch Differenziiren

$$dx = dx_{,} \,.\, \cos(nt + \varepsilon) - dy_{,} \,.\, \sin(nt + \varepsilon) - x_{,} \,.\, ndt \,.\, \sin(nt + \varepsilon) - y_{,} \,.\, ndt \,.\, \cos(nt + \varepsilon)$$
$$dy = dx_{,} \,.\, \sin(nt + \varepsilon) + dy_{,} \,.\, \cos(nt + \varepsilon) + x_{,} \,.\, ndt \,.\, \cos(nt + \varepsilon) - y_{,} \,.\, ndt \,.\, \sin(nt + \varepsilon),$$

hieraus erhält man unmittelbar

$$dx \,.\, \cos(nt + \varepsilon) + dy \,.\, \sin(nt + \varepsilon) = dx_{,} - y_{,} \,.\, n \,.\, dt.$$
$$- dx \,.\, \sin(nt + \varepsilon) + dy \,.\, \cos(nt + \varepsilon) = dy_{,} - x_{,} \,.\, n \,.\, dt.$$

Differenziirt man diese zwey Gleichungen noch einmal, so erhält man

$$d^2x \,.\, \cos(nt + \varepsilon) + d^2y \,.\, \sin(nt + \varepsilon) - dx \,.\, ndt \,.\, \sin(nt + \varepsilon) + dy \,.\, ndt \,.\, \cos(nt + \varepsilon) = d^2x_{,} - dy_{,} \,.\, ndt$$
$$- d^2x \,.\, \sin(nt + \varepsilon) + d^2y \,.\, \cos(nt + \varepsilon) - dx \,.\, ndt \,.\, \cos(nt + \varepsilon) - dy \,.\, ndt \,.\, \sin(nt + \varepsilon) = d^2y_{,} - dx_{,} \,.\, ndt$$

oder

$$d^2x \,.\, \cos(nt + \varepsilon) + d^2y \,.\, \sin(nt + \varepsilon) + ndt\,[dy_{,} - x_{,} \,.\, ndt] = d^2x_{,} - dy_{,} \,.\, ndt$$
$$- d^2x \,.\, \sin(nt + \varepsilon) + d^2y \,.\, \cos(nt + \varepsilon) - ndt\,[dx_{,} - y_{,} \,.\, ndt] = d^2y_{,} - dx_{,} \,.\, ndt,$$

woraus man unmittelbar die im Text gegebenen Gleichungen findet.

41) Man hat $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dQ}{dx_{,}}\right)\left(\frac{dx_{,}}{dx}\right) + \left(\frac{dQ}{dy_{,}}\right)\left(\frac{dy_{,}}{dx}\right)$,

und $\left(\frac{dQ}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx_{,}}\right)\left(\frac{dx_{,}}{dy}\right) + \left(\frac{dQ}{dy_{,}}\right)\left(\frac{dy_{,}}{dy}\right)$.

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{dQ}{dx_,}\right) . \cos(nt + \varepsilon) - \left(\frac{dQ}{dy_,}\right) . \sin(nt + \varepsilon)$$

$$\left(\frac{dQ}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx_,}\right) . \sin(nt + \varepsilon) + \left(\frac{dQ}{dy_,}\right) . \cos(nt + \varepsilon).$$

Dieses vorausgesetzt, werden die Differenzialgleichungen (i) folgende drey geben [42]:

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2x_,}{dt^2} - n^2 x_, - 2n . \frac{dy_,}{dt} - \left(\frac{dQ}{dx_,}\right); \\ o &= \frac{d^2y_,}{dt^2} - n^2 y_, + 2n . \frac{dx_,}{dt} - \left(\frac{dQ}{dy_,}\right); \\ o &= \frac{d^2z}{dt^2} - \left(\frac{dQ}{dz}\right). \end{aligned}\right\} \quad (M).$$

Nachdem wir die Differenzialgleichungen für die Bewegung eines Systems von Körpern, welche ihrer gegenseitigen Anziehung unterworfen sind, und die genauen Integrale, welche man bis jetzt hat erhalten können, gegeben haben; so müssen wir nur noch diese Gleichungen durch allmählige Annäherungen integriren. Die Körper des Himmels bewegen sich im Sonnensystem fast so, als ob sie nur der Hauptkraft, welche auf sie wirkt, gehorchten, und die stöhrenden Kräfte sind nicht beträchtlich; man kann also in einer ersten Annäherung nur die gegenseitige Wirkung zweyer Körper, nämlich die eines Planeten oder eines Kometen und der Sonne, in der Theorie der Planeten und Kome-

aus den in der vorhergehenden Anmerkung gegebenen Werthen von

$(dx_, - y_, . ndt)$ und $(dy_, - x_, . ndt)$ erhält man

$$\left(\frac{dx_,}{dx}\right) = \cos(nt + \varepsilon); \quad \left(\frac{dy_,}{dx}\right) = -\sin(nt + \varepsilon); \quad \left(\frac{dx_,}{dy}\right) = \sin(nt + \varepsilon); \quad \left(\frac{dy_,}{dy}\right) = \cos(nt + \varepsilon).$$

42) Vermöge der Gleichungen (i) hat man

$$\frac{d^2x}{dt^2} . \cos(nt + \varepsilon) = \left(\frac{dQ}{dx}\right) . \cos(nt + \varepsilon) = \left(\frac{dQ}{dx_,}\right) . \cos(nt + \varepsilon)^2 - \left(\frac{dQ}{dy_,}\right) . \sin(nt + \varepsilon) . \cos(nt + \varepsilon)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} . \sin(nt + \varepsilon) = \left(\frac{dQ}{dy}\right) . \sin(nt + \varepsilon) = \left(\frac{dQ}{dx_,}\right) . \sin(nt + \varepsilon)^2 + \left(\frac{dQ}{dy_,}\right) . \sin(nt + \varepsilon) . \cos(nt + \varepsilon)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} . \cos(nt + \varepsilon) + \frac{d^2y}{dt^2} \sin(nt + \varepsilon) = \left(\frac{dQ}{dx_,}\right).$$

Man darf nur statt des ersten Theils dieser Gleichung den vorher gefundenen Werth setzen, um die erste der Gleichungen (M) zu erhalten.

ten, und die gegenseitige Wirkung eines Satelliten und seines Planeten in der Theorie der Satelliten, betrachten. Wir werden also damit anfangen, eine vollkommen genaue Bestimmung der Bewegung zweyer sich anziehenden Körper zu geben: diese erste Annäherung wird uns auf eine zweyte führen, wo wir nur auf die ersten Potenzen der anziehenden Kräfte Rücksicht nehmen werden; wir werden alsdann die Quadrate und Producte dieser Kräfte betrachten; wir werden so fortfahren, und dadurch die himmlischen Bewegungen mit aller Genauigkeit, welche die Beobachtungen verstatten, bestimmen.

Drittes Kapitel.

Erste Annäherung der himmlischen Bewegungen, oder Theorie der elliptischen Bewegung.

16. Wir haben schon im ersten Kapitel gezeigt, daſs ein Körper, welcher von einer Kraſt, die sich verkehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält, gegen einen festen Punkt angezogen wird, einen Kegelschnitt beschreibt. Da nun in der relativen Bewegung des Körpers m um M dieser letztere Körper ruhend angenommen wird, so muſs man die Wirkung, welche m auf M ausübt, in entgegengesetzter Richtung an m anbringen; der Körper m wird also in dieser relativen Bewegung von einer Kraſt gegen M angezogen, welche der Summe der Massen von M und m, durch das Quadrat ihrer Entfernung dividirt, gleich ist; der Körper m beschreibt daher einen Kegelschnitt um M. Die Wichtigkeit dieses Gegenstandes in der Theorie des Weltsystems erfordert aber, daſs wir ihn unter neuen Gesichtspunkten vornehmen.

Hierzu wollen wir die Gleichungen (K) des 15ten Satzes betrachten. Setzt man $M + m = \mu$, so ist aus dem 14ten Satz klar, daſs $Q = \frac{\mu}{r}$ oder $= \frac{\mu \,.\, u}{\sqrt{1 + ss}}$ ist, wenn man nur auf die gegenseitige Wirkung von M und m Rücksicht nimmt; die Gleichungen (K) verwandeln sich so in folgende:

$$dt = \frac{dv}{h \,.\, u^2};$$

$$0 = \frac{d^2u}{dv^2} + u - \frac{\mu}{h^2 (1 + ss)^{\frac{3}{2}}}$$

$$0 = \frac{d^2 s}{dv^2} + s.$$

Da die während des Zeittheilchens dt von der Projection des Radius vectors beschriebene Winkelfläche gleich $\frac{1}{2} \cdot \frac{dv}{u^2}$ ist, so lernen wir aus der ersten dieser Gleichungen, daſs diese Fläche dem Zeittheilchen proportional ist, und daſs sie also, in einer endlichen Zeit, der Zeit proportional ist. Integrirt man die letzte Gleichung, so erhält man [43])

$$s = \gamma \cdot \sin(v - \theta),$$

wo γ und θ zwey willkührliche beständige Gröſsen sind. Integrirt man endlich die zweyte, so erhält man [44])

$$u = \frac{\mu}{h^2(1+\gamma^2)} \cdot \left[\sqrt{1+ss} + e\cos(v - \varpi)\right] = \frac{\sqrt{1+ss}}{r},$$

43) Es ist bekannt, daſs das zweyte Differenzial eines Sinus oder Kosinus, durch das Quadrat des Differenzials des Bogens dividirt, dem gegebenen Sinus oder Kosinus, negativ genommen, gleich ist. Die Gleichung $\frac{d^2 s}{dv^2} = -s$ giebt also s gleich $\sin v$ oder $\cos v$. Da aber das vollständige Integral zwey beständige Gröſsen enthalten muſs, so sieht man sogleich, daſs $s = \gamma \cdot \sin(v - \theta)$ oder $= \gamma \cdot \cos(v - \theta')$ seyn wird; beide Ausdrücke von s sind identisch, weil die Constanten θ und θ' um einen rechten Winkel verschieden seyn werden.

44) Diese Gleichung würde sich eben so leicht, als die vorhergehende integriren lassen, wenn sie nicht eine Potenz von $1 + ss$ enthielte; man suche also dieses Glied wegzuschaffen. Um diesen Zweck zu erreichen, ist es am natürlichsten, zuerst anzunehmen, daſs u eine Potenz von $1 + ss$ enthält. Man setze also $u = \alpha(1+ss)^{\beta} + X$, wo X irgend eine Function ist; dann ist

$$\frac{du}{dv} = 2\alpha\beta \cdot \frac{ds}{dv}(1+ss)^{\beta-1} + \frac{dX}{dv}; \text{ und}$$

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \alpha \cdot (1+ss)^{\beta-2}\left[2\beta(1+ss)\frac{ds^2}{dv^2} + 4\beta(\beta-1) \cdot s^2 \cdot \frac{ds^2}{dv^2} + 2\beta(1+ss)\frac{d^2s}{dv^2}\right] + \frac{d^2X}{dv^2}.$$

Setzt man diese Werthe von $\frac{d^2u}{dv^2}$ und von u in die zweyte Gleichung, so erhält man

$$0 = \alpha(1+ss)^{\beta-2}\left[2\beta(1+ss)\frac{ds^2}{dv^2} + 4\beta(\beta-1) \cdot s^2 \cdot \frac{ds^2}{dv^2} + 2\beta(1+ss)\frac{d^2s}{dv^2} + (1+ss)^2\right] - \frac{\mu}{h^2}(1+ss)^{-\frac{3}{2}}$$
$$+ \frac{d^2X}{dv^2} + X.$$

Könnte man nun α und β so bestimmen, daſs alle von s abhängende Glieder für sich gleich Null sind, so würde auch $\frac{d^2X}{dv^2} + X$ gleich Null und also, nach der vorhergehenden Anmerkung, $X = \epsilon\cos(v - \varpi)$ seyn, wo ϵ und ϖ zwey willkührliche beständige Gröſsen sind. Setzt man $\beta = \frac{1}{2}$, so haben alle von s abhängende Glieder den gemeinschaftlichen Factor $(1+ss)^{-\frac{3}{2}}$; man erhält dann, wenn man mit $(1+ss)^{\frac{3}{2}}$ multiplicirt, und statt β seinen Werth $\frac{1}{2}$ setzt,

wo e und ϖ zwey neue willkührliche Gröſsen sind. Substituirt man in diesem Ausdruck von u statt s seinen durch v gegebenen Werth; substituirt man hernach diesen Ausdruck in die Gleichung $dt = \frac{dv}{h\,.\,u^2}$, so wird das Integral dieser Gleichung die Zeit t durch eine Function von v geben; man wird also v, u und s durch Functionen der Zeit haben.

Man kann diese Rechnung beträchtlich abkürzen, wenn man bemerkt, daſs der Werth von s anzeigt, daſs die Bahn ganz in einer Ebene ist, wovon γ die Tangente der Neigung gegen die feste Ebene, und wovon θ die Länge des Knotens vom Anfangspunkt der Winkel v gezählt, ist. Bezieht man also die Bewegung von m auf diese Ebene, so wird man $s = 0$ und $\gamma = 0$ haben; dieses giebt

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\mu}{h^2}\,[1 + e \cos (v - \varpi)].$$

Dies ist die Gleichung für eine Ellipse, in welcher der Anfangspunkt der r im Brennpunkt ist [45]); $\frac{h^2}{\mu\,(1 - ee)}$ ist die halbe groſse Axe, welche wir mit a bezeichnen wollen; e ist das Verhältniſs der Eccentricität zur halben groſsen Axe; ϖ endlich die Länge des Periheliums. Die Gleichung $dt = \frac{dv}{h\,.\,u^2}$ verwandelt sich so in folgende:

$$0 = \alpha \left[\frac{ds^2}{dv^2} + (1 + ss)\,\frac{d^2 s}{dv^2} + (1 + ss)^2\right] - \frac{\mu}{h^2}.$$

Nun ist $\frac{ds^2}{dv^2} = \gamma^2 \cos (v - \theta)^2 = \gamma^2 - \gamma^2 \sin (v - \theta)^2 = \gamma^2 - s^2$, und aus der dritten Gleichung $\frac{d^2 s}{dv^2} = - s$. Substituirt man diese Werthe, so erhält man $\alpha = \frac{\mu}{h^2\,(1 + \gamma^2)}$.

45) Man sieht leicht, daſs u ein Gröſstes und also r ein Kleinstes ist, wenn der Factor $[1 + e \cos (v - \varpi)]$ ein Gröſstes ist, das heiſst, wenn $\cos (v - \varpi)$ gleich Eins, und also $v - \varpi$ gleich Null oder $v = \varpi$ ist. Eben so wird u ein Kleinstes und also r ein Gröſstes seyn, wenn $\cos (v - \varpi)$ gleich $- 1$, und also $v - \varpi = 2$ rechten Winkeln oder $v = 2$ rechten Winkeln $+ \varpi$. Der gröſste und kleinste Werth von r machen eine gerade Linie; ihre halbe Summe ist

$$\frac{h^2}{2\mu}\left(\frac{1}{1 + e} + \frac{1}{1 - e}\right) = \frac{h^2}{2\mu}\left[\frac{1 - e + 1 + e}{(1 + e)\,(1 - e)}\right] = \frac{h^2}{\mu\,(1 - ee)},$$

welches also die halbe groſse Axe ist.

$$dt = \frac{a^{\frac{3}{2}} \cdot (1 - ee)^{\frac{3}{2}} \cdot dv}{\sqrt{\mu} \cdot [1 + e \cdot \cos(v - \varpi)]^2}.$$

Wir wollen nun den zweyten Theil dieser Gleichung in eine nach den Kosinus des Winkels $(v - \varpi)$ und seiner Vielfachen fortschreitenden Reihe entwickeln.

Wir werden damit anfangen $\frac{1}{1 + e\cos(v - \varpi)}$ in eine ähnliche Reihe zu entwickeln. Setzt man

$$\lambda = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - ee}},$$

so hat man [46])

$$\frac{1}{1 + e\cos(v - \varpi)} = \frac{1}{\sqrt{1 - ee}} \cdot \left(\frac{1}{1 + \lambda \cdot c^{(v - \varpi)\sqrt{-1}}} - \frac{\lambda \cdot c^{-(v - \varpi)\sqrt{-1}}}{1 + \lambda \cdot c^{-(v - \varpi)\sqrt{-1}}} \right)$$

wo c die Zahl ist, deren hyperbolischer Logarithmus gleich Eins ist. Entwickelt man den zweyten Theil dieser Gleichung in eine Reihe, nämlich das erste Glied in Beziehung auf die Potenzen von $c^{(v-\varpi)\sqrt{-1}}$, das zweyte Glied in Beziehung auf die Potenzen von $c^{-(v-\varpi)\sqrt{-1}}$, und substituirt hernach statt der unmöglichen Exponentialgröſsen ihre Ausdrücke durch Sinus und Kosinus, so erhält man

$$\frac{1}{1 + e\cos(v - \varpi)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - ee}} \cdot [1 - 2\lambda\cos(v - \varpi) + 2\lambda^2\cos 2(v - \varpi) - 2\lambda^3\cos 3(v - \varpi) + \text{etc.}].$$

Nennt man den zweyten Theil dieser Gleichung Φ und setzt $q = \frac{1}{e}$, so hat man im Allgemeinen [47])

$$\frac{1}{[1 + e\cos(v - \varpi)]^{m+1}} = \pm \frac{e^{-m-1}\, d^m \cdot \left(\frac{\Phi}{q}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m \cdot dq^m},$$

46) Man sehe traité du Calcul différentiel par **Lacroix**. T. I. §. 38. p. 63. **Euleri** Introductio in Analysin infin. T. I. §. 138. p. 103.

47) Man hat $\left[1 + \frac{1}{q}\cos(v - \varpi)\right]^{-1} = \varphi$, und also $[q + \cos(v - \varpi)]^{-1} = \left(\frac{\varphi}{q}\right)$. Differenziirt man, so erhält man $\frac{d \cdot \left(\frac{\varphi}{q}\right)}{dq} = -1 \cdot [q + \cos(v - \varpi)]^{-2}$, und differenziirt man von neuem

wo dq als beständig angenommen wird, und wo das Zeichen $+$ oder $-$ Statt hat, je nachdem m gerade oder ungerade ist. Hieraus kann man leicht schliessen, dass man, wenn man

$$\frac{1}{[1 + e \cos (v - \varpi)]^2}$$

$$= (1 - ee)^{-\frac{3}{2}} . [1 + E^{(1)} . \cos (v - \varpi) + E^{(2)} . \cos 2 (v - \varpi) + E^{(3)} . \cos 3 (v - \varpi) + \text{etc.} \ldots]$$

setzt, für jeden Werth von i folgende Gleichung haben wird [48]):

$$\frac{d^2 . \left(\frac{\varphi}{q}\right)}{dq^2} = + 1 . 2 . [q + \cos (v - \varpi)]^{-3},$$ und das dritte Differenzial

$$\frac{d^3 . \left(\frac{\varphi}{q}\right)}{dq^3} = - 1 . 2 . 3 . [q + \cos (v - \varpi)]^{-4},$$ folglich im Allgemeinen

$$\frac{d^m . \left(\frac{\varphi}{q}\right)}{dq^m} = \pm 1 . 2 . 3 \ldots m . [q + \cos (v - \varpi)]^{-(m+1)},$$ oder

$$\pm \frac{d^m . \left(\frac{\varphi}{q}\right)}{1 . 2 . 3 \ldots m . dq^m} = [q + \cos (v - \varpi)]^{-(m+1)} = e^{+m+1} [1 + e \cos (v - \varpi)]^{-m+1}.$$

48) Der Koefficient des allgemeinen $(i + 1)$ten Gliedes von $\frac{\varphi}{q}$ ist

$\pm \frac{2 \lambda^i}{q \sqrt{1 - ee}}$ oder $\pm \frac{2 \lambda^i}{\sqrt{qq - 1}}$. Nun ist $\frac{E^{(i)}}{(1 - ee)^{\frac{3}{2}}}$ gleich dem Differenzial dieses Koefficienten, durch dq dividirt und mit $- e^{-2}$ multiplicirt.

Man hat aber $\frac{d [2 \lambda^i (q^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}]}{dq} = 2 i \lambda^{i-1} . \frac{d\lambda}{dq} . (q^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} - 2 q . \lambda^i . (q^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}$

$= 2 \lambda^i \left[i \lambda^{-1} . \frac{d\lambda}{dq} . (q^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} - q . (q^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} \right]$. Nun ist $\lambda^{-1} = \frac{1 + \sqrt{1 - ee}}{e}$

$= q + \sqrt{q^2 - 1}$, und wenn man differenziirt, $- \lambda^{-2} . \frac{d\lambda}{dq} = 1 + q . (q^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$

$= (q^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} (q + \sqrt{q^2 - 1}) = (q^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-1}$, und folglich, wenn man mit $- \lambda$ multiplicirt, $+ \lambda^{-1} . \frac{d\lambda}{dq} = - (q^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$. Substituirt man diesen Werth in die obige Gleichung,

so erhält man $\frac{d . [2 \lambda^i (q^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}]}{dq} = - 2 \lambda^i [+ i . (q^2 - 1)^{-1} + q . (q^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}]$

$= - 2 \lambda^i (q^2 - 1)^{-1} [i + q (q^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}] = \frac{- 2 \lambda^i [i + (1 - ee)^{-\frac{1}{2}}] . e^2}{1 - ee}$

$$E^{(i)} = \pm \frac{2\, e^i \left(1 + i\sqrt{1 - ee}\right)}{\left(1 + \sqrt{1 - ee}\right)^i}.$$

Das Zeichen $+$ hat Statt, wenn i gerade, das Zeichen $-$, wenn i ungerade ist. Setzt man $n = a^{-\frac{3}{2}} \,.\, \sqrt{\mu}$, so wird man folgende Gleichung haben:

$$n dt = dv \,.\, [1 + E^{(1)} \cos(v - \varpi) + E^{(2)} \cos 2(v - \varpi) + E^{(3)} \cos 3(v - \varpi) + \text{etc.}]$$

und wenn man integrirt:

$$nt + \varepsilon = v + E^{(1)} \sin(v - \varpi) + \tfrac{1}{2} E^{(2)} \sin 2(v - \varpi) + \tfrac{1}{3} E^{(3)} \,.\, \sin 3(v - \varpi) + \text{etc.}$$

wo ε eine willkührliche beständige Gröſse ist. Dieser Ausdruck für $nt + \varepsilon$ ist sehr convergirend, wenn die Bahnen, so wie die der Planeten und Satelliten, wenig eccentrisch sind; und man kann daraus durch die Umkehrung der Reihen den Werth von v durch t erhalten. Wir werden uns mit diesem Gegenstand in den folgenden Sätzen beschäftigen.

Wenn der Planet zu demselben Punkt seiner Bahn zurückkömmt, so hat der Winkel v um den Umkreis, welchen wir immer mit 2π bezeichnen, zugenommen; nennt man die Zeit eines Umlaufs T, so erhält man

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi \,.\, a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}.$$

Dieser Ausdruck von T kann unmittelbar, ohne die Reihen zu gebrauchen, aus der Differenzialgleichung für dt abgeleitet werden. Die Gleichung $dt = \frac{dv}{h \,.\, u^2}$ oder $dt = \frac{r^2 dv}{h}$ giebt in der That $T = \int \frac{r^2 dv}{h}$, wo $\int r^2 dv$ die doppelte Oberfläche der Ellipse und folglich gleich $2\pi \,.\, a^2 \,.\, \sqrt{1 - ee}$ ist; nun ist aber h^2 gleich $\mu\, a(1 - ee)$; man erhält also für T den nämlichen Ausdruck, den wir vorher gefunden haben.

Vernachläſsigt man die Massen der Planeten in Vergleichung mit der Masse der Sonne, so erhält man $\sqrt{\mu} = \sqrt{M}$; der Werth von $\sqrt{\mu}$ ist dann

$= \frac{-2\lambda^i e^2 (i\sqrt{1 - ee} + 1)}{(1 - ee)^{\frac{3}{2}}})$. Multiplicirt man $- e^{-2}$, so erhält man

$$\frac{E^{(i)}}{(1 - ee)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\lambda^i (i\sqrt{1 - ee} + 1)}{(1 - ee)^{\frac{3}{2}}}.$$

für alle Planeten derselbe; T ist $a^{\frac{3}{2}}$ proportional, und folglich verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die Würfel der grofsen Axen der Bahnen. Man sieht, dafs dasselbe Gesetz für die Bewegung der Satelliten um ihre Planeten Statt hat, wenn man ihre Massen in Vergleichung mit der Masse des Planeten vernachläfsigt.

17. Man kann noch auf folgende Art die Gleichungen für die Bewegung zweyer Körper M und m, welche sich in verkehrtem Verhältnifs der Quadrate der Entfernungen anziehen, integriren. Wir nehmen die Gleichungen (1) (2) (3) des 9ten Satzes; sie verwandeln sich, wenn man nur die Wirkung der beiden Körper M und m betrachtet, und $M + m = \mu$ setzt, in folgende:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu . x}{r^3} \\ 0 &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu . y}{r^3} \\ 0 &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu . z}{r^3} \end{aligned}\right\} \text{(O).}$$

Die Integrale dieser Gleichungen werden die drey Koordinaten x, y, z des Körpers m, welche sich auf den Mittelpunkt des Körpers M beziehen, durch Funktionen der Zeit t geben: man wird alsdann die Koordinaten ξ, π und γ des Körpers M, welche sich auf einen festen Punkt beziehen, vermittelst der Gleichungen des 9ten Satzes haben:

$$\xi = a + bt - \frac{mx}{M+m}; \quad \pi = a' + b't - \frac{my}{M+m}; \quad \gamma = a'' + b''t - \frac{mz}{M+m}.$$

Man wird endlich die Koordinaten von m in Beziehung auf denselben festen Punkt haben, wenn man x zu ξ, y zu π, z zu γ addirt, und man wird auf diese Art die relative Bewegung der Körper M und m, und ihre absolute Bewegung im Raum erhalten. Es kömmt also alles darauf an, die Differenzialgleichungen (O) zu integriren.

Wenn man zwischen n veränderlichen Gröfsen $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$. . . $x^{(n)}$ und der veränderlichen Gröfse t, deren Differenzial beständig angenommen wird, eine Anzahl von n Differenzialgleichungen von folgender Form hat:

$$0 = \frac{d^i . x^{(s)}}{dt^i} + A . \frac{d^{i-1} . x^{(s)}}{dt^{i-1}} + B . \frac{d^{i-2} . x^{(s)}}{dt^{i-2}} \; . \; . \; . + H . x^{(s)},$$

in welcher man s nach und nach gleich 1, 2, 3 . . . n setzen wird, wo A, B . . . H Functionen der veränderlichen Gröſsen $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$. . . und von t sind, welche in Beziehung auf die veränderlichen Gröſsen $x^{(1)}$, $x^{(2)}$. . . $x^{(n)}$ symmetrisch, d. h. so beschaffen sind, daſs sie unverändert bleiben, wenn man irgend eine dieser veränderlichen Gröſsen in eine andere, und umgekehrt, verwandelt, so kann man annehmen

$$x^{(1)} = a^{(1)} \,.\, x^{(n-i+1)} + b^{(1)} \,.\, x^{(n-i+2)} \ldots + h^{(1)} \,.\, x^{(n)};$$
$$x^{(2)} = a^{(2)} \,.\, x^{(n-i+1)} + b^{(2)} \,.\, x^{(n-i+2)} \ldots + h^{(2)} \,.\, x^{(n)};$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$x^{(n-1)} = a^{(n-1)} \,.\, x^{(n-i+1)} + b^{(n-1)} \,.\, x^{(n-i+2)} \ldots + h^{(n-1)} \,.\, x^{(n)},$$

wo $a^{(1)}$, $b^{(1)}$. . . $h^{(1)}$; $a^{(2)}$, $b^{(2)}$ etc. willkührliche Gröſsen sind, deren Anzahl $i \,.\, (n - i)$ ist. Es ist klar, daſs diese Werthe dem gegebenen System der Differenzialgleichungen Genüge thun [49]); übrigens verwandeln sie diese Gleichungen in i Differenzialgleichungen zwischen den i veränderlichen Gröſsen $x^{(n-i+1)}$, $x^{(n-i+2)}$. . . $x^{(n)}$. Ihre Integrale werden i^2 neue willkührliche Gröſsen einführen, welche mit den vorhergehenden $i\,(n - i)$ vereinigt, die in willkührlichen Gröſsen geben werden, welche die Integration der gegebenen Differenzialgleichungen geben muſs.

Wendet man diese Theorie auf die Gleichungen (O) an, so sieht man, daſs $z = ax + by$ ist, wo a und b zwey willkührliche Gröſsen sind. Dies ist die Glei-

49) Es ist nämlich dann $x^{(s)} = a^{(s)} x^{(n-i+1)} + b^{(s)} x^{(n-i+2)} \ldots + h^{(s)} x^{(n)}$. Substituirt man diesen Werth in die gegebene Differenzialgleichung, so giebt das erste Glied $a^{(s)} x^{(n-i+1)}$ folgende Reihe:

$$a^{(s)} \left[\frac{d^i \,.\, x^{(n-i+1)}}{dt^i} + A \,.\, \frac{d^{i-1} \,.\, x^{(n-i+2)}}{dt^{i-1}} \ldots + H \,.\, x^{(n-i+1)} \right],$$

welche Reihe vermöge der gegebenen Differenzialgleichung gleich Null ist. Dasselbe findet bey allen Gliedern des Werths von $x^{(s)}$ Statt, und folglich thut dieser Werth von $x^{(s)}$ der gegebenen Differenzialgleichung Genüge. Es folgt nun aus diesem Werthe von $x^{(s)}$, daſs die Functionen A, B, . . . H sich in Rücksicht auf die veränderlichen Gröſsen nicht ändern, wenn man überall $x^{(r)}$ statt $x^{(p)}$ und $x^{(p)}$ statt $x^{(r)}$ setzt, weil $x^{(r)}$ und $x^{(p)}$ nur in Rücksicht auf die beständigen Gröſsen $a^{(r)}$, $a^{(p)}$, $b^{(r)}$, $b^{(p)}$... von einander verschieden sind. Wären die Functionen A, B . . . H nicht so beschaffen, so könnten die angenommenen Werthe von $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$. . . nicht Statt finden.

Gleichung für eine Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht; die Bahn von m befindet sich also ganz in dieser Ebene.

Die Gleichungen (O) geben noch

$$\left.\begin{aligned} o &= d\,.\left(r^3\,.\,\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \mu\,.\,dx \\ o &= d\,.\left(r^3\,.\,\frac{d^2y}{dt^2}\right) + \mu\,.\,dy \\ o &= d\,.\left(r^3\,.\,\frac{d^2z}{dt^2}\right) + \mu\,.\,dz \end{aligned}\right\} (O');$$

differenziirt man aber zweymal nach einander die Gleichung $rdr = xdx + ydy + zdz$, so erhält man

$$r\,.\,d^3r + 3\,dr\,.\,d^2r = x\,.\,d^3x + y\,.\,d^3y + z\,.\,d^3z$$
$$+ 3\,.\,(dx\,.\,d^2x + dy\,.\,d^2y + dz\,.\,d^2z),$$

und folglich

$$d\,.\left(r^3\,.\,\frac{d^2r}{dt^2}\right) = r^2\,.\left(x\,.\,\frac{d^3x}{dt^2} + y\,.\,\frac{d^3y}{dt^2} + z\,.\,\frac{d^3z}{dt^2}\right)$$
$$+ 3\,r^2\,.\left(dx\,.\,\frac{d^2x}{dt^2} + dy\,.\,\frac{d^2y}{dt^2} + dz\,.\,\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Substituirt man im zweyten Theil dieser Gleichung statt d^3x, d^3y, d^3z ihre durch die Gleichungen (O′) gegebenen Werthe, und hierauf statt d^2x, d^2y, d^2z ihre durch die Gleichungen (O) gegebenen Werthe, so erhält man [50])

50) Man hat $d\left(r^3\,.\,\frac{d^2x}{dt^2}\right) = r^3\,.\,\frac{d^3x}{dt^2} + 3\,r^2\,.\,dr\,.\,\frac{d^2x}{dt^2}$. Substituirt man dies in die Gleichung (O′) und multiplicirt man mit $\left(\frac{x}{r}\right)$, so erhält man

$$o = x\,.\,r^2\,.\,\frac{d^3x}{dt^2} + 3\,r\,.\,x\,.\,dr\,.\,\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\,.\,\frac{x}{r}\,dx.$$

Verwandelt man x successive in y und in z, und addirt diese drey Gleichungen, so erhält man

$$r^2\left(x\,.\,\frac{d^3x}{dt^2} + y\,.\,\frac{d^3y}{dt^2} + z\,.\,\frac{d^3z}{dt^2}\right) + 3\,rdr\,.\left(x\,.\,\frac{d^2x}{dt^2} + y\,.\,\frac{d^2y}{dt^2} + z\,.\,\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$
$$+ \frac{\mu}{r}\,(xdx + ydy + zdz) = o.$$

Nun ist das erste Glied des ersten Theils dieser Gleichung gleich

$$d\left(r^3\,.\,\frac{d^2r}{dt^2}\right) - 3\,r^2\left(dx\,.\,\frac{d^2x}{dt^2} + dy\,.\,\frac{d^2y}{dt^2} + dz\,.\,\frac{d^2z}{dt^2}\right);$$

$$o = d \cdot \left(r^3 \cdot \frac{d^2r}{dt^2}\right) + \mu\, dr.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den Gleichungen (O'), so wird man vermöge des oben gegebenen Lehrsatzes, wenn man $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ als eben so viel veränderliche Gröſsen $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$, $x^{(4)}$, und r als Function der Zeit t ansieht, folgende Gleichung erhalten [51]):

$$dr = \lambda \cdot dx + \gamma \cdot dy,$$

wo λ und γ beständige Gröſsen sind; und wenn man integrirt

das letzte Glied ist gleich $\frac{\mu}{r} \cdot r\,dr = \mu \cdot dr$. Substituirt man diese Werthe, so verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$o = d\left(r^3 \cdot \frac{d^2r}{dt^2}\right) + 3\,r\left[(xdr - rdx)\frac{d^2x}{dt^2} + (ydr - rdy)\frac{d^2y}{dt^2} + (zdr - rdz)\frac{d^2z}{dt^2}\right] + \mu \cdot dr.$$

Man substituire in dieser Gleichung statt $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ vermöge der Gleichungen (O') ihre Werthe $-\frac{\mu x}{r^3}$; $-\frac{\mu y}{r^3}$; $-\frac{\mu z}{r^3}$, so erhält man für das zweyte Glied der vorigen Gleichung

$$\frac{3\mu}{r^2}(x^2dr - rx \cdot dx + y^2dr - ry \cdot dy + z^2\,dr - rz \cdot dz)$$

$$= \frac{3\mu}{r^2}\,[(x^2 + y^2 + z^2)\,dr - r\,(xdx + ydy + zdz)]$$

$$= \frac{3\mu}{r^2}(r^2\,dr - r^2\,dr) = o.$$

Die vorige Gleichung wird so folgende: $o = d\left(r^3 \cdot \frac{d^2r}{dt^2}\right) + \mu \cdot dr.$

51) Es ist $n = 4$, $i = 2$; also $x^{(1)}$ oder $\frac{dx}{dt} = a^{(1)}\,\frac{dz}{dt} + b^{(1)}\,\frac{dr}{dt}$; ferner $x^{(2)}$ oder $\frac{dy}{dt} = a^{(2)} \cdot \frac{dz}{dt} + b^{(2)} \cdot \frac{dr}{dt}$; endlich $x^{(3)}$ oder $\frac{dz}{dt} = a^{(3)}\,\frac{dz}{dt} + b^{(3)}\,\frac{dr}{dt}$. Addirt man die zwey ersten Gleichungen, so erhält man $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \left(a^{(1)} + a^{(2)}\right)\frac{dz}{dt} + \left(b^{(1)} + b^{(2)}\right)\frac{dr}{dt}$. Eliminirt man aus dieser Gleichung $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ vermittelst der dritten Gleichung, so erhält man, wenn man noch mit dt multiplicirt

$$dx + dy = \left[\left(a^{(1)} + a^{(2)}\right)\frac{b^{(3)}}{1 - a^{(3)}} + b^{(1)} + b^{(2)}\right] \cdot dr.$$

$$r = \frac{h^2}{\mu} + \lambda . x + \gamma . y,$$

wo $\frac{h^2}{\mu}$ eine beständige Gröſse ist. Verbindet man diese Gleichung mit den folgenden:

$$z = a x + b y; \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

so erhält man eine Gleichung des zweyten Grades, so wohl zwischen x und y als zwischen x und z, und zwischen y und z. Es folgt hieraus, daſs die drey Projectionen der von m um M beschriebenen krummen Linie, Linien der zweyten Ordnung sind, und daſs folglich diese Curve selbst, weil sie ganz in Einer Ebene liegt, eine Linie der zweyten Ordnung oder ein Kegelschnitt ist. Man kann sich leicht aus der Natur dieser Gattung von krummen Linien versichern, daſs der Anfangspunkt der Koordinaten x und y im Brennpunkt des Kegelschnitts seyn muſs, wenn der Radius vector r durch eine linearische Function dieser Koordinaten ausgedrückt ist. Nun giebt ferner die Gleichung $r = \frac{h^2}{\mu} + \lambda . x + \gamma . y$ vermöge der Gleichungen (O) [52])

$$o = \frac{d^2 r}{dt^2} + \mu . \frac{\left(r - \frac{h^2}{\mu}\right)}{r^3}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit dr und integrirt sie, so erhält man

$$r^2 . \frac{dr^2}{dt^2} - 2 \mu r + \frac{\mu r^2}{a'} + h^2 = o,$$

wo a' eine willkührliche beständige Gröſse ist. Hieraus erhält man

$$dt = \frac{r\, dr}{\sqrt{\mu} \sqrt{2 r - \frac{r^2}{a'} - \frac{h^2}{\mu}}};$$

diese Gleichung wird r durch eine Function von t geben; und da schon x, y, z

52) Die Gleichung für r giebt $\frac{d^2 r}{dt^2} = \lambda . \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma . \frac{d^2 y}{dt^2}$, und wenn man statt $d^2 x$ und $d^2 y$ ihre Werthe aus den Gleichungen (O) substituirt, so erhält man $\frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{\mu}{r^3} (\lambda x + \gamma y)$ und $\lambda x + \gamma y = r - \frac{h^2}{\mu}$, woraus unmittelbar die im Text gegebene Gleichung folgt.

durch die vorhergehenden Gleichungen in Functionen von r gegeben sind, so wird man die Koordinaten von m in Functionen der Zeit haben.

18. Man kann auf diese verschiedenen Gleichungen durch folgende Methode gelangen, welche den Vortheil hat, die willkührlichen Gröſsen durch Functionen der Koordinaten x, y, z und ihre ersten Differenziale zu geben, welches uns in der Folge sehr nützlich seyn wird.

Wir nehmen an, daſs die Gleichung $V =$ beständige Gröſse, ein Integral der ersten Ordnung der Gleichungen (O) ist, wo V eine Function von $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ ist: wir bezeichnen die drey letztern Gröſsen mit x', y', z'. Differenziirt man die Gleichung $V =$ beständige Gröſse, so erhält man,

$$0 = \left(\frac{dV}{dx}\right) \cdot \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dV}{dy}\right) \cdot \frac{dy}{dt} + \left(\frac{dV}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dt} + \left(\frac{dV}{dx'}\right) \cdot \frac{dx'}{dt} + \left(\frac{dV}{dy'}\right) \cdot \frac{dy'}{dt} + \left(\frac{dV}{dz'}\right) \cdot \frac{dz'}{dt}.$$

Die Gleichungen (O) geben aber

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{\mu x}{r^3}; \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\mu y}{r^3}; \quad \frac{dz'}{dt} = -\frac{\mu z}{r^3};$$

man hat also folgende identische Gleichung zwischen den partiellen Differenzialen:

$$0 = x' \cdot \left(\frac{dV}{dx}\right) + y' \cdot \left(\frac{dV}{dy}\right) + z' \cdot \left(\frac{dV}{dz}\right) - \frac{\mu}{r^3} \cdot \left[x \cdot \left(\frac{dV}{dx'}\right) + y \cdot \left(\frac{dV}{dy'}\right) + z \cdot \left(\frac{dV}{dz'}\right)\right] \quad \text{(I)}.$$

Es ist klar, daſs jede Function von x, y, z, x', y', z', welche, statt V in die vorhergehende Gleichung gesetzt, sie identisch gleich Null macht, ein erstes Integral der Gleichungen (O) wird, wenn man sie einer beständigen Gröſse gleich setzt.

Man setze

$$V = U + U' + U'' + \text{etc.},$$

wo U eine Function der drey veränderlichen Gröſsen x, y, z ist; U' eine Function der sechs veränderlichen Gröſsen x, y, z, x', y', z', in Beziehung auf x', y', z' aber von der ersten Ordnung; U'' eine Function derselben veränderlichen Gröſsen, aber in Beziehung auf x', y', z' von der zweyten Ordnung, u. s. w. Substituirt man diesen Werth in die Gleichung (I), und vergleicht man einzeln mit einander erstens die Glieder ohne x', y', z'; zweytens diejenigen, welche die ersten Potenzen dieser veränderlichen Gröſsen enthalten; drittens diejenigen, welche ihre Quadrate und Producte enthalten u. s. w., so erhält man folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= x \cdot \left(\frac{dU'}{dx'}\right) + y \cdot \left(\frac{dU'}{dy'}\right) + z \cdot \left(\frac{dU'}{dz'}\right); \\
x' \cdot \left(\frac{dU'}{dx}\right) &+ y' \cdot \left(\frac{dU'}{dy}\right) + z' \cdot \left(\frac{dU'}{dz}\right) \\
&= \frac{\mu}{r^3} \cdot \left[x \cdot \left(\frac{dU''}{dx'}\right) + y \cdot \left(\frac{dU''}{dy'}\right) + z \cdot \left(\frac{dU''}{dz'}\right)\right] \\
x' \cdot \left(\frac{dU''}{dx}\right) &+ y' \cdot \left(\frac{dU''}{dy}\right) + z' \cdot \left(\frac{dU''}{dz}\right) \\
&= \frac{\mu}{r^3} \cdot \left[x \cdot \left(\frac{dU'''}{dx'}\right) + y \cdot \left(\frac{dU'''}{dy'}\right) + z \cdot \left(\frac{dU'''}{dz'}\right)\right] \\
x' \cdot \left(\frac{dU'''}{dx}\right) &+ y' \cdot \left(\frac{dU'''}{dy}\right) + z' \cdot \left(\frac{dU'''}{dz}\right) \\
&= \frac{\mu}{r^3} \cdot \left[x \cdot \left(\frac{dU^{IV}}{dx'}\right) + y \cdot \left(\frac{dU^{IV}}{dy'}\right) + z \cdot \left(\frac{dU^{IV}}{dz'}\right)\right].
\end{aligned}\right\} \quad (I').$$

Man weiſs aus der Theorie der Gleichungen zwischen partiellen Differenzialen, daſs das Integral der ersten dieser Gleichungen folgendes ist [53]):

$$U' = \text{Function}\,[xy' - yx',\ \ xz' - zx',\ \ yz' - zy',\ \ x,\ y,\ z]$$

ist. Da der Werth von U' in Bezug auf x', y', z' linearisch seyn muſs, so werden wir ihn von folgender Form annehmen:

$$U' = A \cdot (xy' - yx') + B \cdot (xz' - zx') + C \cdot (yz' - zy'),$$

53) Wenn φ, φ', φ'', φ''' . . . von einander unabhängige Functionenzeichen sind, so ist $U' = \varphi\,[xy' - yx',\ xz' - zx',\ yz' - zy',\ x,\ y,\ z]$ oder, wenn man die in Klammern eingeschlossene Gröſse durch A bezeichnet, $U' = \varphi \cdot (A)$. Differenziirt man diese Gleichung, so erhält man

$$dU' = d\,(xy' - yx')\ \varphi'(A) + d\,(xz' - zx')\ \varphi''(A) + d\,(yz' - zy')\ \varphi'''(A) + dx \cdot \varphi^{IV}(A) + dy \cdot \varphi^{V}(A) + dz \cdot \varphi^{VI}(A),$$

folglich

$$x\left(\frac{dU'}{dx'}\right) = \left(\frac{d(xy' - yx')}{dx'}\right) x \cdot \varphi' A + \left(\frac{d(xz' - zx')}{dx'}\right) x \cdot \varphi''(A) + \left(\frac{d(yz' - zy')}{dx'}\right) x \cdot \varphi'''(A)$$

oder $x\left(\frac{dU'}{dx'}\right) = - yx \cdot \varphi'(A) - zx \cdot \varphi''(A)$.

Eben so $y\left(\frac{dU'}{dy'}\right) = + yx \cdot \varphi'(A)$. $\quad\cdot\quad - zy \cdot \varphi'''(A)$,

endlich $z\left(\frac{dU'}{dz'}\right) = \quad\cdot\quad + zx \cdot \varphi''(A) + zy \cdot \varphi'''(A)$.

Die Summe dieser drey partiellen Differenziale ist also gleich Null.

wo A, B, C willkührliche beständige Gröſsen sind. Wir wollen ferner den Werth von V beym Gliede U'' abbrechen lassen, so daſs U''', U^{iv} etc. gleich Null sind; dadurch wird die dritte der Gleichungen (I') sich in folgende verwandeln:

$$o = x' \cdot \left(\frac{dU'}{dx}\right) + y' \cdot \left(\frac{dU'}{dy}\right) + z' \cdot \left(\frac{dU'}{dz}\right).$$

Der vorhergehende Werth von U' thut noch dieser Gleichung Genüge [54]). Die vierte der Gleichungen (I') verwandelt sich in

$$o = x' \cdot \left(\frac{dU''}{dx}\right) + y' \cdot \left(\frac{dU''}{dy}\right) + z' \cdot \left(\frac{dU''}{dz}\right),$$

eine Gleichung, deren Integral

$$U'' = \text{Function } (xy' - yx', \quad xz' - zx', \quad yz' - zy', \quad x', y', z')$$

ist. Diese Function muſs der zweyten der Gleichungen (I') Genüge thun. Da nun der erste Theil dieser Gleichung, mit dt multiplicirt, offenbar gleich dU ist, so muſs auch der zweyte Theil ein vollständiges Differenzial einer Function von x, y, z seyn. Man sieht aber leicht, daſs man dieser Bedingung, der Natur der Function U'', und der Voraussetzung, daſs diese Function von der zweyten Ordnung in Beziehung auf x', y', z' seyn soll, zugleich Genüge thut, wenn man

$$U'' = (Dy' - Ex') \cdot (xy' - yx') + (Dz' - Fx') \cdot (xz' - zx')$$
$$+ (Ez' - Fy') \cdot (yz' - zy') + G \cdot (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

setzt, wo D, E, F, G willkührliche beständige Gröſsen sind; man erhält alsdann, da r gleich $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist [55]),

54) Wenn man im Werth von U' und in der Gleichung $o = x \left(\frac{dU'}{dx'}\right) + y \left(\frac{dU'}{dy'}\right) + z \left(\frac{dU'}{dz'}\right)$ die Gröſsen x, y, z mit x', y', z' und umgekehrt x', y', z' mit x, y, z verwechselt, so verwandelt sich U' in $-U'$, und die Gleichung zwischen den partiellen Differenzialen in folgende:

$$o = x' \cdot \left(\frac{d \cdot - U'}{dx}\right) + y' \cdot \left(\frac{d \cdot - U'}{dy}\right) + z' \cdot \left(\frac{d \cdot - U'}{dz}\right),$$

oder $o = -x' \cdot \left(\frac{dU'}{dx}\right) - y' \cdot \left(\frac{dU'}{dy}\right) - z' \cdot \left(\frac{dU'}{dz}\right).$

55) Differenziirt man U'' in Beziehung auf x', y', z', so erhält man

$$x \cdot \left(\frac{dU''}{dx'}\right) = -Ex \cdot (xy' - yx') - yx \cdot (Dy' - Ex') - Fx \cdot (xz' - zx') - xz \cdot (Dz' - Fx') + 2x'x \cdot G.$$

$$y \cdot \left(\frac{dU''}{dy'}\right) = +Dy \cdot (xy' - yx') + yx \cdot (Dy' - Ex') - Fy \cdot (yz' - zy') - yz \cdot (Ez' - Fy') + 2y'y \cdot G.$$

$$z \cdot \left(\frac{dU''}{dz'}\right) = +Dz \cdot (xz' - zx') + xz \cdot (Dz' - Fx') + Ez \cdot (yz' - zy') + yz \cdot (Ez' - Fy') + 2z'z \cdot G.$$

$$U = -\frac{\mu}{r} \cdot (Dx + Ey + Fz + 2G);$$

man wird also so die Werthe von U, U', U'' haben, und die Gleichung $V =$ beständige Grösse, wird dadurch folgende werden:

$$\text{best. Grösse} = -\frac{\mu}{r} \cdot (Dx + Ey + Fz + 2G) + (A + Dy' - Ex') \cdot (xy' - yx')$$
$$+ (B + Dz' - Fx') \cdot (xz' - zx') + (C + Ez' - Fy') \cdot (yz' - zy')$$
$$+ G \cdot (x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Diese Gleichung thut der Gleichung (I) und folglich den Differenzialgleichungen (O) Genüge, was auch immer die willkührlichen Grössen A, B, C, D, E, F, G seyn mögen. Setzt man sie gleich Null, erstens mit Ausnahme von A, zweytens mit Ausnahme von B, drittens mit Ausnahme von C u. s. w., und restituirt $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ statt x', y', z', so wird man folgende Integrale erhalten:

Multiplicirt man die Summe dieser drey partiellen Differenziale mit $\frac{\mu}{r^3}\,dt$, so erhält man, vermöge der zweyten der Gleichungen (I') den Werth von dU; wir wollen bey dieser Multiplication zugleich die Glieder sammeln, welche in D, in E, in F und in G multiplicirt sind, und statt $x'dt$, $y'dt$, $z'dt$ ihre Werthe dx, dy, dz setzen; dies giebt

$$dU = \mu D \cdot \left(\frac{yx\,dy - yy\,dx + zx\,dz - zz\,dx}{r^3}\right) + \mu E \cdot \left(\frac{zy\,dz - zz\,dy - xx\,dy + xy\,dx}{r^3}\right)$$
$$+ \mu F \left(\frac{xz\,dx - xx\,dz + yz\,dy - yy\,dz}{r^3}\right) + 2\mu G \cdot \left(\frac{x dx + y dy + z dz}{r^3}\right).$$

Der Factor von μD ist $\frac{yx\,dy + zx\,dz - (y^2 + z^2)\,dx}{r^3}$; da nun $-y^2 - z^2 = -r^2 + x^2$ ist, so ist dieser Factor gleich $\frac{x\,(xdx + ydy + zdz) - r^2 \cdot dx}{r^3}$, welches gleich $\frac{xr \cdot dr - r^2 \cdot dx}{r^3}$, oder

$$xr^{-2}\,dr - r^{-1}\,dx = -x\,d \cdot (r^{-1}) - r^{-1}\,dx = -d\,(x\,r^{-1}).$$

Der Factor von μD verwandelt sich in den Factor von μE, wenn man x in y und y in x verwandelt; nimmt man eben diese Verwandlung in dem Werth des Factors von μD vor, so erhält man den Werth des Factors von μE, welcher also gleich $-d\,(y\,r^{-1})$ ist. Verwandelt man eben so im Factor von μD, x in z und z in x, so erhält man den Factor von μF, welcher also gleich $-d\,(z\,r^{-1})$ ist. Der Factor von $2\mu G$ ist endlich gleich $\frac{r\,dr}{r^3} = r^{-2}\,dr = -d \cdot (r^{-1})$. Substituirt man diese Werthe, so wird $dU = -\mu D \cdot d\,(x\,r^{-1}) - \mu E \cdot d\,(y\,r^{-1}) - \mu F \cdot d\,(z\,r^{-1}) - 2\mu G \cdot d\,(r^{-1})$, und wenn man integrirt

$$U = -\frac{\mu}{r}\,(Dx + Ey + Fz + 2G).$$

$$\left.\begin{array}{l}
c = \frac{xdy - ydx}{dt}; \quad c' = \frac{xdz - zdx}{dt}; \quad c'' = \frac{ydz - zdy}{dt}; \\
o = f + x \cdot \left[\frac{\mu}{r} - \left(\frac{dy^2 + dz^2}{dt^2}\right)\right] + \frac{ydy \cdot dx}{dt^2} + \frac{zdz \cdot dx}{dt^2}; \\
o = f' + y \cdot \left[\frac{\mu}{r} - \left(\frac{dx^2 + dz^2}{dt^2}\right)\right] + \frac{xdx \cdot dy}{dt^2} + \frac{zdz \cdot dy}{dt^2}; \\
o = f'' + z \cdot \left[\frac{\mu}{r} - \left(\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right)\right] + \frac{xdx \cdot dz}{dt^2} + \frac{ydy \cdot dz}{dt^2}; \\
o = \frac{\mu}{a} - \frac{2\mu}{r} + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2};
\end{array}\right\} \text{(P)};$$

wo c, c', c'', f, f', f'' und a willkührliche beständige Gröſsen sind.

Die Differenzialgleichungen (O) können nur sechs von einander verschiedene Integrale der ersten Ordnung haben, vermittelst welcher man die drey veränderlichen Gröſsen x, y, z durch Functionen der Zeit t bestimmen kann, wenn man dx, dy, dz eliminirt. Es muſs also wenigstens eins der vorhergehenden sieben Integrale in den sechs übrigen enthalten seyn. Man sieht sogar a priori, daſs zwey dieser Integrale in den übrigen fünf enthalten seyn müssen. Denn da diese Integrale das Differenzial der Zeit allein enthalten, so können sie nicht die veränderlichen Gröſsen x, y, z durch Functionen der Zeit geben, und sind folglich unzulänglich, um die Bewegung von m um M vollständig zu bestimmen. Wir wollen nun untersuchen, wie diese Integrale nur fünf von einander unterschiedenen Integralen gleich gelten.

Multiplicirt man die vierte der Gleichungen (P) mit $\frac{zdy - ydz}{dt}$, und die fünfte mit $\frac{xdz - zdx}{dt}$ und addirt sie, so erhält man [56])

o =

56) Man hat $ydy \cdot \frac{dx}{dt^2} + zdz \cdot \frac{dx}{dt^2}$ gleich $(xdx + ydy + zdz) \cdot \frac{dx}{dt^2} - x\frac{dx^2}{dt^2}$ welches gleich $\frac{rdr \cdot dx}{dt^2} - x\frac{dx^2}{dt^2}$. Substituirt man diesen Werth in die vierte der Gleichungen (P), so erhält man

o =

$$o = f\cdot\left(\frac{zdy - ydz}{dt}\right) + f'\cdot\left(\frac{xdz - zdx}{dt}\right) + z\left(\frac{xdy - ydx}{dt}\right)\cdot\left[\frac{\mu}{r} - \left(\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right)\right]$$
$$+ \left(\frac{xdy - ydx}{dt}\right)\cdot\left(\frac{xdx\ .\ dz}{dt^2} + \frac{ydy\ .\ dz}{dt^2}\right).$$

Substituirt man statt $\frac{xdy - ydx}{dt}$, $\frac{xdz - zdx}{dt}$, $\frac{ydz - zdy}{dt}$ ihre durch die drey ersten der Gleichungen (P) gegebenen Werthe, so wird man die Gleichung

$$o = \frac{f'c' - fc''}{c} + z\ .\left[\frac{\mu}{r} - \left(\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right)\right] + \frac{xdx\ .\ dz}{dt^2} + \frac{ydy\ .\ dz}{dt^2}$$

erhalten, welche mit dem sechsten der Integrale (P) identisch wird, wenn man

$$o = f + x\left[\frac{\mu}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right] + \frac{rdr\ .\ dx}{dt^2}.$$

Die letzte der Gleichungen (P) giebt aber $\frac{\mu}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = -\frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{a}$; substituirt man diesen Werth in die vorige Gleichung, so erhält man

$$o = f + \mu x\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) + \frac{rdr\ .\ dx}{dt^2}\ \ldots\ (1).$$

Verwandelt man x in y, und dann x in z, so erhält man die 5te und 6te der Gleichungen (P), nämlich

$$o = f' + \mu y\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) + \frac{rdr\ .\ dy}{dt^2}\ \ldots\ (2)$$

$$o = f'' + \mu z\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) + \frac{rdr\ .\ dz}{dt^2}\ \ldots\ (3).$$

Multiplicirt man die Gleichung (1) mit $-c''$; die Gleichung (2) mit c' und addirt sie, so erhält man

$$o = c'f' - c''f + \mu\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)(c'y - c''x) + \frac{dr}{dt}\left(c'\frac{dy}{dt} - c''\frac{dx}{dt}\right)\ \ldots\ (4).$$

Man substituire statt c', c'' ihre Werthe aus den Gleichungen (P) so erhält man:

$c'\frac{dy}{dt} = \frac{xdz\ .\ dy}{dt^2} - \frac{zdx\ .\ dy}{dt^2}$ und $-c''\frac{dx}{dt} = -\frac{ydz\ .\ dx}{dt^2} + \frac{zdy\ .\ dx}{dt^2}$; ihre Summe

$c'\frac{dy}{dt} - c''\frac{dx}{dt}$ ist gleich $\frac{xdz\ .\ dy - ydz\ .\ dx}{dt^2} = \frac{dz}{dt}\cdot\left(\frac{xdy - ydx}{dt}\right) = \frac{dz}{dt}\ .\ c.$

Ferner ist $(c'y - c''x) = \left[xy\ .\ \frac{dz}{dt} - zy\ .\ \frac{dx}{dt} - xy\ .\ \frac{dz}{dt} + xz\ .\ \frac{dy}{dt}\right]$

$$= \left(-zy\ .\ \frac{dx}{dt} + xz\ .\ \frac{dy}{dt}\right) = z\ .\left(-y\ .\ \frac{dx}{dt} + x\ .\ \frac{dy}{dt}\right) = z\ .\ c.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (4), und dividirt man durch c, so erhält man

$$o = \frac{c'f' - c''f}{c} + \mu z\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) + \frac{rdr\ .\ dz}{dt^2}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) geben also die Gleichung (3), und man hat $f'' = \frac{c'f' - c''f}{c}$.

$f'' = \frac{f'c' - fc''}{c}$ oder $o = fc'' - f'c' + f''c$ setzt. Das sechste der Integrale (P) entspringt also aus den fünf ersten, und die sechs willkührlichen Gröſsen sind durch die vorhergehende Gleichung unter einander verbunden.

Nimmt man die Quadrate der durch die Gleichungen (P) gegebenen Werthe von f, f', f'' und addirt sie, und setzt man der Kürze wegen $f^2 + f'^2 + f''^2 = l^2$, so wird man [57])

$$l^2 - \mu^2 = \left[r^2 \cdot \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 \right] \cdot \left[\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} \right]$$

erhalten. Quadrirt man aber die durch die nämlichen Gleichungen gegebenen Werthe von c, c', c'' und addirt sie, und setzt $c^2 + c'^2 + c''^2 = h^2$, so

57) Wir haben in der vorhergehenden Anmerkung der 4ten der Gleichungen (P) folgende Gestalt gegeben:

$$o = f + x\left(\frac{\mu}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + \frac{rdr \cdot dx}{dt^2}.$$ Man setze der Kürze wegen

$$\frac{\mu}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = A,$$ so erhält man

$$-f = Ax + \frac{rdr \cdot dx}{dt^2},$$ und wenn man quadrirt,

$$f^2 = A^2 x^2 + \frac{2 A r dr}{dt^2} \cdot xdx + \frac{r^2 dr^2}{dt^2} \cdot \frac{dx^2}{dt^2}.$$

Verwandelt man x nach und nach in y und in z; f in f' und f'', so erhält man die Quadrate der fünften und sechsten der Gleichungen (P), nämlich

$$f'^2 = A^2 y^2 + \frac{2 A \cdot rdr}{dt^2} \cdot ydy + \frac{r^2 dr^2}{dt^2} \cdot \frac{dy^2}{dt^2},$$

$$f''^2 = A^2 z^2 + \frac{2 A \cdot rdr}{dt^2} \cdot zdz + \frac{r^2 dr^2}{dt^2} \cdot \frac{dz^2}{dt^2},$$

und die Summe dieser drey Quadrate, oder

$$l^2 = A^2 r^2 + 2A\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 \cdot \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right)$$

oder $l^2 = A^2 r^2 + \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 \left(2A + \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right)$,

oder wenn man statt A seinen Werth substituirt,

$$l^2 = \mu^2 - \frac{2\mu r^2}{r} \cdot \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + r^2 \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 \left(\frac{2\mu}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right)$$

oder $l^2 - \mu^2 = \left(\frac{2\mu}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) \left[- r^2 \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 \right].$

erhält man 58)

$$r^2 \cdot \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2 = h^2;$$

dadurch verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in folgende:

$$o = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu^2 - l^2}{h^2}.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der letztern der Gleichungen (P), so erhält man die Bedingungsgleichung

$$\frac{\mu^2 - l^2}{h^2} = \frac{\mu}{a}.$$

Die letzte der Gleichungen (P) ist also in den sechs ersten enthalten, welche selbst nur fünf von einander verschiedenen Integralen gleich gelten, da die sieben willkührlichen Gröſsen c, c', c'', f, f', f'' und a durch die vorhergehenden zwey Bedingungsgleichungen unter einander verbunden sind. Es folgt hieraus, daſs man den allgemeinsten Ausdruck von V, welcher der Gleichung (I) Genüge thut, erhalten wird, wenn man für diesen Ausdruck eine willkührliche Function der Werthe von c, c', c'', f, f' nimmt, welche durch die fünf ersten der Gleichungen (P) gegeben sind.

58) $c^2 = x^2 \cdot \frac{dy^2}{dt^2} + y^2 \cdot \frac{dx^2}{dt^2} - 2\,xy \cdot \frac{dy \cdot dx}{dt^2}$

$c'^2 = x^2 \cdot \frac{dz^2}{dt^2} + z^2 \cdot \frac{dx^2}{dt^2} - 2\,xz \cdot \frac{dz \cdot dx}{dt^2}$

$c''^2 = y^2 \cdot \frac{dz^2}{dt^2} + z^2 \cdot \frac{dy^2}{dt^2} - 2\,zy \cdot \frac{dz \cdot dy}{dt^2}.$

Die Summe dieser drey Gleichungen giebt $c^2 + c'^2 + c''^2$ oder h^2. Die positiven Theile dieser Summe sind $(y^2 + z^2)\frac{dx^2}{dt^2} + (x^2 + z^2)\frac{dy^2}{dt^2} + (y^2 + x^2)\frac{dz^2}{dt^2}$; da aber $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, so verwandelt sich dieser Ausdruck in $(r^2 - x^2)\frac{dx^2}{dt^2} + (r^2 - y^2)\frac{dy^2}{dt^2} + (r^2 - z^2)\frac{dz^2}{dt^2}$, welcher gleich $r^2\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) - x^2\frac{dx^2}{dt^2} - y^2\frac{dy^2}{dt^2} - z^2\frac{dz^2}{dt^2}$. Setzt man zu diesem Ausdruck die drey negativen Glieder der obigen Summe, nämlich $-2\,xy\frac{dy.dx}{dt^2} - 2\,xz\frac{dz.dx}{dt^2} - 2\,zy \cdot \frac{dz \cdot dy}{dt^2}$, so ist die Summe aller sechs negativen Glieder gleich $-\left(\frac{xdx + ydy + zdz}{dt}\right)^2$, welcher Ausdruck gleich $-\left(\frac{rdr}{dt}\right)^2$ ist. Man erhält also $h^2 = r^2\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) - \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2$.

19. Ob schon diese Integrale unzulänglich sind, um x, y, z durch Functionen der Zeit zu bestimmen, so bestimmen sie doch die Natur der von m um M beschriebenen krummen Linie. Denn wenn man die erste der Gleichungen (P) mit z, die zweyte mit $-y$, und die dritte mit x multiplicirt, so giebt ihre Summe die Gleichung

$$o = cz - c'y + c''x,$$

welche die Gleichung einer Ebene ist, deren Lage von den beständigen Größen c, c', c'' abhängt.

Multiplicirt man die vierte der Gleichungen (P) mit x, die fünfte mit y und die sechste mit z und addirt sie, so erhält man

$$o = fx + f'y + f''z + \mu r - r^2 . \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + \frac{r^2 . dr^2}{dt^2};$$

man hat aber nach dem vorhergehenden Satz

$$r^2 . \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) - \frac{r^2 . dr^2}{dt^2} = h^2,$$

folglich

$$o = \mu r - h^2 + fx + f'y + f''z.$$

Verbindet man diese Gleichung mit den folgenden: $o = c''x - c'y + cz$ und $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, so erhält man die Gleichung für die Kegelschnitte, wo der Anfangspunkt der r im Brennpunkt ist. Die Planeten und Kometen beschreiben also sehr nahe um die Sonne Kegelschnitte, in deren einem Brennpunkt sich dieses Gestirn befindet, und sie bewegen sich so, daſs die von den Radius vectors beschriebenen Flächen wie die Zeiten wachsen. Denn wenn man den unendlich kleinen Winkel, welchen die Radius r und $r + dr$ einschlieſsen, dv nennt, so hat man

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2 dv^2 + dr^2;$$

dann verwandelt sich die Gleichung $r^2 . \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) - \frac{r^2 dr^2}{dt^2} = h^2$ in folgende: $r^4 dv^2 = h^2 dt$, woraus

$$dv = \frac{h\,dt}{rr}$$

folgt. Man sieht hieraus, daſs das Element $\frac{1}{2} r^2 dv$ der vom Radius vector r beschriebenen Fläche dem Element dt der Zeit proportional ist, und daſs also die

während einer endlichen Zeit beschriebene Fläche der Zeit selbst proportional ist. Man sieht auch noch, daſs die Winkelbewegung von m um M in jedem Punkt der Bahn sich verkehrt wie das Quadrat des Radius vectors verhält; und da man ohne merklichen Irrthum sehr kurze Zeiträume für unendlich klein annehmen kann, so wird man vermittelst der vorhergehenden Gleichung die stündlichen Bewegungen der Planeten und Kometen in den verschiedenen Punkten ihrer Bahn erhalten.

Die Elemente des vom m beschriebenen Kegelschnitts' sind die willkührlichen Gröſsen seiner Bewegung; sie sind folglich Functionen der vorhergehenden willkührlichen Gröſsen c, c', c'', f, f', f'' und $\frac{\mu}{a}$; wir wollen diese Functionen bestimmen. Es sey θ der Winkel, welchen die Durchschnittslinie der Ebene der Bahn und der Ebene der x und y, welche Durchschnittslinie man die Knotenlinie nennt, mit der Axe der x macht; es sey ϕ die gegenseitige Neigung der beiden Ebenen. Bezieht man nun die Koordinaten von m auf die Knotenlinie, als auf die Axe der Abscissen, und nennt man sie x', y', so erhält man

$$x' = x \,.\, \cos\theta + y \,.\, \sin\theta;$$
$$y' = y \,.\, \cos\theta - x \,.\, \sin\theta.$$

Man hat auſserdem $z = y' \,.\, \operatorname{tang}\phi$, folglich

$$z = y \,.\, \cos\theta \,.\, \operatorname{tang}\phi - x \,.\, \sin\theta \,.\, \operatorname{tang}\phi.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der folgenden:

$$0 = c''x - c'y + cz,$$

so erhält man

$$c' = c \,.\, \cos\theta \,.\, \operatorname{tang}\phi;$$
$$c'' = c \,.\, \sin\theta \,.\, \operatorname{tang}\phi,$$

und hieraus

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{c''}{c'},$$

$$\operatorname{tang}\phi = \frac{\sqrt{c'^2 + c''^2}}{c}.$$

Die Lage der Knoten und die Neigung der Bahn sind also durch Functionen der willkührlichen beständigen Gröſsen c, c', c'' bestimmt.

In der Sonnennähe hat man

$$rdr = 0, \quad \text{oder } xdx + ydy + zdz = 0$$ [59]).

Es seyen X, Y, Z die Koordinaten des Planeten in diesem Punkt; die vierte und fünfte der Gleichungen (P) des vorhergehenden Satzes werden dann

$$\frac{Y}{X} = \frac{f'}{f}$$

geben. Nennt man aber I die Länge der auf der Ebene der x und y projicirten Sonnennähe, welche Länge von der Axe der x an gezählt werden muſs, so hat man

$$\frac{Y}{X} = \text{tang } I,$$

folglich

$$\text{tang } I = \frac{f'}{f},$$

wodurch die Lage der groſsen Axe des Kegelschnitts bestimmt wird.

Wenn man aus der Gleichung $r^2 . \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) - \frac{r^2\, dr^2}{dt^2} = h^2$

die Gröſse $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$ vermittelst der letzten der Gleichungen (P) eliminirt, so wird man

$$2\,\mu r - \frac{\mu r^2}{a} - \frac{r^2\, dr^2}{dt^2} = h^2$$

erhalten; da aber dr an den Endpunkten der groſsen Axe gleich Null ist, so hat man in diesen Punkten

$$0 = r^2 - 2\,ar + \frac{a\,h^2}{\mu}.$$

Die Summe der beiden Werthe von r in dieser Gleichung ist der groſsen Axe des Kegelschnitts, und ihr Unterschied der doppelten Eccentricität gleich; folglich ist a die halbe groſse Axe der Bahn, oder die mittlere Entfernung des Körpers m von M; und $\sqrt{1 - \frac{h^2}{\mu a}}$ ist das Verhältniſs der Eccentricität zur hal-

59) In der Sonnnähe ist r ein Kleinstes, und also dr gleich Null.

ben grofsen Axe. Es sey e dieses Verhältnifs, so hat man nach dem vorhergehenden Satz

$$\frac{\mu}{a} = \frac{\mu^2 - l^2}{h^2};$$

man wird also $\mu e = l$ haben. Man wird so alle Elemente, welche die Natur des Kegelschnitts bestimmen, und seine Lage im Raum kennen.

20. Die drey endlichen Gleichungen, welche wir im vorhergehenden Satz zwischen x, y, z und r gefunden haben, geben x, y, z durch Functionen von r. Es ist also hinreichend, den Radius vector durch eine Function der Zeit zu haben, um die Koordinaten in ähnlichen Functionen zu erhalten: dies erfordert eine neue Integration. Wir wollen zu diesem Zweck die Glei

$$2\mu r - \frac{\mu r^2}{a} - \frac{r^2 \cdot dr^2}{dt^2} = h^2$$

wieder vornehmen; man hat nach dem vorhergehenden Satz

$$h^2 = \frac{a}{\mu} \cdot (\mu^2 - l^2) = a\mu \cdot (1 - ee);$$

man hat also

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{\mu}\sqrt{2r - \frac{rr}{a} - a(1 - ee)}}.$$

Man setze, um diese Gleichung zu integriren, $r = a(1 - e \cdot \cos u)$, so erhält man [60])

$$dt = \frac{a^{\frac{3}{2}} \cdot du}{\sqrt{\mu}} \cdot (1 - e \cdot \cos u),$$

und wenn man integrirt

$$t + T = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\mu}(u - e \cdot \sin u) \quad (S),$$

60) Man hat $2r - \frac{rr}{a} - a(1 - ee) = -\frac{-2ra + rr - aa}{a} + aee = -a\left(\frac{r-a}{a}\right)^2 + aee$ $= -ae^2 \cdot \cos u^2 + ae^2 = ae^2(1 - \cos u^2) = ae^2 \cdot \sin u^2$, und die Quadratwurzel dieser Gröfse ist $\sqrt{a} \cdot e \cdot \sin u$. Ferner ist $dr = ae \cdot \sin u \cdot du$; also

$$dt = \frac{a^2(1 - e \cdot \cos u)\, e \cdot \sin u \cdot du}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{\mu} \cdot e \cdot \sin u} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \cdot (1 - e \cdot \cos u) \cdot du.$$

wo T eine willkührliche beständige Gröſse ist. Diese Gleichung giebt u, und folglich r durch eine Function von t; und da x, y, z durch Functionen von r gegeben sind, so wird man die Werthe dieser Koordinaten für jede gegebene Zeit haben.

Wir sind nun so weit gekommen, die Differenzialgleichungen (O) des 17ten Satzes vollständig zu integriren, wodurch sechs willkührliche Gröſsen a, e, I, θ, ϕ und T eingeführt worden sind. Die beiden erstern hängen von der Natur der Bahn, die drey folgenden von ihrer Lage im Raum ab, und die letztere bezieht sich auf die Lage des Körpers m zu einer gegebenen Epoche, oder, welches dasselbe ist, sie hängt von der Zeit seines Durchgangs durch die Sonnennähe ab.

Wir wollen nun die Koordinaten des Körpers m in andere, zum astronomischen Gebrauch bequemere, verwandeln, und hierzu v den Winkel nennen, welchen der Radius vector r mit der groſsen Axe macht, und welchen wir von der Sonnennähe an zählen; die Gleichung für die Ellipse wird dann

$$r = \frac{a(1 - e.e)}{1 + e \,.\, \cos v}$$

seyn. Die Gleichung $r = a(1 - e \,.\, \cos u)$ des vorhergehenden Satzes zeigt an, daſs u in der Sonnennähe gleich Null ist, so daſs dieser Punkt der Anfangspunkt der beiden Winkel u und v ist; und man kann sich leicht versichern, daſs der Winkel u von der groſsen Axe der Bahn und von dem Radius vector eingeschlossen wird, welcher von dem Mittelpunkt der Bahn zu dem Punkt gezogen wird, wo der Umkreis eines auf der groſsen Axe als Durchmesser beschriebenen Kreises von der Koordinate des Körpers m geschnitten wird, welche senkrecht auf die groſse Axe ist. Man nennt diesen Winkel die eccentrische Anomalie und der Winkel v ist die wahre Anomalie. Vergleicht man die beiden Ausdrücke für r, so erhält man

$$1 - e \,.\, \cos u = \frac{1 - ee}{1 + e \,.\, \cos v},$$

woraus man

$$\tang \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \,.\, \tang \tfrac{1}{2} u$$

er-

erhält[61]). Nimmt man für den Anfang der Zeit t den Augenblick des Durchgangs des Körpers m durch die Sonnennähe, so wird T gleich Null seyn; und setzt man der Kürze wegen $\frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} = n$, so erhält man $nt = u - e \, . \sin u$. Sammelt man diese Gleichungen für die Bewegungen von m um M, so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} nt = u - e \, . \sin u \\ r = a\,(1 - e \, . \cos u) \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}} \, . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u \end{array}\right\} \quad (f).$$

Den Winkel nt nennt man die mittlere Anomalie. Die erste dieser Gleichungen giebt u durch eine Function von t, und die zwey übrigen geben r und v, wenn u bestimmt ist. Die Gleichung zwischen u und t ist transcendent und kann nur durch Näherung aufgelöst werden. Glücklicherweise verschaffen die besondern Umstände der himmlischen Bewegungen sehr schnelle Näherungen. Denn die Bahnen der Himmelskörper sind entweder kreisförmig oder sehr eccentrisch, und in beiden Fällen kann man u in t durch sehr convergirende Formeln bestimmen, welche wir jetzt entwickeln wollen. Hierzu werden wir über die Entwickelung der Functionen in Reihen einige allgemeine Sätze geben, welche uns in der Folge nützlich seyn werden.

21. Es sey u irgend eine Function von α, welche man in Beziehung auf die Potenzen von α entwickeln will, welche Reihe man so darstellen kann:

$$u = U + \alpha q_1 + \alpha^2 q_2 + \alpha^3 q_3 \, . \, . \, . + \alpha^n \, . \, q_n + \alpha^{n+1} \, . \, q_{n+1} + \text{etc.}$$

wo U, q_1, q_2 etc. von α unabhängige Grössen sind; so ist klar, daſs U der Werth von u für $\alpha = 0$ ist, und daſs man für jeden Werth von n

61) Man hat bekanntlich $\operatorname{tang} (\tfrac{1}{2} y)^2 = \frac{1 - \cos y}{1 + \cos y}$; die gegebene Gleichung giebt $- e \cos u = - 1 + \frac{(1-e)(1+e)}{1 + e \cos v}$, und folglich $e - e \cos u$ oder $e(1 - \cos u) = (1 - e)\left(-1 + \frac{1+e}{1 + e \cos v}\right) = (1 - e)\left(\frac{e - e \cos v}{1 + e \cos v}\right)$; eben so: $e + e \cos u$ oder $e\,(1 + \cos u) = (1 + e)\left(1 - \frac{1-e}{1 + e \cos v}\right) = (1 + e)\left(\frac{e + e \cos v}{1 + e \cos v}\right)$, folglich $\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}$ oder $\operatorname{tang} (\tfrac{1}{2} u)^2 = \left(\frac{1-e}{1+e}\right) . \left(\frac{e - e \cos v}{e + e \cos v}\right) = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)\left(\frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}\right) = \left(\frac{1-e}{1+e}\right) . \operatorname{tang} (\tfrac{1}{2} v)^2$.

$$\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot q_n + 2 \cdot 3 \ldots (n+1)\, \alpha \cdot q_{n+1} + \text{etc.}$$

hat, wo das Differenzial $\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)$ so zu nehmen ist, daſs man alles, was sich mit α ändern muſs, als veränderlich ansieht. Setzt man also im Ausdruck von $\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)$ nach den Differenziationen $\alpha = 0$, so wird man

$$q_n = \frac{\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

erhalten. Ist u eine Function der beiden Gröſsen α und α', welche man in Bezug auf die Potenzen und Producte von α und α' entwickeln will, und stellt man diese Reihe so vor:

$$\begin{aligned} u = U + \alpha\, q_{1,0} &+ \alpha^2 q_{2,0} + \text{etc.} \\ + \alpha' q_{0,1} &+ \alpha\alpha' \cdot q_{1,1} + \text{etc.} \\ &+ \alpha'^2\, q_{0,2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

so wird der Koefficient $q_{n,n'}$ des Products $\alpha^n \cdot \alpha'^{n'}$ ebenfalls gleich

$$\frac{\left(\frac{d^{n+n'} u}{d\alpha^n \cdot d\alpha'^{n'}}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n'}$$

seyn, wo α und α' nach den Differenziationen gleich Null gesetzt werden müssen.

Ist u im Allgemeinen eine Function von α, α', α'' ... und entwickelt man sie in eine nach den Potenzen und Producten von α, α', α'' ... geordnete Reihe; bezeichnet man mit $\alpha^n \cdot \alpha'^{n'} \cdot \alpha''^{n''} \ldots q_{n,n',n''} \ldots$ das Glied dieser Reihe, welches das Product $\alpha^n \cdot \alpha'^{n'} \cdot \alpha''^{n''} \ldots$ zum Factor hat, so hat man

$$q_{n,n',n''} \ldots = \frac{\left(\frac{d^{n+n'+n''} \cdots u}{d\alpha^n \cdot d\alpha'^{n'} \cdot d\alpha''^{n''} \ldots}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n' \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n'' \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots}$$

wofern man nur α, α', α'' ... nach den Differenziationen gleich Null setzt.

Es sey nun u eine Function von α, α', α'' ... und der veränderlichen Gröſsen t, t', t'' ...; wenn man durch die Natur dieser Function oder durch eine Gleichung zwischen den partiellen Differenzialen, welche die

Function vorstellt, dahin gelangt ist, die Gröſse

$$\left(\frac{d^{n+n'+n''}\cdots u}{d\alpha^n \,.\, d\alpha'^{n'} \,.\, d\alpha''^{n''} \ldots}\right)$$

durch eine Function von u und seiner in Beziehung auf t, t', t'' . . . genommenen Differenziale zu erhalten; so sey diese Function, wenn man darin u in U verwandelt, gleich F, wo U der Werth von u ist, wenn man α, α' . . . gleich Null setzt; dann ist sichtbar, daſs man $q_{n,\,n',\,n''\ldots}$ erhalten wird, wenn man F durch das Product $1.2.3\ldots n.\; 1.2.3\ldots n'.\; 1.2.3\ldots n''\ldots$ dividirt; man wird also das Gesetz der Reihe haben, in welche u entwickelt worden ist.

Es sey anfangs u irgend einer Function von $t+\alpha$, $t'+\alpha'$, $t''+\alpha''$, . . . gleich, welche wir mit $\phi(t+\alpha,\, t'+\alpha',\, t''+\alpha'',\ldots)$ bezeichnen wollen; in diesem Fall ist das ite Differenzial von u, in Bezug auf α genommen, und durch $d\alpha^i$ dividirt, augenscheinlich demselben Differenzial in Bezug auf t genommen, und durch dt^i dividirt, gleich. Die nämliche Gleichheit findet zwischen den in Beziehung auf α' und auf t', oder in Beziehung auf α'' und t'' u. s. w. genommenen Differenzialen Statt; hieraus folgt allgemein

$$\left(\frac{d^{n+n'+n''+\cdots}\,.\,u}{d\alpha^n \,.\, d\alpha'^{n'} \,.\, d\alpha''^{n''} \ldots}\right) = \left(\frac{d^{n+n'+n''+\cdots}\,u}{dt^n \,.\, dt'^{n'} \,.\, dt''^{n''} \ldots}\right).$$

Verwandelt man im zweyten Theil dieser Gleichung u in U, das heiſst in $\phi(t,\, t',\, t''\ldots)$, so erhält man nach dem Vorhergehenden

$$q_{n,\,n',\,n''\ldots} = \left\{\frac{\dfrac{d^{n+n'+n''+\cdots}\,\phi(t,\,t',\,t'',\ldots)}{dt^n \,.\, dt'^{n'} \,.\, dt''^{n''}\ldots}}{1.2.3\ldots n.\; 1.2.3\ldots n'.\; 1.2.3\ldots n''\ldots}\right\}.$$

Ist u bloſs Function von $t+\alpha$, so wird man

$$q_n = \frac{d^n\,.\,\phi(t)}{1.2.3\ldots n\,.\,dt^n}$$

haben, und folglich

$$\phi(t+\alpha) = \phi(t) + \alpha\,.\,\frac{d\,\phi(t)}{dt} + \frac{\alpha^2}{1.2}\,.\,\frac{d^2\,\phi(t)}{dt^2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3}\,.\,\frac{d^3\,\phi(t)}{dt^3} + \ldots$$

Man nehme ferner an, daſs u, anstatt unmittelbar durch α und t, wie vorher, gegeben zu seyn, durch eine Function von x gegeben ist, wo x durch die Gleichung zwischen den partiellen Differenzialen $\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = z\,.\left(\frac{dx}{dt}\right)$ gegeben ist, in welcher z irgend eine Function von x ist. Um u in eine nach den Potenzen

von α geordnete Reihe zu verwandeln, mufs man den Werth von $\left(\frac{d^n\, u}{d\alpha^n}\right)$ in dem Fall, wenn $\alpha = 0$ ist, bestimmen; man hat aber, vermöge der gegebenen Gleichung zwischen den partiellen Differenzialen,

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = z \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right),$$

und folglich [62])

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = \left(\frac{d\,.\int z'\,du}{dt}\right) \quad (k).$$

Differenziirt man diese Gleichung in Beziehung auf α, so wird man

$$\left(\frac{d^2\,.\,u}{d\alpha^2}\right) = \left(\frac{d^2\,.\int z\; du}{d\alpha\,.\,dt}\right)$$

erhalten; nun giebt aber die Gleichung (k), wenn man u in $\int z\,du$ verwandelt,

$$\left(\frac{d\,.\int z\,du}{d\alpha}\right) = \left(\frac{d\,.\int z^2\; du}{dt}\right),$$

folglich

$$\left(\frac{d^2 u}{d\alpha^2}\right) = \left(\frac{d^2\;.\int z^2\,du}{.\;dt^2}\right).$$

Differenziirt man noch einmal in Beziehung auf α, so wird man

$$\left(\frac{d^3 u}{d\alpha^3}\right) = \left(\frac{d^3\;.\int z^2\; du}{d\alpha\;.\;dt^2}\right)$$

erhalten; nun giebt aber die Gleichung (k), wenn man u in $\int z^2\,du$ verwandelt,

$$\left(\frac{d\;.\;\int z^2\; du}{d\alpha}\right) = \left(\frac{d\;\;.\int z^3\;\,du}{dt}\right),$$

folglich

$$\left(\frac{d^3 u}{d\alpha^3}\right) = \left(\frac{d^3\;.\int z^3.\,du}{dt^3}\right).$$

62) Da $\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)$ gleich $\left(\frac{du}{dt}\right)$ ist, so ist $\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = z\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{z\,du}{dt}\right)$, und wenn man also die Gröfse $z\,du$ in Beziehung auf t integrirt, und dann in Beziehung auf dieselbe Gröfse t differenziirt, wodurch zdu nicht geändert wird, so erhält man $\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = \left(\frac{d\;.\int z\,du}{dt}\right)$, wo aber das Integral $\int z\,du$ blofs in Beziehung auf t genommen werden mufs.

Verfolgt man dieses Verfahren, so kann man leicht im Allgemeinen schliessen:

$$\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right) = \left(\frac{d^n . \int z^n du}{dt^n}\right) = \left\{\frac{d^{n-1} . z^n \left(\frac{du}{dt}\right)}{dt^{n-1}}\right\}.$$

Man nehme ferner an, daſs, wenn man $\alpha = 0$ setzt, $x = T$ wird, wo T eine Function von t ist; man substituire diesen Werth von x in z und in u. Es seyen Z und U die Werthe, welche diese Gröſsen dann erhalten, so hat man für den Fall $\alpha = 0$,

$$\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right) = \frac{d^{n-1} . Z^n . \frac{dU}{dt}}{dt^{n-1}},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$q_n = \frac{d^{n-1} . Z^n . \frac{dU}{dt}}{1.2.3 \ldots n . dt^{n-1}};$$

dieses giebt

$$u = U + \alpha Z . \frac{dU}{dt} + \frac{\alpha^2}{1.2} . \frac{d.\left(Z^2 . \frac{dU}{dt}\right)}{dt} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} . \frac{d^2 . \left(Z^3 . \left(\frac{dU}{dt}\right)\right)}{dt^2} + \ldots \text{(p)}.$$

Jetzt ist nur noch die Function von t und α, welche x ausdrückt, dadurch zu bestimmen, daſs man die partielle Differenzialgleichung $\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = z \left(\frac{dx}{dt}\right)$ integrirt. Hierzu bemerken wir, daſs

$$dx = \left(\frac{dx}{dt}\right) . dt + \left(\frac{dx}{d\alpha}\right) . d\alpha.$$

Substituirt man statt $\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)$ seinen Werth $z\left(\frac{dx}{dt}\right)$, so erhält man

$$dx = \left(\frac{dx}{dt}\right) . (dt + z\,d\alpha) = \left(\frac{dx}{dt}\right) . \left[d\,(t + \alpha z) - \alpha \left(\frac{dz}{dx}\right) dx \right],$$

und folglich

$$dx = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right) . d.(t + \alpha z)}{1 + \alpha . \left(\frac{dz}{dx}\right) . \left(\frac{dx}{dt}\right)},$$

woraus man durch Integriren $x = \Phi(t + \alpha z)$ erhält [63]), wo $\Phi(t + \alpha z)$ eine willkührliche Function von $t + \alpha z$ ist, so daſs die Gröſse, welche wir T genannt haben, gleich $\Phi(t)$ ist. Der Werth von u wird also vermöge der Formel (p) durch eine nach den Potenzen von α geordnete Reihe gegeben, so oft man zwischen x und α eine Gleichung hat, welcher man die Form $x = \Phi(t + \alpha z)$ geben kann.

Man nehme nun an, daſs u eine Function der zwey veränderlichen Gröſsen x und x' ist, welche durch die partiellen Differenzialgleichungen

$$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = z \,.\, \left(\frac{dx}{dt}\right); \qquad \left(\frac{dx'}{d\alpha'}\right) = z' \,.\, \left(\frac{dx'}{dt'}\right)$$

gegeben sind, in welchen z und z' Functionen von x und x' sind. Man kann sich leicht versichern, daſs die Integrale dieser Gleichungen

$$x = \Phi(t + \alpha z); \qquad x' = \psi(t' + \alpha' z'),$$

wo $\Phi(t + \alpha z)$ und $\psi(t' + \alpha' z')$ willkührliche Functionen, die erste von $t + \alpha z$ die zweyte von $t' + \alpha' z'$, sind. Man hat überdies

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = z \,.\, \left(\frac{du}{dt}\right); \qquad \left(\frac{du}{d\alpha'}\right) = z' \,.\, \left(\frac{du}{dt'}\right).$$

Gedenkt man sich nun, daſs x' aus u und z vermittelst der Gleichung $x' = \psi(t' + \alpha' z')$ eliminirt worden ist, so werden u und z Functionen von x, α' und t' ohne α und t werden; man wird also nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right) = \left\{\frac{d^{n-1} \,.\, z^n \,.\, \left(\frac{du}{dt}\right)}{dt^{n-1}}\right\}$$

haben. Setzt man nun nach den Differenziationen $\alpha = 0$, setzt man ferner im zweyten Theil dieser Gleichung $x = \Phi(t + \alpha z^n)$ und folglich $\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = z^n \,.\, \left(\frac{du}{dt}\right)$, so erhält man in diesen Voraussetzungen

63) Die Gleichung $\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = z\left(\frac{dx}{dt}\right)$ zeigt unmittelbar, daſs man $\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) d\alpha$ aus $\left(\frac{dx}{dt}\right) dt$ erhält, wenn man in dieser letztern Gröſse dt in $zd\alpha$ verwandelt. Hieraus folgt, daſs das Integral oder die Function x die Gröſsen t und αz so enthält, daſs man diese beiden Gröſsen mit einander verwechseln kann, ohne daſs der Werth von x sich ändert. Man sieht leicht, daſs x kein Product der zwey Gröſsen t und αz enthalten, und also nur von der Form $\varphi(t + \alpha z)$ seyn kann.

$$\left(\frac{d^n u}{d\alpha^n}\right) = \left\{\frac{d^{n-1} \cdot \left(\frac{du}{d\alpha}\right)}{dt^{n-1}}\right\},$$

und folglich [64])

$$\left(\frac{d^{n+n'} \cdot u}{d\alpha^n \cdot d\alpha'^{n'}}\right) = \left\{\frac{d^{n-1} \cdot \left\{\frac{d \cdot \left(\frac{d^{n'} \cdot u}{d\alpha'^{n'}}\right)}{d\alpha}\right\}}{dt^{n-1}}\right\}.$$

Man erhält auf eine ähnliche Art

$$\left(\frac{d^{n'} \cdot u}{d\alpha'^{n'}}\right) = \left\{\frac{d^{n'-1} \left(\frac{du}{d\alpha'}\right)}{dt'^{n'-1}}\right\},$$

wenn man nach den Differenziationen $\alpha = 0$, und außerdem im zweyten Theil dieser Gleichung $x' = \psi(t' + \alpha' z'^{n'})$ setzt; man wird also

$$\left(\frac{d^{n+n'} \cdot u}{d\alpha^n \cdot d\alpha'^{n'}}\right) = \left\{\frac{d^{n+n'-2} \left(\frac{d^2 u}{d\alpha \cdot d\alpha'}\right)}{dt^{n-1} \cdot dt'^{n'-1}}\right\}$$

haben, wofern man nur nach den Differenziationen α und α' gleich Null, und überdies im zweyten Theil dieser Gleichung

$$x = \phi(t + \alpha z^n); \qquad x' = \psi(t' + \alpha' z'^{n'})$$

setzt, welches eben so viel ist, als in diesem zweyten Theile, eben so, wie im ersten,

$$x = \phi(t + \alpha z); \qquad x' = \psi(t' + \alpha' z')$$

setzen, und im partiellen Differenzial $\frac{d^2 u}{d\alpha \cdot d\alpha'}$ des zweyten Theils, z in z^n und z' in $z'^{n'}$ verwandeln. Man wird nach diesen Voraussetzungen, und wenn man überdies z in Z, z' in Z' und u in U verwandelt,

$$q_{n,n'} = \left\{\frac{d^{n+n'-2} \left(\frac{d^2 u}{d\alpha \cdot d\alpha'}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n' \cdot dt^{n-1} \cdot dt'^{n'-1}}\right\}$$

64) Man darf nur in der unmittelbar vorhergehenden Gleichung $\left(\frac{d^{n'} u}{d\alpha'^{n'}}\right)$ statt u setzen.

haben. Verfolgt man diese Schlufsreihe, so kann man leicht schliefsen, dafs, wenn man die folgenden r Gleichungen hat:

$$x = \Phi\,(t + \alpha z);$$
$$x' = \psi\,(t' + \alpha' z');$$
$$x'' = \Pi\,(t'' + \alpha'' z'');$$
etc.

wo z, z', z'' . . . Functionen von x, x', x'' . . . sind, wenn man u als Function derselben veränderlichen Gröfsen annimmt, allgemein haben wird

$$q_{n,n',n''\ldots} = \left\{\frac{d^{n+n'+n''+\ldots-r}.\left(\dfrac{d^r u}{d\alpha\,.\,d\alpha'\,.\,d\alpha''\ldots}\right)}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots n'.1.2.3\ldots n''\ldots dt^{n-1}.dt'^{n'-1}.dt''^{n''-1}\ldots}\right\},$$

wofern man nur im partiellen Differenzial $\left(\dfrac{d^r u}{d\alpha\,.\,d\alpha'\,.\,d\alpha''\ldots}\right)$, z in z^n, z' in $z'^{n'}$ u. s. w., und alsdann z in Z, z' in Z', z'' in Z'' und u in U verwandelt.

Wenn man nur eine veränderliche Gröfse x hat, so wird man

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = z\,.\left(\frac{du}{dt}\right),$$

und folglich

$$q_n = \frac{d^{n-1}.\left[Z^n.\left(\dfrac{dU}{dt}\right)\right]}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n\,.\,dt^{n-1}}$$

haben. Wenn man zwey veränderliche Gröfsen x und x' hat, so wird man

$$\left(\frac{du}{d\alpha}\right) = z\,.\left(\frac{du}{dt}\right)$$

haben; differenziirt man diese Gleichung in Beziehung auf α', so erhält man

$$\left(\frac{d^2u}{d\alpha\,.\,d\alpha'}\right) = \left(\frac{dz}{d\alpha'}\right).\left(\frac{du}{dt}\right) + z\,.\left(\frac{d^2u}{d\alpha'\,.\,dt}\right);$$

man hat aber $\dfrac{du}{d\alpha'} = z'\,.\left(\dfrac{du}{dt'}\right)$, und, wenn man in dieser Gleichung u in z verwandelt, $\left(\dfrac{dz}{d\alpha'}\right) = z'\,.\left(\dfrac{dz}{dt'}\right)$; folglich

$\left(\dfrac{d^2u}{d\alpha\,.\,d\alpha'}\right)$

$$\left(\frac{d^2u}{d\alpha\,.\,d\alpha'}\right) = z\,.\left\{\frac{d\,.\,z'\,.\left(\frac{du}{dt'}\right)}{dt}\right\} + z'\,.\left(\frac{dz}{dt'}\right).\left(\frac{du}{dt}\right).$$

Setzt man im zweyten Theil dieser Gleichung α und α' gleich Null, und verwandelt man z in Z^n, z' in $Z'^{n'}$ und u in U, so wird man den Werth von $\left(\frac{d^2u}{d\alpha\,.\,d\alpha'}\right)$ in denselben Voraussetzungen erhalten; dieses giebt [65])

$$q_{n,\,n'} = \frac{d^{n+n'-2}\,.\left\{\begin{array}{l} Z^n\,.\,Z'^{n'}\,.\left(\frac{d^2U}{dt\,.\,dt'}\right) + Z'^{n'}\,.\left(\frac{d\,.\,Z^n}{dt'}\right).\left(\frac{dU}{dt}\right) \\ + Z^n\,.\left(\frac{d\,.\,Z'^{n'}}{dt}\right).\left(\frac{dU}{dt'}\right)\end{array}\right\}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n\,.\,dt^{n-1}\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n'\,.\,dt'^{n'-1}}.$$

Fährt man so fort, so wird man den Werth von $q_{n,\,n',\,n''}\ldots$ für jede Anzahl veränderlicher Gröſsen erhalten.

Ob wir schon vorausgesetzt haben, daſs u, z, z', z'' . . . Functionen von x, x', x'' . . . ohne t, t', t'' . . . sind, so kann man doch annehmen, daſs sie diese letztern veränderlichen Gröſsen enthalten; bezeichnet man aber alsdann diese veränderlichen Gröſsen in denselben mit $t_{,}$, $t_{,}'$, $t_{,}''$, r . . . so muſs man $t_{,}$, $t_{,}'$, $t_{,}''$. . . . in den Differenziationen als beständig ansehen, und nach diesen Operationen wieder t, t' . . statt $t_{,}$, $t_{,}'$. . . setzen.

22. Wir wollen nun diese Resultate auf die elliptische Bewegung der Planeten anwenden. Hierzu wollen wir die Gleichung (f) des 20sten Satzes wieder vornehmen. Vergleicht man die Gleichung $nt = u - e \sin u$ oder $u = nt + e \sin u$ mit der $x = \phi\,(t + \alpha z)$, so verwandelt sich

x	t	α	z	$\phi\,(t + \alpha z)$
in u	in nt	in e	in $\sin u$	in $nt + e\,.\sin u$

65) Man hat, wenn man wirklich differenziirt, $\left[\frac{d\,.\,z'\left(\frac{du}{dt'}\right)}{dt}\right] = \left(\frac{dz'}{dt}\right).\left(\frac{du}{dt'}\right) + z'\left(\frac{d^2u}{dt\,.\,dt'}\right).$

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung für $\left(\frac{d^2u}{dx\,.\,dx'}\right)$, so erhält man

$$\left(\frac{d^2u}{dx\,.\,dx'}\right) = zz'\,.\left(\frac{d^2u}{dt\,.\,dt'}\right) + z\left(\frac{dz'}{dt}\right)\,.\,\left(\frac{du}{dt'}\right) + z'\left(\frac{dz}{dt'}\right)\,.\,\left(\frac{du}{dt}\right).$$

Verwandelt man nun z in Z^n, z' in $Z'^{n'}$, u in U, so erhält man den Werth von $q_{n,\,n'}$.

die Formel (p) des vorhergehenden Satzes wird sich also in folgende verwandeln [66]):

$$\psi(u) = \psi(nt) + e \,.\, \psi'(nt) \,.\, \sin nt + \frac{e^2}{1 \,.\, 2} \,.\, \frac{d\,[\psi'(nt) \,.\, \sin nt^2]}{n dt}$$

$$+ \frac{e^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, \frac{d^2\,[\psi'(nt) \,.\, \sin nt^3]}{n^2\, dt^2} + \text{etc.} \quad (q);$$

wo $\psi'(nt)$ gleich $\frac{d \,.\, \psi(nt)}{n dt}$ ist. Wir bemerken zur Entwickelung dieser Formel, daſs, wenn c die Zahl ist, deren hyperbolischer Logarithme gleich 1 ist,

$$\sin nt^i = \left(\frac{c^{nt\sqrt{-1}} - c^{-nt\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^i; \quad \cos nt^i = \left(\frac{c^{nt\sqrt{-1}} + c^{-nt\sqrt{-1}}}{2}\right)^i,$$

für jeden Werth von i ist. Entwickelt man die zweyten Theile dieser Gleichungen, und substituirt dann statt $c^{rnt\sqrt{-1}}$ und statt $c^{-rnt\sqrt{-1}}$ ihre Werthe $\cos rnt + \sqrt{-1} \,.\, \sin rnt$ und $\cos rnt - \sqrt{-1} \,.\, \sin rnt$, wo r jeden Werth haben kann, so wird man die Potenzen i des $\sin nt$ und $\cos nt$ in Sinus und Kosinus des Winkels nt und seiner Vielfachen entwickelt erhalten; dieses vorausgesetzt, wird man folgendes finden [67]):

$$\sin nt + \frac{e}{1 \,.\, 2} \sin nt^2 + \frac{e^2}{1.2.3} \sin nt^3 + \frac{e^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \,.\, \sin nt^4 + \text{etc.}$$

$$= \sin nt - \frac{e}{1 \,.\, 2 \,.\, 2} \,.\, (\cos 2\,nt - 1)$$

$$- \frac{e^2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 2^2} \,.\, (\sin 3\,nt - 3 \sin nt)$$

$$+ \frac{e^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 2^3} \,.\, \left(\cos 4\,nt - 4 \cos 2\,nt + \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2}\right)$$

$$+ \frac{e^4}{1.2.3.4.5 \,.\, 2^4} \,.\, \left(\sin 5\,nt - 5 \sin 3\,nt + \frac{5 \,.\, 4}{1 \,.\, 2} \sin nt\right)$$

$$- \frac{e^5}{1.2.3.4.5.6 \,.\, 2^5} \,.\, \left(\cos 6\,nt - 6 \cos 4\,nt + \frac{6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2} \cos 2\,nt - \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{6.5.4}{1.2.3}\right)$$

$$+ \text{etc.}$$

66) Man erhält Z aus z, wenn man u in U verwandelt; folglich ist in dem hier gegebenen Fall $Z = \sin U$; nun ist ferner U der Werth von u, wenn α, das heiſst hier e, gleich Null ist, also U gleich nt und Z gleich $\sin nt$.

67) Man findet Potenzen der Sinus durch Kosinus und Sinus der Vielfachen des gegebenen Winkels ausgedrückt in Traité du Calcul diff. et int. par Lacroix Tom. I. p. 74. §. 43; in Euleri Introductio in Analysin infinit. T. I. p. 198 §. 234. in Lamberts Zusätzen z. d. trigon. Tafeln pag. 141.

Es sey diese Function gleich P; man multiplicire sie mit $\psi'(nt)$ und differenziire jedes seiner Glieder in Beziehung auf t eben so vielmal, als die Potenz von e, in welche es multiplicirt ist, anzeigt, wobey man dt beständig setzen muſs; man differenziire diese Differenziale durch die zugehörenden Potenzen von ndt; die Summe dieser so differenziirten Differenziale sey P', so wird die Formel (q) sich in folgende verwandeln:

$$\psi(u) = \psi(nt) + e \,.\, P'.$$

Man wird leicht durch diese Methode die Werthe des Winkels u und der Sinus und Kosinus dieses Winkels und seiner Vielfachen erhalten. Setzt man z. B. $\psi(u) = \sin iu$, so wird $\psi'(nt) = i \,.\, \cos int$ seyn. Man wird den vorhergehenden Werth von P mit $i \,.\, \cos int$ multipliciren, und dieses Product in Sinus und Kosinus des Winkels nt und seiner Vielfachen entwickeln. Die mit den geraden Potenzen von e multiplicirten Glieder von e werden Sinus, die mit den ungeraden Potenzen multiplicirten werden Kosinus seyn. Man wird ferner jedes Glied von der Form $K \,.\, e^{2r} \,.\, \sin snt$ in $\pm K \,.\, e^{2r} \,.\, s^{2r} \,.\, \sin snt$ verwandeln, wo das Zeichen $+$ Statt hat, wenn r gerade ist, und das Zeichen $-$, wenn r ungerade ist [68]). Man wird eben so jedes Glied von der Form $K \,.\, e^{2r+1} \,.\, \cos snt$ in $\mp K \,.\, e^{2r+1} \,.\, s^{2r+1} \,.\, \sin snt$ verwandeln, wo das Zeichen $-$ für gerade r, das Zeichen $+$ für ungerade r Statt hat. Die Summe aller dieser Glieder wird der Werth von P' seyn, und man wird

$$\sin iu = \sin int + e \,.\, P'$$

haben. Setzt man $\psi(u) = u$, so wird man $\psi'(nt) = 1$ haben, und man wird

$$\begin{aligned} u = nt + e \,.\, \sin nt + \frac{e^2}{1.2.2}\, 2 \,.\, \sin 2nt + \frac{e^3}{1.2.3.2^2} \,.\, (3^2 \sin 3nt - 3 \sin nt) \\ + \frac{e^4}{1.2.3.4.2^3} \,.\, (4^3 \,.\, \sin 4nt - 4 \,.\, 2^3 \sin 2nt) \\ + \frac{e^5}{1.2.3.4.5.2^4} \,.\left(5^4 \sin 5nt - 5.3^4 \sin 3nt + \frac{5.4}{1.2} \sin nt\right) \\ + \text{etc.} \end{aligned}$$

68) Es ist nämlich $\frac{d \,.\, \sin snt}{ndt} = + s \cos snt$ und $\frac{d^2 \,.\, \sin snt}{n^2\, dt^2} = + \frac{s \,.\, d \,.\, \cos snt}{ndt} = - s^2 \,.\, \sin snt$, daraus folgt $\frac{d^4 \,.\, \sin snt}{n^4\, dt^4} = - \frac{d^2 \,.\, s^2 \sin snt}{n^2\, dt} = + s^4 \,.\, \sin snt$; eben so findet man $\frac{d^6 \,.\, \sin snt}{n^6\, dt^6} = - s^6 \,.\, \sin snt$, und man sieht leicht, daſs man für das $2r$te Differenzial den im Text gegebenen Ausdruck findet.

finden. Diese Reihe ist für die Planeten sehr convergirend. Hat man so für jede gegebene Zeit u bestimmt, so wird man daraus vermittelst der Gleichungen (f) des 20sten Satzes die zugehörigen Werthe von r und von u erhalten; man kann aber diese letztern Größen directe durch convergirende Reihen auf folgende Art finden.

Hierzu bemerken wir, daſs man nach dem 20sten Satze $r = a(1 - e\cos u)$ hat; setzt man nun in der Formel (q), $\psi(u) = 1 - e \cos u$, so wird man $\psi'(nt) = e \sin nt$ haben, und folglich

$$1 - e \cos u = 1 - e\cos nt + e^2 \sin nt^2 + \frac{e^3}{1.2} \cdot \frac{d.\sin nt^3}{ndt} + \frac{e^4}{1.2.3} \cdot \frac{d^2.\sin nt^4}{n^2 dt^2} + \text{etc.}$$

Man wird also nach der vorhergehenden Analysis folgende Reihe erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - e\cos nt - \frac{e^2}{2}\cos 2nt \\
&- \frac{e^3}{1.2.2^2} \cdot (3 . \cos 3nt - 3 . \cos nt) \\
&- \frac{e^4}{1.2.3.2^3} \cdot (4^2 . \cos 4nt - 4 . 2^2 . \cos 2nt) \\
&- \frac{e^5}{1.2.3.4.2^4} \cdot \left(5^3 . \cos 5nt - 5 . 3^3 . \cos 3nt + \frac{5.4}{1.2} \cos nt\right) \\
&- \frac{e^6}{1.2.3.4.5.2^5} \cdot \left(6^4 . \cos 6nt - 6 . 4^4 . \cos 4nt + \frac{6.5}{1.2} . 2^4 . \cos 2nt\right) \\
&- \text{etc.}\end{aligned}$$

Wir wollen nun die dritte der Gleichungen (f) des 20sten Satzes betrachten; sie giebt

$$\frac{\sin \frac{1}{2} v}{\cos \frac{1}{2} v} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} u}{\cos \frac{1}{2} u}.$$

Substituirt man in dieser Gleichung statt der Sinus und Kosinus ihre Werthe in imaginären Exponentialgrößen, so wird man

$$\frac{c^{v\sqrt{-1}} - 1}{c^{v\sqrt{-1}} + 1} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \left[\frac{c^{u\sqrt{-1}} - 1}{c^{u\sqrt{-1}} + 1}\right]$$

erhalten; setzt man also

$$\lambda = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

so erhält man

$$c^{v\sqrt{-1}} = c^{u\sqrt{-1}} \cdot \left[\frac{1 - \lambda \cdot c^{-u\sqrt{-1}}}{1 - \lambda \cdot c^{u\sqrt{-1}}}\right],$$

und folglich

$$v = u + \frac{\log\,(1 - \lambda\, c^{-u\sqrt{-1}}) - \log\,(1 - \lambda \cdot c^{u\sqrt{-1}})}{\sqrt{-1}},$$

woraus man, wenn man die Logarithmen in Reihen verwandelt,

$$v = u + 2\lambda \cdot \sin u + \frac{2\lambda^2}{2} \cdot \sin 2u + \frac{2\lambda^3}{3} \cdot \sin 3u + \frac{2\lambda^4}{4} \cdot \sin 4u + \ldots$$

erhält. Man wird nach dem Vorhergehenden u, $\sin u$, $\sin 2u$ u. s. w. durch Reihen erhalten, welche nach den Potenzen von e geordnet, und in Sinus und Kosinus des Winkels nt und seiner Vielfachen entwickelt sind [69]). Um also v durch eine ähnliche Reihe zu erhalten, braucht man nur die Potenzen von λ in Reihen, welche nach den Potenzen von e geordnet sind, zu entwickeln.

Die Gleichung $u = 2 - \frac{e^2}{u}$ wird nach der Formel (p) des vorgehenden Satzes folgende Gleichung geben [70]):

69) Man erhält nämlich für $\sin iu$ folgenden Ausdruck:

$$\sin iu = \sin int + \frac{i \cdot e}{2}\,[\sin\,(i+1)\,nt - \sin\,(i-1)\,nt]$$

$$+ \frac{e^2 \cdot i}{1 \cdot 2 \cdot 2^2}\,[(i+2)\sin\,(i+2)\,nt - 2\,i \cdot \sin int + (i-2)\sin\,(i-2)\,nt]$$

$$+ \frac{e^3 \cdot i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} \cdot [(i+3)^2 \sin\,(i+3)\,nt - 3\,(i+1)^2 \sin\,(i+1)\,nt + 3\,(i-1)^2 \sin\,(i-1)\,nt - (i-3)^2 \sin\,(i-3)\,nt]$$

$$+ \text{etc.}$$

$$+ \frac{e^m \cdot i}{1 \cdot 2 \ldots m \cdot 2^m}\left[(i+m)^{m-1} \sin(i+m)nt - \frac{m}{1}(i+m-2)^{m-1} \sin(i+m-2)nt + \frac{m\,(m-1)}{1 \cdot 2} \cdot (i+m-4)^{m-1} \sin(i+m-4)\,nt - \ldots\right]$$

$$+ \text{etc.}$$

70) Die quadratische Gleichung $x = 2 - \frac{e^2}{x}$ hat die zwey Wurzeln $x = 1 + \sqrt{1 - e^2}$ und $x = 1 - \sqrt{1 - e^2} = \frac{e^2}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$. Die erste Wurzel giebt $x^{-1} = \frac{\lambda}{e}$, die zweyte $x = e\lambda$. Will man also λ^i erhalten, so muſs man nach der ersten Wurzel die Potenz x^{-i} suchen, nach der

$$\frac{1}{u^i} = \frac{1}{2^i} + \frac{i \cdot e^2}{2^{i+2}} + \frac{i \cdot (i+3)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{e^4}{2^{i+4}} + \frac{i \cdot (i+4) \cdot (i+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot} \cdot \frac{e^6}{2^{i+6}} + \ldots$$

und da man $u = 1 + \sqrt{1 - e^2}$ hat, so wird man

$$\lambda^i = \frac{e^i}{2^i} \cdot \left[1 + i \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{i \cdot (i+3)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{i \cdot (i+4) \cdot (i+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{e}{2}\right)^6 \ldots\right]$$

erhalten. Dieses vorausgesetzt, erhält man folgende Gleichung, wenn man die Annäherung bis zu den Gröſsen der Ordnung e^7, inclusive, treibt:

$$v = nt + \left(2e - \frac{1}{4} e^3 + \frac{5}{96} e^5\right) \sin nt + \left(\frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4 - \frac{17}{192} e^6\right) \sin 2nt$$
$$\left(\frac{13}{12} e^3 - \frac{43}{64} e^5\right) \sin 3nt + \left(\frac{103}{96} e^4 - \frac{451}{480} e^6\right) \cdot \sin 4nt$$
$$+ \frac{1097}{960} e^5 \cdot \sin 5nt + \frac{1223}{960} \cdot e^6 \cdot \sin 6nt$$ [71]).

zweyten die Potenz x^i. Da man aber in diesem zweyten Fall x^i mit e^{-i} multipliciren muſs, um λ^i zu erhalten, so sieht man, daſs die Reihe für λ^i negative Potenzen von e enthalten, und folglich divergent seyn wird. Man muſs sich also der ersten Wurzel bedienen, und vermittelst der Gleichung $x = 2 - \frac{e^2}{x}$ die Potenz x^{-i} durch die Formel (p) suchen. Das dortige u ist also hier x^{-i}; x auch hier x; der Werth von x nämlich $\varphi(t + \alpha z)$ ist hier $2 - \frac{e^2}{x}$, also $t = 2$; $z = x^{-1}$ und $\alpha = -e^2$. Setzt man $\alpha = 0$, so verwandelt sich x in T; hier ist also $T = 2$; dieser Werth von T in z und u substituirt, giebt $Z = 2^{-1}$ und $U = 2^{-i}$. Man lasse der Differenziationen wegen während der Rechnung statt der Zahl 2 den Buchstaben t, so erhält man folgende Vergleichung:

in der Formel (p) . . .	U	$\frac{dU}{dt}$	Z	α
ist hier . . .	t^{-i}	$-i t^{-i-1}$	t^{-1}	$-e^2$

woraus man sogleich für x^{-i} den im Text für u^{-i} gegebenen Werth findet, und daraus

$$\lambda^i = \left(\frac{e}{2}\right)^i + i \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^{i+2} + \frac{i(i+3)}{1 \cdot 2}\left(\frac{e}{2}\right)^{i+4} + \frac{i(i+4)(i+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot}\left(\frac{e}{2}\right)^{i+6} + \frac{i(i+5)(i+6)(i+7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot}\left(\frac{e}{2}\right)^{i+8}$$
$$+ \frac{i(i+6)(i+7)(i+8)(i+9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\left(\frac{e}{2}\right)^{i+10} + \text{etc.}$$

71) Die Berechnung des Werths von v ist etwas weitläuftig; einige zur Erleichterung dieser Substitutionen dienende Bemerkungen werden daher hier erlaubt seyn. Die Gleichung

$$\tfrac{1}{2} v = \tfrac{1}{2} u + \lambda \sin u + \frac{\lambda^2}{2} \sin 2u \ldots + \frac{\lambda^i}{i} \sin iu + \ldots$$

Die Winkel v und nt sind hier von der Sonnennähe gezählt; will man diese Winkel von der Sonnenferne an zählen, so ist klar, daſs es hinreicht, e in den vorhergehenden Ausdrücken von r und von v negativ zu nehmen. Es würde

kann man kürzer so bezeichnen: $\frac{1}{2} v = \frac{1}{2} u + \Sigma \frac{\lambda^i}{i} \sin iu$, wo statt i alle ganze positive Zahlen von 1 bis ∞ gesetzt werden müssen. Setzt man nun $\frac{e}{2}$ gleich ι, und bezeichnet man die Binomialkoefficienten nach Hrn. Prof. Hindenburgs Art mit $\overset{m}{\mathfrak{A}}$, $\overset{m}{\mathfrak{B}}$, $\overset{m}{\mathfrak{C}}$, $\overset{m}{\mathfrak{D}} \ldots$ wo $\overset{m}{\mathfrak{A}} = \frac{m}{1}$, $\overset{m}{\mathfrak{B}} = \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2}$, $\overset{m}{\mathfrak{C}} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ etc. ist; so giebt die vorige Gleichung für u, wenn man die Glieder sammelt, welche in $\sin nt$, in $\sin 2nt$, in $\sin 3nt$ etc. multiplicirt sind, folgende:

$$\frac{1}{2} u = \frac{1}{2} nt + \left(\iota - \frac{\overset{3}{\mathfrak{A}}}{1.2.3} \iota^3 + \frac{\overset{5}{\mathfrak{B}}}{1.2.3.4.5} \iota^5 - \frac{\overset{7}{\mathfrak{C}}}{1.2\ldots7} \iota^7 + \frac{\overset{9}{\mathfrak{D}}}{1.2\ldots9} \iota^9 - \ldots \right) . \sin nt$$
$$+ \left(\frac{2^1}{1.2} \iota^2 - \frac{2^3 . \overset{4}{\mathfrak{A}}}{1.2.3.4} \iota^4 + \frac{2^5 . \overset{6}{\mathfrak{B}}}{1.2\ldots6} \iota^6 - \frac{2^7 . \overset{8}{\mathfrak{C}}}{1.2\ldots8} \iota^8 + \ldots \right) . \sin 2nt$$
$$+ \left(\frac{3^2}{1.2.3} \iota^3 - \frac{3^4 . \overset{5}{\mathfrak{A}}}{1.2\ldots5} \iota^5 + \frac{3^6 . \overset{7}{\mathfrak{B}}}{1.2\ldots7} \iota^7 - \frac{3^8 . \overset{9}{\mathfrak{C}}}{1.2\ldots9} \iota^9 + \ldots \right) . \sin 3nt$$
$$+ \text{ etc.}$$

Das Gesetz dieser Reihe ist sehr sichtbar, und man kann sie daher so weit man will fortsetzen.

Multiplicirt man den in der vorhergehenden Anmerkung gegebenen Werth von $\sin iu$ mit $\frac{e^i}{i}$, schreibt man jedes Glied rückwärts und setzt man statt $\frac{e}{2}$ die Gröſse ι, so erhält man

$$\frac{\iota^i}{i} . \sin iu = \frac{\iota^i}{i} \sin int + \iota^{i+1} [- \sin (i-1)\, nt + \sin (i+1)\, nt]$$
$$+ \frac{\iota^{i+2}}{1.2} [+ (i-2) \sin (i-2)\, nt - 2\, i \,.\, (\sin int + (i+2) \sin (i+2)\, nt]$$
$$+ \frac{\iota^{i+3}}{1.2.3} [-(i-3)^2 \sin (i-3)\, nt + 3 (i-1)^2 \sin (i-1) nt - 3\, (i+1)^2 \sin (i+1)\, nt + (i+3)^2 \sin (i+3)\, nt]$$
$$+ \frac{\iota^{i+4}}{1.2.3.4} [+(i-4)^3 \sin (i-4) nt - 4 (i-2)^3 \sin (i-2) nt + 6\, i^2 \,.\, \sin int - 4(i+2)^3 \sin (i+2)\, nt + \text{etc.}]$$
$$+ \frac{\iota^{i+5}}{1.2.3.4.5} [-(i-5)^4 \sin (i-5) nt + 5 (i-3)^4 \sin (i-3) nt - 10 (i-1)^4 \sin (i-1) nt + \text{etc.}]$$
$$+ \text{ etc.}$$

In dieser Reihe muſs man statt i alle ganze positive Zahlen setzen, und dann die Glieder, welche in $\sin nt$, in $\sin 2nt$, in $\sin 3nt$ etc. multiplicirt sind, sammeln. Man muſs hierbey beobachten, daſs z. B. das Glied $- 4\, (i-2)^3 \sin (i-2)\, nt$, wenn $i = 1$ ist, folgendes Glied giebt:

$$+ 4 . \sin (- nt), \text{ welches gleich } - 4 \sin nt \text{ ist.}$$

auch hinreichend seyn, den Winkel nt in diesen Ausdrücken um den halben Umkreis zu vermehren, wodurch die Sinus und Kosinus der ungeraden Vielfachen

Man erhält so folgende Glieder, welche in sin nt multiplicirt sind:

1) aus der Voraussetzung $i = 1$

$$+ 1\,\iota - \frac{1}{2}\iota^3 + \frac{1}{12}\iota^5 - \frac{1}{144}\iota^7 + \frac{1}{2880}\iota^9 - \ldots$$

2) aus der Voraussetzung $i = 2$

$$- 1\,\iota^3 + \frac{2}{3}\iota^5 - \frac{1}{8}\iota^7 + \frac{1}{90}\iota^9 - \ldots$$

3) aus der Voraussetzung $i = 3$

$$+ \frac{1}{2}\iota^5 - \frac{1}{8}\iota^7 + \frac{1}{80}\iota^9 - \ldots$$

4) aus der Voraussetzung $i = 4$

$$- \frac{1}{6}\iota^7 + \frac{1}{20}\iota^9 - \ldots$$

5) aus der Voraussetzung $i = 5$

$$+ \frac{1}{24}\iota^9 - \ldots$$

Diese Glieder mufs man nun mit $\frac{\lambda^t}{\iota^i}$ d. h. mit $1 + i\,\iota^2 + \frac{i.(i+3)}{1.2}\iota^4 + \frac{i.(i+4).(i+5)}{1.2.3.}\iota^6 + \ldots$ multipliciren. Diese Reihe hat folgende Werthe:

für $i = 1$; $1 + 1.\iota^2 + 2.\iota^4 + 5\,\iota^6 + 14\,\iota^8 \; . \; . \; .$ (1)

für $i = 2$; $1 + 2.\iota^2 + 5.\iota^4 + 14\,\iota^6 + \; . \; . \; .$ (2)

für $i = 3$; $1 + 3.\iota^2 + 9.\iota^4 + \; . \; . \; .$ (3)

für $i = 4$; $1 + 4.\iota^2 + 14.\iota^4 + \; . \; . \; .$ (4)

für $i = 5$; $1 + 5.\iota^2 + 20.\iota^4 + \; . \; . \; .$ (5).

Multiplicirt man die aus der Voraussetzung $i = 1$ entsprungenen Glieder mit der Reihe (1); die aus der Voraussetzung $i = 2$ entsprungenen Glieder mit der Reihe (2) u. s. w., so erhält man alle Glieder, welche in sin nt multiplicirt sind. Man wird bey diesen Multiplicationen die Glieder, wo die Potenz von ι die 9te übersteigt, weglassen. Man erhält so

$$\iota - \frac{1}{2}\iota^3 + \frac{9}{12}\iota^5 + \frac{215}{144}\iota^7 + 4\,\frac{913}{2880}\iota^9 \; . \; . \; .$$ der Koefficient von sin nt im

Werth von $\frac{1}{2}u$ ist $\iota - \frac{1}{2}\iota^3 + \frac{1}{12}\iota^5 - \frac{1}{144}\iota^7 + \frac{1}{2880}\iota^9$

und ihre Summe $2\iota - \iota^3 + \frac{5}{6}\iota^5 + \frac{107}{72}\iota^7 + 4\,\frac{457}{1440}\iota^9$.

Dies stimmt mit dem von Hrn. Cagnoli in seinem traité de trigonométrie sphérique et rectil. §. 771. pag. 381 gegebenen Werthe überein. Man findet denselben Werth auch in Lalande's Astronomie §. 3484. dritte Ausg.

Die Berechnung der Koeffizienten von sin 2 nt, sin 3 nt, etc. wird nun keine Schwierigkeit haben.

fachen von nt negativ werden. Da nun die Resultate beider Methoden identisch seyn müssen, so müssen in den Ausdrücken von r und von v die Sinus und Kosinus der ungeraden Vielfachen von nt in die ungeraden Potenzen von e, und die der geraden Vielfachen dieses Winkels in die geraden Potenzen von e multiplicirt seyn [72]). Dieses bestätigt in der That a posteriori die vorhergehende Rechnung.

Nimmt man für den Anfangspunkt des Winkels v, anstatt ihn von der Sonnennähe zu zählen, irgend einen andern Punkt an, so ist klar, dafs dieser Winkel um eine beständige Gröfse, welche wir mit ϖ bezeichnen wollen, und welche die Länge der Sonnennähe ausdrücken wird, vermehrt seyn werde. Nimmt man für den Anfang von t, statt der Zeit des Durchgangs durch die Sonnennähe, irgend eine andere gegebene Zeit an, so wird der Winkel nt um eine beständige Gröfse, welche wir mit $\varepsilon - \varpi$ bezeichnen wollen, vermehrt werden, und die vorhergehenden Ausdrücke von $\frac{r}{a}$ und von v werden sich so in folgende verwandeln:

$$\frac{r}{a} = 1 + \tfrac{1}{2}e^2 - (e - \tfrac{3}{8}e^3)\cos(nt + \varepsilon - \varpi) - (\tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{3}e^4)\cos 2(nt + \varepsilon - \varpi) - \text{etc.}$$

$$v = nt + \varepsilon + (2e - \tfrac{1}{4}e^3)\sin(nt + \varepsilon - \varpi) + (\tfrac{5}{4}e^2 - \tfrac{11}{24}e^4)\sin 2(nt + \varepsilon - \varpi) + \text{etc.}$$

wo v die wahre Länge des Planeten und $nt + \varepsilon$ seine mittlere Länge ist, und beide Längen in der Ebene der Bahn gezählt werden.

Wir wollen nun die Bewegung des Planeten auf eine unveränderliche, gegen seine Bahn wenig geneigte, Ebene beziehen. Es sey ϕ die gegenseitige Neigung der beiden Ebenen, und θ die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn auf der festen Ebene gezählt; es sey β dieselbe Länge auf der Ebene der Bahn gezählt, so dafs θ die Projection von β ist; es sey endlich $v_{,}$ die Projection von v auf der festen Ebene, so wird man

$$\operatorname{tang}(v_{,} - \theta) = \cos\phi \,.\, \operatorname{tang}(v - \beta)$$

erhalten. Diese Gleichung giebt $v_{,}$ durch v und umgekehrt; man kann aber diese beiden Winkel, einen durch den andern, durch sehr convergirende Reihen auf folgende Art erhalten.

72) Diese Bemerkung des Hrn. Verfassers ist Hrn. Cagnoli (traité de trigonométrie § 372) entgangen; durch sie erhält erst das Verfahren des Hrn. Cagnoli vollkommene Schärfe.

Man hat vorher die Reihe

$$\tfrac{1}{2} v = \tfrac{1}{2} u + \lambda . \sin u + \frac{\lambda^2}{2} . \sin 2u + \frac{\lambda^3}{3} . \sin 3u + \ldots$$

aus der Gleichung

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} . \text{ tang } \tfrac{1}{2} u$$

geschlossen, indem man

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - 1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} + 1}$$

setzte. Verwandelt man nun $\frac{1}{2} v$ in $v, - \theta$; $\frac{1}{2} u$ in $v - \beta$ und $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ in $\cos \phi$ [73]), so wird man

$$\lambda = \frac{\cos \phi - 1}{\cos \phi + 1} = - \text{tang } \tfrac{1}{2} \phi^2$$

erhalten; die Gleichung zwischen $\frac{1}{2} v$ und $\frac{1}{2} u$ wird sich in die Gleichung zwischen $v, - \theta$ und $v - \beta$ verwandeln, und die vorige Reihe giebt

$$v, - \theta = v - \beta - \text{tang } \tfrac{1}{2} \phi^2 . \sin 2 (v - \beta) + \tfrac{1}{2} \text{tang } \tfrac{1}{2} \phi^4 . \sin 4 (v - \beta)$$
$$- \tfrac{1}{3} \text{tang } \tfrac{1}{2} \phi^6 . \sin 6 (v - \beta) + \ldots$$

Verwandelt man in der Gleichung zwischen $\frac{1}{2} v$ und $\frac{1}{2} u$, $\frac{1}{2} v$ in $v - \beta$,

73) Da $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ gröſser als die Einheit, und der Bogen φ folglich unmöglich zu werden scheint, so kann man zweifeln, ob es erlaubt ist, $\cos \varphi$ statt $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ zu setzen. Diese Vergleichung wird offenbar Statt finden, wenn e eine negative Gröſse ist. Nun ist zwar in astronomischer Rücksicht e eine positive Gröſse, allein die Art, wie die Gleichung $\frac{1}{2} v = \frac{1}{2} u + \lambda \sin u +$ etc. aus der Gleichung $\text{tang } \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} . \text{ tang } \frac{u}{2}$ hergeleitet worden ist, ist vom Werth der Gröſse e unabhängig; man kann also, wenn man aus der ähnlichen Gleichung $\text{tang } (v, - \theta) = \cos \varphi . \text{ tang } (v - \beta)$ eine ähnliche Reihe für $v, - \theta$ herleiten will, e negativ setzen, und dann die Gröſse $\cos \varphi$ mit der Gröſse $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ vergleichen.

$\frac{1}{2}u$ in $v_, - \theta$ und $\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$ in $\frac{1}{\cos\Phi}$, so wird man

$$\lambda = \tang \tfrac{1}{2}\Phi^2,$$

und

$$v - \beta = v_, - \theta + \tang \tfrac{1}{2}\Phi^2 . \sin 2(v_, - \theta) + \tfrac{1}{2} \tang \tfrac{1}{2}\Phi^4 . \sin 4(v_, - \theta) + \tfrac{1}{3} \tang \tfrac{1}{2}\Phi^6 . \sin 6(v_, - \theta) + \ldots$$

erhalten. Man sieht, daſs die zwey vorhergehenden Reihen sich gegenseitig eine in die andere verwandeln, wenn man das Zeichen von $\tang \frac{1}{2}\Phi^2$ ändert, und die Winkel $v_, - \theta$ und $v - \beta$ mit einander verwechselt. Man wird $v_, - \theta$ durch eine Function von Sinus und Kosinus des Winkels nt und seiner Vielfachen erhalten, wenn man bemerkt, daſs man nach dem Vorhergehenden

$$v = nt + \varepsilon + eQ$$

hat, wo Q eine Function der Sinus des Winkels $nt + \varepsilon - \varpi$ und seiner Vielfachen ist, und daſs die Formel (i) des 21sten Satzes für jeden Werth von i,

$$\sin i(v - \beta) = \sin i(nt + \varepsilon - \beta + eQ)$$

$$= \left[1 - \frac{i^2 . e^2 . Q^2}{1 . 2} + \frac{i^4 . e^4 . Q^4}{1.2.3.4} - \ldots\right] . \sin i(nt + \varepsilon - \beta)$$

$$+ \left[ieQ - \frac{i^3 . e^3 . Q^3}{1.2.3} + \frac{i^5 . e^5 . Q^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right] . \cos i(nt + \varepsilon - \beta)$$

giebt. Es sey endlich s die Tangente der Breite des Planeten über die feste Ebene, so hat man

$$s = \tang \Phi . \sin(v_, - \theta),$$

und wenn man den auf die feste Ebene projicirten Radius vector $r_,$ nennt, so wird man

$$r_, = r(1 + s^2)^{-\frac{1}{2}} = r . (1 - \tfrac{1}{2}s^2 + \tfrac{3}{8}s^4 - \ldots)$$

haben; man wird also $v_,$, s und $r_,$ durch convergirende Reihen der Sinus und Kosinus des Winkels nt und seiner Vielfachen bestimmen können.

23. Wir wollen nun die sehr eccentrischen Bahnen, wie z. B. die der Kometen sind, betrachten, und hierzu die Gleichungen des 20sten Satzes wieder vornehmen:

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\,.\cos v}$$

$$nt = u - e\,.\sin u$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u.$$

Bey sehr eccentrischen Bahnen ist e sehr wenig von der Einheit verschieden; wir werden also $1 - e = \alpha$ setzen, wo α sehr klein ist. Nennt man D den kleinsten Abstand des Kometen von der Sonne, so hat man $D = a\,(1-e) = \alpha a$; dadurch verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck von r in folgenden:

$$r = \frac{(2-\alpha)\,D}{2\cos\tfrac{1}{2}v^2 - \alpha\,.\cos v} = \frac{D}{\cos\tfrac{1}{2}v^2\left(1 + \frac{\alpha}{2-\alpha}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^2\right)}$$

welcher, in eine Reihe verwandelt, folgende Gleichung giebt:

$$r = \frac{D}{\cos\tfrac{1}{2}v^2}\,.\left[1 - \frac{\alpha}{2-\alpha}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^2 + \left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^2.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^4 - \ldots\right].$$

Um das Verhältniſs von v zur Zeit t zu haben, bemerken wir, daſs der Ausdruck des Bogens durch die Tangente

$$u = 2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u\,(1 - \tfrac{1}{3}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{5}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u^4 - \ldots)$$

giebt; man hat aber

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u = \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\,.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v,$$

folglich

$$u = 2\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\,.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v\,.\left[1 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right).\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^2.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^3 - \ldots\right].$$

Man hat ferner

$$\sin u = \frac{2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u}{1 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}u^2} = 2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u\,.\,(1 - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}u^2 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}u^4 - \ldots),$$

woraus man folgende Gleichung erhält:

$$e.\sin u = 2(1-\alpha).\sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}.\text{tang}\tfrac{1}{2}v.\left[1 - \frac{\alpha}{2-\alpha}.\text{tang}\tfrac{1}{2}v^2 + \left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^2.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^4 - \ldots\right].$$

Substituirt man diese Werthe von u und von $e\,.\sin u$ in die Gleichung $nt = u - e\,.\sin u$, so wird man die Zeit t durch eine Function der Anomalie v vermittelst einer sehr convergirenden Reihe erhalten; wir bemerken aber,

ehe wir diese Substitution vornehmen, daſs man nach dem 20sten Satze $n = a^{-\frac{3}{2}} . \sqrt{\mu}$ hat, und da $D = aa$ ist, so wird man

$$\frac{1}{n} = \frac{D^{\frac{3}{2}}}{\alpha^{\frac{3}{2}} . \sqrt{\mu}}$$

haben. Dieses vorausgesetzt, wird man

$$t = \frac{2 . D^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(2-\alpha).\mu}} .\text{tang}\tfrac{1}{2}v. \left[1 + \frac{(\frac{2}{3}-\alpha)}{2-\alpha} .\text{tang}\tfrac{1}{2}v^2 - \frac{(\frac{4}{5}-\alpha)\,\alpha}{(2-\alpha)^2} . \text{tang}\tfrac{1}{2}v^4 + \ldots\right]$$

finden. Ist die Bahn parabolisch, so hat man $\alpha = 0$, und folglich

$$r = \frac{D}{\cos . \frac{1}{2}v^2}$$

$$t = \frac{D^{\frac{3}{2}} . \sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} . (\text{tang}\ \tfrac{1}{2}v + \tfrac{1}{3}\,\text{tang}\ \tfrac{1}{2}v^3).$$

Die Zeit t, der Abstand D und die Summe μ der Massen der Sonne und des Kometen sind heterogene Gröſsen, welche, um vergleichbar zu seyn, durch die Einheiten ihrer Gattung dividirt werden müssen. Wir werden also annehmen, daſs die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde die Einheit der Abstände ist, daſs also D in Theilen dieser Entfernung ausgedrückt ist. Wir bemerken ferner, daſs, wenn T die Zeit eines Syderalumlaufs der Erde ist, deren Bewegung wir von der Sonnennähe anfangen lassen, daſs man in der Gleichung $nt = u - e . \sin u$, $u = 0$ im Anfang des Umlaufs und $u = 2\pi$ am Ende haben wird, wo π der halbe Umkreis für den Halbmesser Eins ist; man wird also $nT = 2\pi$ haben; nun ist aber $n = a^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\mu} = \sqrt{\mu}$ weil $a = 1$ ist; folglich

$$\sqrt{\mu} = \frac{2\pi}{T}.$$

Der Werth von μ ist nicht genau für die Erde und für den Kometen der nämliche, weil er im ersten Fall die Summe der Massen der Sonne und der Erde, im zweyten hingegen die Summe der Massen der Sonne und des Kometen ausdrückt. Da aber die Massen der Erde und des Kometen viel kleiner als die der Sonne sind, so kann man sie vernachläſsigen und annehmen, daſs μ für alle diese Körper denselben Werth hat und die Masse der Sonne ausdrückt.

Substituirt man also statt $\sqrt{\mu}$ seinen Werth $\frac{2\pi}{T}$ in den vorhergehenden Ausdruck für t, so wird man folgende Gleichung erhalten:

$$t = \frac{D^{\frac{3}{2}} \,.\, T}{\pi \sqrt{2}} \,.\, (\text{tang } \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \text{ tang } \tfrac{1}{2} v^3).$$

Diese Gleichung enthält jetzt bloſs vergleichbare Gröſsen; sie wird leicht t geben, wenn v bekannt ist; um aber v vermittelst t zu haben, muſs man eine Gleichung des dritten Grades auflöſen, welche nur eine reelle Wurzel hat. Man kann diese Auflösung ersparen, wenn man eine Tafel für die Werthe von v berechnet, welche den Zeiten t in der Parabel, deren kleinster Abstand von der Sonne der Einheit oder der mittlern Entfernung der Erde von der Sonne gleich ist, entsprechen. Diese Tafel wird die Zeit geben, welche der Anomalie v in irgend einer andern Parabel, deren kleinster Abstand von der Sonne gleich D ist, entspricht, wenn man die Zeit, welche derselben Anomalie in der Tafel zugehört, mit $D^{\frac{3}{2}}$ multiplicirt. Man wird umgekehrt die der Zeit t zugehörende Anomalie v erhalten, wenn man t durch $D^{\frac{3}{2}}$ dividirt, und in der Tafel die Anomalie sucht, welche diesem Quotienten zugehört.

Wir wollen nun annehmen, daſs man die Anomalie v sucht, welche der Zeit t in einer sehr eccentrischen Ellipse entspricht. Vernachläſsigt man die Gröſsen von der Ordnung α^2, und setzt man $(1 - e)$ anstatt α, so wird der vorhergehende Ausdruck von t durch v, in der Ellipse, folgende Gleichung geben [74]):

$$t = \frac{D^{\frac{3}{2}} \,.\, \sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} \,.\, \left[\begin{array}{l} \text{tang } \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \text{ tang } \tfrac{1}{2} v^3 \\ + (1 - e) \,.\, \text{tang } \tfrac{1}{2} v \,.\, (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4} \text{ tang } \tfrac{1}{2} v^2 - \tfrac{1}{5} \text{ tang } \tfrac{1}{2} v^4) \end{array}\right].$$

74) Die Gleichung für die Zeit t in der Ellipse ist

$$t = \frac{2 D^{\frac{3}{2}} \text{ tang } \frac{1}{2} v}{\sqrt{\mu}} \,.\, [(2 - \alpha)^{-\frac{1}{2}} + (\tfrac{2}{3} - \alpha)(2 - \alpha)^{-\frac{3}{2}} \text{ tang } \tfrac{1}{2} v^2 - (\tfrac{4}{5} - \alpha)(2 - \alpha)^{-\frac{5}{2}} \alpha \,.\, \text{tang } \tfrac{1}{2} v^4 + \ldots].$$

Vernachlässigt man nun die Quadrate und höhern Potenzen von α, so ist nach dem binomischen Lehrsatz $(2 - \alpha)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \,.\, 2^{-\frac{3}{2}} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha}{4\sqrt{2}}$; ferner $(2 - \alpha)^{-\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \,.\, 2^{-\frac{5}{2}}$ $= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3\alpha}{8\sqrt{2}}$, und wenn man diese Gröſse mit $\frac{2}{3} - \alpha$ multiplicirt, so ist das Product gleich $\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{\alpha}{4\sqrt{2}}$. Da endlich tang $\frac{1}{2} v^4$ schon in α multiplicirt ist, so kann man von den übrigen zwey Factoren nur die beständigen Gröſsen $\frac{4}{5}$ und $2^{-\frac{5}{2}}$ behalten; das Product aller drey Factoren ist $\frac{1}{5\sqrt{2}}$. Setzt man nun den gemeinschaftlichen Divisor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ auſserhalb der Klammern, so verwandelt sich

Man suche in der Tafel für die Bewegung der Kometen die Anomalie, welche der Zeit t in einer Parabel, deren kleinster Abstand von der Sonne D wäre, entspricht; es sey diese Anomalie U und $U + x$ die wahre Anomalie, welche eben dieser Zeit in der Ellipse entspricht, wo x ein sehr kleiner Winkel seyn wird. Setzt man in der vorhergehenden Gleichung $U + x$ statt v, und entwickelt man den zweyten Theil in eine nach den Potenzen von x geordnete Reihe, so erhält man, wenn man die Quadrate von x und die Producte von x in $(1 - e)$ vernachlässigt [75],

$$t = \frac{D^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} (\tang \tfrac{1}{2} U + \tfrac{1}{3} \tang \tfrac{1}{2} U^3) + \dfrac{x}{2 \cos \tfrac{1}{2} U^4} \\ + \left(\dfrac{1 - e}{4}\right) \cdot \tang \tfrac{1}{2} U \cdot (1 - \tang \tfrac{1}{2} U^2 - \tfrac{4}{5} \tang \tfrac{1}{2} U^4) \end{array} \right\};$$

man hat aber der Voraussetzung gemäfs

$$t = \frac{D^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} \cdot (\tang \tfrac{1}{2} U + \tfrac{1}{3} \tang \tfrac{1}{2} U^3),$$

folglich, wenn man statt des kleinen Bogens x seinen Sinus substituirt [76],

die vorige Gleichung in folgende:

$$t = \frac{D^{\frac{3}{2}} \cdot \tang \tfrac{1}{2} v}{\sqrt{\mu}} \cdot \sqrt{2} \left[1 + \frac{\alpha}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\alpha\right) \tang \tfrac{1}{2} v^2 - \frac{1}{10} \alpha \tang \tfrac{1}{2} v^4 \right],$$

$$\text{oder } t = \frac{D^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} \left[\tang \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \tang \tfrac{1}{2} v^3 + \alpha \tang \tfrac{1}{2} v \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \tang \tfrac{1}{2} v - \frac{1}{5} \tang \tfrac{1}{2} v^3 \right) \right].$$

75) Die Gröfse $\tang \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \tang \frac{1}{2} v^3$ wird $\tang \frac{1}{2} U + \frac{1}{3} \tang \frac{1}{2} U^3$, wenn man U statt v setzt; das Differenzial der letztern Gröfse ist

$$\frac{\frac{1}{2} dU}{\cos \frac{1}{2} U^2} (1 + \tang \tfrac{1}{2} U^2) \text{ oder } \frac{\frac{1}{2} \cdot dU}{\cos \frac{1}{2} U^4}.$$

Dies ist der Zuwachs der gegebenen Gröfse, wenn U um dU zunimmt. Da man die Quadrate und höhern Potenzen von x wegläfst, so sieht man x als unendlich klein an, und man darf also nur x statt dU setzen, um die Aenderung zu erhalten, welche die obige Gröfse erfährt, wenn man $U + x$ statt U setzt. Die Gröfse $\tang \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \tang \frac{1}{2} v^3$ verwandelt sich also in

$$\tang \tfrac{1}{2} U + \tfrac{1}{3} \tang \tfrac{1}{2} U^3 + \frac{x}{2 \cos \frac{1}{2} U^4},$$

wenn man $U + x$ statt v setzt.

In dem Theil der Gleichung für t, welcher in $1 - e$ multiplicirt ist, kann man unmittelbar blofs U statt v setzen. Die Gröfsen, die man dadurch vernachlässigt, sind offenbar in x multiplicirt; und da sie schon in $(1 - e)$ multiplicirt sind, so darf man sie der Voraussetzung gemäfs vernachlässigen.

76) Man hat nämlich

$$0 = \frac{x}{2 \cos \frac{1}{2} U^4} + \left(\frac{1 - e}{4}\right) \cdot \tang \tfrac{1}{2} U \, (1 - \tang \tfrac{1}{2} U^2 - \tfrac{4}{5} \tang \tfrac{1}{2} U^4),$$

$$\sin x = \tfrac{1}{10}(1-e)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}U\,.\,(4 - 3\cos\tfrac{1}{2}U^2 - 6\cos\tfrac{1}{2}U^4).$$

Berechnet man also eine Tafel für die Logarithmen der Gröfse

$$\tfrac{1}{10}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}U\,.\,(4 - 3\cos\tfrac{1}{2}U^2 - 6\cos\tfrac{1}{2}U^4),$$

so darf man zu ihnen nur den Logarithmen von $(1-e)$ addiren, um den von $\sin x$ zu erhalten. Man wird so die Verbesserung erhalten, welche man an der in der Parabel berechneten Anomalie U anbringen mufs, um die einer sehr eccentrischen Ellipse entsprechende Anomalie zu erhalten.

24. Wir haben nur noch die Bewegung in einer hyperbolischen Bahn zu betrachten. Hierzu bemerken wir, dafs in der Hyperbel die halbe grofse Axe a negativ wird, und dafs die Eccentricität e die Einheit übertrifft. Setzt man also in den Gleichungen f des 20sten Satzes $a = -a'$ und $u = \frac{u'}{\sqrt{-1}}$, und substituirt man statt der Sinus und Kosinus ihre Werthe in imaginären Exponentialgröfsen, so wird die erste dieser Gleichungen

$$\frac{t\sqrt{\mu}}{a'^{\frac{3}{2}}} = \frac{e}{2}\,.\,(c^{u'} - c^{-u'}) - u'$$

ge-

setzt man statt des kleinen Bogens x seinen Sinus, und multiplicirt man mit $2\cos\frac{1}{2}U^4$, so erhält man

$$\sin x = \frac{1}{10}(1-e)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}U\,(-5\cos\tfrac{1}{2}U^4 + 5\sin\tfrac{1}{2}U^2\,.\,\cos\tfrac{1}{2}U^2 + 4\sin\tfrac{1}{2}U^4).$$

Quadrirt man die Gleichung $1 = \cos\frac{1}{2}U^2 + \sin\frac{1}{2}U^2$, und multiplicirt man mit 4, so erhält man $+4\sin\frac{1}{2}U^2 = +4 - 4\cos\frac{1}{2}U^4 - 8\cos\frac{1}{2}U^2\,.\,\sin\frac{1}{2}U^2$. Substituirt man diesen Werth in die obige in Klammern eingeschlossene Gröfse, so wird sie
$+4 - 9\cos\frac{1}{2}U^4 - 3\cos\frac{1}{2}U^2\,.\,\sin\frac{1}{2}U^2$, welche gleich
$+4 - 6\cos\frac{1}{2}U^4 - 3\cos\frac{1}{2}U^2\,[\cos\frac{1}{2}U^2 + \sin\frac{1}{2}U^2]$, oder gleich
$+4 - 6\cos\frac{1}{2}U^4 - 3\cdot\cos\frac{1}{2}U^2$ ist. Man kann der obigen Gleichung noch folgende Gestalt geben:

$$\sin x = \frac{1}{10}(1-e)\left(4\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}U - 3\sin U - \frac{3}{4}\sin 2U\right),$$

welche Formel man ohne Logarithmen berechnen kann. Von der Gröfse, welche in $(1-e)$ multiplicirt ist, nämlich

$$\frac{1}{10}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}U\,[4 - 3\cos\tfrac{1}{2}U^2 - 6\cos\tfrac{1}{2}U^4]$$

findet man die Logarithmen in der fünften der Tafeln, welche Hr. von Zach in dem Anhang zu Hrn. D. Olbers Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Kometen aus einigen Beobachtungen zu bestimmen, gegeben hat. Wir werden weiter unten sehen, dafs diese Tafel auch für die Hyperbel gebraucht werden kann.

geben; die zweyte wird sich in folgende verwandeln:

$$r = a' \left[\tfrac{1}{2} e \left(c^{u'} + c^{-u'} \right) - 1 \right].$$

Wenn man endlich das Wurzelzeichen der dritten Gleichung gehörig nimmt, so dafs v mit t und folglich mit u' wächst, so erhält man

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \cdot \left(\frac{c^{u'} - 1}{c^{u'} + 1} \right).$$

Wir wollen in diesen Formeln $u' = \log \operatorname{tang} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \varpi \right)$ setzen, wo π der halbe Umkreis für den Halbmesser Eins, und der Logarithme ein hyperbolischer ist, so wird man folgende Gleichungen erhalten [77]):

$$\frac{t \sqrt{\mu}}{a'^{\frac{3}{2}}} = e \cdot \operatorname{tang} \varpi - \log \operatorname{tang} \left(\tfrac{1}{4} \pi + \tfrac{1}{2} \varpi \right)$$

$$r = a' \left(\frac{e}{\cos \varpi} - 1 \right)$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \varpi.$$

Der Bogen $\frac{t \sqrt{\mu}}{a'^{\frac{3}{2}}}$ ist die mittlere Winkelbewegung des Körpers m während der Zeit t, wenn man annimmt, dafs er sich kreisförmig um M in der Entfernung a' bewegt. Dieser Bogen ist leicht zu bestimmen, wenn man ihn in Theilen des Halbmessers ausdrückt: die erste der vorhergehenden Gleichungen wird dann durch Versuche den der Zeit t entsprechenden Werth des Winkels ϖ, und die beiden übrigen werden hernach die zugehörigen Werthe von r und von v geben [78]).

77) Dann ist $c^{u'}$ gleich $\operatorname{tang} \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \varpi \right)$ und $c^{-u'} = \cot \left(\frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \varpi \right)$; zu den übrigen Verwandlungen brauche man die Formeln in Lamberts Zusätzen zu den logarithmischen und trigonom. Tafeln pag. 140 Tab. XX. Form. 37. 38. 39. oder Cagnoli traité de trigonométrie Tab. II. Form. 8. u. Tab. I. F. 28 u. 43.

78) Wenn die Eccentricität e sehr wenig von der Einheit verschieden, und folglich $(1 - e)$ eine sehr kleine Gröfse ist, so berechne man die der Zeit t entsprechende Anomalie in einer Parabel, deren kleinster Abstand von der Sonne D mit dem der Hyperbel gleich grofs genommen wird. Es sey diese Anomalie U, so findet man die der Zeit t in der Hyperbel entsprechende Anomalie $U - x$, wenn man x durch folgende Formel berechnet:

$$\sin x = \tfrac{1}{10} (e - 1) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} U \left(4 - 3 \cos \tfrac{1}{2} U^2 - 6 \cos \tfrac{1}{2} U^4 \right)$$

oder $\sin x = \frac{1}{10} (e - 1) \left(4 \operatorname{tang} \frac{1}{2} U - 3 \sin U - \frac{3}{4} \sin 2 U \right)$,

welche Formeln schon vorher bey der Ellipse gebraucht worden sind.

25. Drückt T den Sideralumlauf eines Planeten aus, dessen mittlere Entfernung von der Sonne gleich a ist, so wird die erste der Gleichungen (f) des 20sten Satzes $nT = 2\pi$ geben; man hat aber nach dem nämlichen Satz $\frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} = n$, folglich

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}.$$

Vernachlässigt man die Masse des Planeten in Vergleichung mit der Masse der Sonne, so wird μ die Masse dieses Gestirns ausdrücken, und diese Gröfse wird für alle Planeten dieselbe seyn; da man nun für einen zweyten Planeten, dessen mittlere Entfernung von der Sonne und Sideralumlaufszeit durch a' und T' bezeichnet werden,

$$T' = \frac{2\pi \, . \, a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$$

hat, so wird man

$$T^2 : T'^2 = a^3 : a'^3$$

haben, d. h. die Quadrate der Umlaufszeiten der verschiedenen Planeten verhalten sich wie die Würfel der grofsen Axen ihrer Bahnen, welches eins der von Kepler entdeckten Gesetze ist. Man sieht aus der vorhergehenden Analysis, dafs dieses Gesetz nicht vollkommen genau ist, und dafs es nur in so fern Statt hat, als man die Wirkung der Planeten auf einander und auf die Sonne vernachlässigt.

Nimmt man zum Maafs der Zeit die mittlere Bewegung der Erde und als Einheit der Entfernungen ihre mittlere Entfernung von der Sonne an, so wird in diesem Fall $T = 2\pi$ und $a = 1$ seyn; der vorhergehende Ausdruck von T wird dann $\mu = 1$ geben, woraus folgt, dafs man dann die Masse der Sonne als Einheit der Massen annehmen mufs. Man kann also in der Theorie der Planeten und Kometen $\mu = 1$ setzen und für die Einheit der Entfernungen die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne annehmen; dann wird aber die Zeit t durch den zugehörigen Bogen der Sideralbewegung der Erde gemessen.

Die Gleichung

$$T = \frac{2\pi \, . \, a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}$$

verschafft ein sehr einfaches Mittel, die Verhältnisse der Massen der Planeten, welche Satelliten haben, zu der Masse der Sonne zu bestimmen. Bezeichnet nämlich M die Masse der Sonne, so wird man, wenn man die Masse m des Planeten im Vergleich mit M vernachlässigt,

$$T = \frac{2\pi \, . \, a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}}$$

haben. Betrachtet man hernach einen Satelliten irgend eines Planeten m'; bezeichnet man die Masse dieses Satelliten durch p, seine mittlere Entfernung vom Mittelpunkt von m' durch h, und die Zeit seines Sideralumlaufs durch τ, so wird man

$$\tau = \frac{2\pi \, . \, h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m' + p}},$$

und folglich

$$\frac{m' + p}{M} = \left(\frac{h}{a}\right)^3 \cdot \left(\frac{T}{\tau}\right)^2$$

haben. Diese Gleichung giebt das Verhältnifs der Summe der Massen des Planeten m' und seines Satelliten zur Masse der Sonne. Vernachlässigt man nun die Masse des Satelliten, oder setzt man das Verhältnifs der Massen als bekannt voraus, so wird man das Verhältnifs der Masse des Planeten zu der Masse der Sonne erhalten. Wir werden, wenn wir die Theorie der Planeten abhandeln werden, die Werthe der Massen von denjenigen geben, um welche man Satelliten beobachtet hat.

Viertes Kapitel.

Bestimmung der Elemente der elliptischen Bewegung.

26. Nachdem wir die allgemeine Theorie der elliptischen Bewegung und die Art, sie durch convergirende Reihen in den beiden Fällen der Natur, in fast kreisförmigen und sehr länglichten Bahnen, zu berechnen, erklärt haben, so müssen wir nur noch die Elemente dieser Bahnen bestimmen. Wenn die Umstände der ursprünglichen Bewegungen der Himmelskörper gegeben wären, so würde man leicht diese Elemente daraus herleiten können. Denn wenn man V die Geschwindigkeit von m in seiner relativen Bewegung um M nennt, so wird man

$$V^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

haben, und die letzte der Gleichungen (P) des 18ten Satzes wird

$$V^2 = \mu \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

geben. Wir werden, um μ aus dieser Gleichung wegzuschaffen, die Geschwindigkeit, welche m haben würde, wenn er um M einen Kreis beschriebe, dessen Halbmesser der Einheit der Entfernungen gleich wäre, mit U bezeichnen. In dieser Voraussetzung wird man $r = a = 1$ und folglich $U^2 = \mu$ haben; also

$$V^2 = U^2 \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Diese Gleichung wird die halbe große Axe a der Bahn vermittelst der ursprünglichen Geschwindigkeit von m und vermittelst seines ursprünglichen Abstandes von M geben. In der Ellipse ist a positiv, unendlich in der Parabel und

negativ in der Hyperbel; die von m beschriebene Bahn ist also eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel, je nachdem V kleiner, gleich oder gröſser als $U \cdot \sqrt{\frac{2}{r}}$ ist. Es ist bemerkenswerth, daſs die Richtung der ursprünglichen Bewegung gar keinen Einfluſs auf die Gattung des Kegelschnitts hat.

Zur Bestimmung der Eccentricität der Bahn bemerken wir, daſs man $\frac{dr^2}{dt^2} = V^2 \cdot \cos \varepsilon^2$ hat, wenn ε den Winkel bezeichnet, welchen die Richtung der relativen Bewegung von m mit dem Radius vector r macht. Substituirt man statt V^2 seinen Werth $\mu \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$, so erhält man

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \mu \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \cdot \cos \varepsilon^2;$$

man hat aber nach dem 19ten Satze

$$2\mu r - \frac{\mu r^2}{a} - \frac{r^2 dr^2}{dt^2} = \mu a (1 - e^2),$$

folglich

$$a(1 - e^2) = r^2 \cdot \sin \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

woraus man die Eccentricität ae der Bahn erkennen wird. Die Gleichung der Kegelschnitte $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos v}$ giebt

$$\cos v = \frac{a(1 - e^2) - r}{er}.$$

Man wird hieraus den Winkel v, welchen der Radius vector mit dem kleinsten Abstand von der Sonne macht, und folglich die Lage der Sonnennähe finden. Aus den Gleichungen (f) des 20sten Satzes wird man dann den Winkel u, und vermittelst desselben die Zeit des Durchgangs durch die Sonnennähe erhalten.

Um die Lage der Bahn in Beziehung auf eine feste, durch den Mittelpunkt von M gehende, Ebene zu bestimmen, welchen Mittelpunkt wir als unbeweglich annehmen, sey ϕ die Neigung der Bahn gegen diese Ebene, und β der Winkel, welchen der Radius r mit der Knotenlinie macht; es sey überdies z die ursprüngliche Erhöhung von m über der festen Ebene, welche wir als bekannt annehmen, so wird man

$$r \,.\, \sin\beta \,.\, \sin\phi = z$$

haben, so daſs die Neigung ϕ der Bahn bekannt seyn wird, wenn man β bestimmt hat. Wir nennen hierzu λ den Winkel, welchen die ursprüngliche Richtung der relativen Bewegung von m mit der festen Ebene macht, welchen Winkel wir als bekannt annehmen werden; betrachtet man dann das Dreyeck, welches die bis zur Knotenlinie verlängerte Richtung der Bewegung der Radius vector r und die Knotenlinie bilden; nennt man l die Seite dieses Dreyecks, welche dem Winkel β gegenüber steht, so wird man

$$l = \frac{r \,.\, \sin\beta}{\sin(\beta + \varepsilon)}$$

haben; man hat ferner $\frac{z}{l} = \sin\lambda$, folglich

$$\tang\beta = \frac{z \,.\, \sin\varepsilon}{r \,.\, \sin\lambda - z \,.\, \cos\varepsilon}.$$

Die Elemente der Planetenbahn sind durch diese Formeln in Functionen der Koordinaten r und z, der Geschwindigkeit des Planeten und der Richtung seiner Bewegung, bestimmt. Man kann aber die Variationen dieser Elemente, welche angenommenen Aenderungen in der Geschwindigkeit und in ihrer Richtung entsprechen, bestimmen, und man wird leicht durch die Methoden, welche wir in der Folge geben werden, die Differenzialänderungen dieser Elemente, welche aus den perturbirenden Kräften entspringen, bestimmen können.

Wir wollen nun die Gleichung $V^2 = U^2 \,.\, \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ wieder vornehmen. Im Kreise hat man $a = r$ und folglich $V = U \,.\, \sqrt{\frac{1}{r}}$; die Geschwindigkeiten der Planeten in verschiedenen Kreisen verhalten sich wie die Quadratwurzeln ihrer Halbmesser.

In der Parabel ist $a = \infty$, folglich $V = U \,.\, \sqrt{\frac{2}{r}}$; die Geschwindigkeiten verhalten sich also in den verschiedenen Punkten der Bahn verkehrt wie die Quadratwurzeln der Radius vectors, und die Geschwindigkeit verhält sich in jedem Punkt zu der, welche der Planet haben würde, wenn er einen Kreis mit einem dem Radius vector r gleichen Halbmesser beschriebe, wie $\sqrt{2} : 1$.

Eine unendlich abgeplattete Ellipse verwandelt sich in eine gerade Linie, und in diesem Fall drückt V die Geschwindigkeit von m aus, wenn er in gerader Linie gegen M fiele. Man nehme an, daſs m vom Zustand der Ruhe sich zu bewegen anfängt, und daſs seine ursprüngliche Entfernung von M gleich r sey; man nehme ferner an, daſs er die Geschwindigkeit V' erlangt hat, wenn er in die Entfernung r' gekommen ist; der vorhergehende Ausdruck der Geschwindigkeit wird dann folgende zwey Gleichungen geben:

$$o = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}; \quad V'^2 = U^2 \,.\, \left(\frac{2}{r'} - \frac{1}{a}\right).$$

Hieraus erhält man

$$V' = U \,.\, \sqrt{\frac{2\,(r - r')}{r r'}},$$

welches der Ausdruck der von m erlangten relativen Geschwindigkeit ist, wenn dieser Körper in der Entfernung r sich zu bewegen angefangen und gegen M um die Höhe $r - r'$ gefallen ist. Durch diese Formel wird man leicht bestimmen, von welcher Höhe der Körper m, der sich in einem Kegelschnitt bewegt, gegen M fallen muſs, damit er, wenn er am Ende des Halbmessers r sich zu bewegen anfängt, eine relative Geschwindigkeit erlangt habe, welche derjenigen, die er wirklich in diesem Punkte hat, gleich ist; ist nämlich diese letztere Geschwindigkeit gleich V, so hat man

$$V^2 = U^2 \,.\, \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Das Quadrat der Geschwindigkeit, welche der Körper erlangt, wenn er um die Höhe $r - r'$ fällt, ist $2\,U^2 \,.\, \frac{(r - r')}{r\,r'}$; sezt man beide Ausdrücke einander gleich, so erhält man

$$r - r' = \frac{r\,(2\,a - r)}{4\,a - r}.$$

Im Kreise hat man $a = r$ und alsdann $r - r' = \frac{1}{3}\,r$; in der Ellipse hat man $r - r' < \frac{1}{2}\,r$; da in der Parabel a unendlich ist, so hat man $r - r' = \frac{1}{2}\,r$ und in der Hyperbel, wo a negativ ist, hat man $r - r' > \frac{1}{2}\,r$.

27. Die Gleichung $o = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \mu \,.\, \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ ist merkwürdig, weil sie die Geschwindigkeit unabhängig von der Eccentricität der

Bahn giebt. Sie ist in einer allgemeinern Gleichung enthalten, welche zwischen der groſsen Axe der Bahn, der Chorde des elliptischen Bogens, der Summe der beiden äuſsersten Radius vectors und der Zeit, welche diesen Bogen zu beschreiben gebraucht wurde, vorhanden ist. Wir werden, um auf diese letztere Gleichung zu gelangen, die im 20sten Satz gegebenen Gleichungen der elliptischen Bewegung wieder vornehmen. Setzt man daselbst, der mehreren Einfachheit wegen, $\mu = 1$, so verwandeln sich diese Gleichungen in folgende:

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\,.\cos v}$$

$$r = a\,(1 - e\,.\,\cos u)$$

$$t = a^{\frac{3}{2}}\,.\,(u - e\,.\,\sin u).$$

Man nehme an, daſs r, v, u und t dem ersten Endpunkt des elliptischen Bogens und r', v', u' und t' dem zweyten Endpunkt desselben entsprechen, so erhält man

$$r' = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\,.\,\cos v'}$$

$$r' = a\,(1 - e\,.\cos u')$$

$$t' = a^{\frac{3}{2}}\,.\,(u' - e\,.\,\sin u').$$

Es sey

$$t' - t = \tau; \quad \frac{u' - u}{2} = \beta; \quad \frac{u' + u}{2} = \beta'; \quad r' + r = R.$$

Zieht man den Werth von t von dem von t' ab und bemerkt man, daſs

$$\sin u' - \sin u = 2\,.\sin\beta\,.\cos\beta',$$

so erhält man

$$\tau = 2\,a^{\frac{3}{2}}\,.\,(\beta - e\,.\,\sin\beta\,.\cos\beta').$$

Addirt man die beiden Ausdrücke für r und r' zu einander und bemerkt man, daſs

$$\cos u' + \cos u = 2\,.\,\cos\beta\,.\,\cos\beta'$$

ist, so erhält man

$$R = 2\,a\,(1 - e\,.\,\cos\beta\,.\,\cos\beta').$$

Es sey nun c die Chorde des elliptischen Bogens, so hat man

$$c^2 = r^2 + r'^2 - 2\,rr'\,.\,\cos\,(v - v').$$

Aus den beiden Gleichungen

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\,.\cos v}; \quad r = a\,(1 - e\,.\cos u)$$

er-

erhält man aber folgende

$$\cos v = \frac{a(\cos u - e)}{r}; \qquad \sin v = \frac{a\sqrt{1-e^2}\,.\,\sin u}{r}.$$

Man erhält auf eben diese Art

$$\cos v' = \frac{a(\cos u' - e)}{r'}; \qquad \sin v' = \frac{a\sqrt{1-e^2}\,.\,\sin u'}{r'};$$

man wird also

$$rr'\,.\,\cos(v - v') = a^2\,(e - \cos u)\,(e - \cos u') + a^2\,(1 - e^2)\,.\,\sin u\,.\,\sin u'$$

haben, und folglich

$$c^2 = 2a^2\,(1 - e^2)\,(1 - \sin u\,.\,\sin u' - \cos u\,.\,\cos u') + a^2 e^2\,(\cos u - \cos u')^2.$$

Nun ist aber

$$\sin u\,.\,\sin u' + \cos u\,.\,\cos u' = 2\cos\beta^2 - 1$$
$$\cos u - \cos u' = 2\sin\beta\,.\,\sin\beta',$$

folglich

$$c^2 = 4a^2\,.\,\sin\beta^2\,.\,(1 - e^2\,.\,\cos\beta'^2).$$

Man hat also die drey folgenden Gleichungen:

$$R = 2a\,.\,(1 - e\,.\,\cos\beta\,.\,\cos\beta')$$
$$\tau = 2a^{\frac{3}{2}}\,.\,(\beta - e\,.\,\sin\beta\,.\,\cos\beta')$$
$$c^2 = 4a^2\,.\,\sin\beta^2\,.\,(1 - e^2\,.\,\cos\beta'^2).$$

Die erste dieser Gleichungen giebt

$$e\,.\,\cos\beta' = \frac{2a - R}{2a\,.\,\cos\beta}.$$

Substituirt man diesen Werth von $e\,.\,\cos\beta'$ in die beiden andern Gleichungen, so erhält man

$$\tau = 2a^{\frac{3}{2}}\,.\left[\beta + \left(\frac{R - 2a}{2a}\right).\,\mathrm{tang}\,\beta\right]$$
$$c^2 = 4a^2\,.\,\mathrm{tang}\,\beta^2\,.\left[\cos\beta^2 - \left(\frac{2a - R}{2a}\right)^2\right].$$

Diese beiden Gleichungen enthalten nur die Eccentricität e, und wenn man in der erstern statt β seinen durch die zweyte Gleichung gegebenen Werth setzt, so wird man τ in Function von c, R und a erhalten. Man sieht also, daſs die Zeit τ nur von der halben groſsen Axe, von der Chorde c, und von der Summe R der beiden äuſsersten Halbmesser abhängt.

Setzt man

$$z = \frac{2a - R + c}{2a}; \qquad z' = \frac{2a - R - c}{2a},$$

so wird die letzte der vorhergehenden Gleichungen folgende geben [79]):

$$\cos 2\beta = zz' + \sqrt{(1 - zz) \, . \, (1 - z'z')};$$

hieraus erhält man

$$2\beta = \text{arc} \, . \, \cos z' - \text{arc} \, . \, \cos z,$$

wo arc . cos z den Bogen bezeichnet, welcher z zum Kosinus hat; man hat also [80])

$$\text{tang}\, \beta = \frac{\sin\,(\text{arc} \, . \, \cos z') - \sin\,(\text{arc} \, . \, \cos z)}{z + z'};$$

man hat ferner $z + z' = \frac{2a - R}{a}$; bemerkt man noch, daſs man nach dem 16ten Satz $T = 2\pi$ hat, wenn T die Sideralumlaufszeit der Erde ist, deren mittlere Entfernung von der Sonne zur Einheit angenommen worden, so wird der Ausdruck für τ sich in folgenden verwandeln [81]):

79) Man setze in der Gleichung für c^2 statt tang β^2 und cos β^2 ihre Werthe $\frac{1 - \cos 2\beta}{1 + \cos 2\beta}$ und $\frac{1 + \cos 2\beta}{2}$, so erhält man folgende quadratische Gleichung:

$$\cos 2\beta^2 - 2\left[\left(\frac{2a - R}{2a}\right)^2 - \left(\frac{c}{2a}\right)^2\right] \cos 2\beta = 1 - 2\left[\left(\frac{2a - R}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{2a}\right)^2\right],$$

welche sich durch die bekannten Eigenschaften der Differenzen und Summen der Quadrate, und wenn man die Gröſsen z und z' substituirt, in folgende verwandelt:

$$\cos 2\beta^2 - 2zz' \cos 2\beta = 1 - z'^2 - z^2,$$

woraus man cos 2β ohne Schwürigkeit erhält.

80) Bekanntlich ist $\text{tang}\, \beta^2 = \frac{1 - \cos 2\beta}{1 + \cos 2\beta} = \frac{1 - \sqrt{(1 - zz)\,(1 - z'z')} - zz'}{1 + zz' + \sqrt{(1 - zz)\,(1 - z'z')}}$. Man multiplicire, um die Wurzelgröſse des Divisors wegzuschaffen, Zähler und Nenner mit $1 + zz' - \sqrt{(1 - zz)\,(1 - z'z')}$, so ist der Zähler gleich $\left[1 - \sqrt{(1 - zz)\,(1 - z'z')}\right]^2 - z^2 z'^2$, und der Nenner gleich $(1 + zz')^2 - (1 - zz)\,(1 - z'z')$. Entwickelt man die Quadrate und Producte, so wird der Nenner gleich $(z + z')^2$, und der Zähler gleich $\left[\sqrt{1 - z'z'} - \sqrt{1 - zz}\right]^2$ oder $(\sin . \text{arc} . \cos z' - \sin . \text{arc} . \cos z)^2$.

81) $z = 1 - \frac{r' + r - c}{2a}$ und $z' = 1 - \frac{r' + r + c}{2a}$, wo z und z' häufig nur wenig von der Einheit verschieden seyn werden; es sey nun arc . cos $z = A$ und arc . cos $z' = B$, so ist $\cos A = 1 - \frac{r' + r - c}{2a}$ oder $\frac{r' + r - c}{2a} = 1 - \cos A$.

$$\tau = \frac{a^{\frac{3}{2}} \, . \, T}{2\,\pi} \, . \, [\text{arc} . \cos z' - \text{arc} . \cos z - \sin (\text{arc} . \cos z') + \sin (\text{arc} . \cos z)] \ldots (a).$$

Da die nämlichen Kosinus verschiedenen Bogen angehören können, so ist dieser Ausdruck von τ zweydeutig, und man muſs genau die Bogen unterscheiden, welche den Kosinus von z und von z' entsprechen.

In der Parabel ist die halbe groſse Axe a unendlich groſs, und man hat [82])

$$\text{arc} . \cos z' - \sin (\text{arc} . \cos z') = \tfrac{1}{6} \left(\frac{R + c}{a}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

oder $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r' + r - c}{a}} = \sin \frac{1}{2} A$.

Eben so $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r' + r + c}{a}} = \sin \frac{1}{2} B$,

und dann $\tau = \frac{a^{\frac{3}{2}} . T}{2\pi} (B - A - \sin B + \sin A)$.

Der Logarithmus von $\frac{T}{2\pi}$ ist 1, 7644178. Sind B und A in Sexagesimalgraden gegeben, so wird es meistens am bequemsten seyn, den Unterschied $B - A$ in Sekunden zu verwandeln, und dann vom Logarithmus dieser Anzahl Sekunden den beständigen Logarithmus 5, 3144251 abzuziehen. Sind hingegen B und A in Decimalgraden gegeben, so ziehe man vom log $(B - A)$ den beständigen Logarithmus 1, 8038788 ab; in beiden Fällen wird man dann $B - A$ in Theilen des Halbmessers erhalten. Liegen die beiden Endpunkte des elliptischen Bogens auf entgegengesetzten Seiten des Periheliums, so ist in der obigen Formel A und $\sin A$ negativ zu nehmen.

82) Da $x = \sin x + \frac{1}{6} \sin x^3 +$ etc. ist, so ist $x - \sin x = \frac{1}{6} \sin x^3$. Nun ist, wenn der Kosinus eines Bogens z' ist, sein Sinus $\sqrt{1 - z' z'}$ und folglich arc . cos $z' -$ sin (arc . cos $z') = \frac{1}{6} (1 - z'^2)^{\frac{3}{2}}$. Man hat aber z'^2 gleich $\left(1 - \frac{R + c}{2a}\right)^2 = 1 - \frac{R+c}{a} + \frac{(R + c)^2}{4a^2}$, und also $1 - z'^2$ gleich $\frac{R+c}{a} + \frac{(R + c)^2}{4a^2}$; der letzte Theil dieses Ausdrucks verschwindet gegen den erstern, wenn a unendlich groſs ist, also $1 - z'^2 = \frac{R + c}{a}$ und arc . cos $z' -$ sin (arc . cos $z') = \frac{1}{6} \left(\frac{R + c}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Setzt man der Kürze wegen $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{r' + r + c}{a}} = F$, entwickelt man $\frac{1}{2} B$ in eine Reihe von Potenzen von F durch die Formel, welche den Bogen durch den Sinus giebt, und entwickelt man $\sin B = 2 \sin \frac{1}{2} B . \cos \frac{1}{2} B = 2 F . \sqrt{1 - F^2}$ in eine ähnliche Reihe, so erhält man

$$B - \sin B = \tfrac{4}{3} F^3 - \tfrac{1}{10} F^5 + \tfrac{3}{14} F^7 -$$

Man sehe über diese Reihe Lamberti Insigniores orbitae Cometarum proprietates p. 124, und Berliner Sammlung astronomischer Tafeln IIIter Band, pag. 30.

Setzt man c negativ, so wird man den Werth von arc . cos z — sin (arc . cos z) erhalten; die Formel (a) wird also für die Zeit τ, welche um den Bogen, dessen Chorde c ist, zu durchlaufen, angewendet wird, folgende Gleichung geben:

$$\tau = \frac{T}{12\pi} \cdot [(r + r' + c)^{\frac{3}{2}} \pm (r + r' - c)^{\frac{3}{2}}],$$

wo das Zeichen — statt hat, wenn die beiden Endpunkte des parabolischen Bogens auf derselben Seite der Axe der Parabel liegen, oder dann, wenn einer derselben unterhalb liegt, und der von den beiden Radius vectors eingeschlossene Winkel gegen den Sonnennähepunkt gekehrt ist; in den übrigen Fällen mufs man das Zeichen + gebrauchen. Da T gleich $\overset{\text{Tage}}{365,25638}$ ist, so hat man $\frac{T}{12\pi} = \overset{\text{Tage}}{9,688754}$.

In der Hyperbel ist a negativ; z und z' werden gröfser als die Einheit, die Bogen arc . cos z und arc . cos z' werden imaginär, und man hat in hyperbolischen Logarithmen

$$\text{arc . cos } z = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \log(z + \sqrt{zz-1});$$

$$\text{arc . cos } z' = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \log(z' + \sqrt{z'z'-1}).$$

Verwandelt man dann a in $-a$, so wird aus der Formel (a) folgende:

$$\tau = \frac{a^{\frac{3}{2}} T}{2\pi} \cdot \left[\sqrt{z'z'-1} \mp \sqrt{zz-1} - \log(z' + \sqrt{z'z'-1}) \pm \log(z + \sqrt{zz-1})\right].$$

Die Formel (a) giebt die Zeit, welche ein Körper braucht, der sich in gerader Linie gegen den Brennpunkt bewegt und in einer gegebenen Entfernung mit einer gegebenen Geschwindigkeit sich zu bewegen anfängt; man darf hierzu nur annehmen, dafs er eine unendlich abgeplattete Ellipse beschreibt. Nimmt man z. B. an, dafs der Körper vom Zustand der Ruhe in der Entfernung $2a$ vom Brennpunkt sich zu bewegen anfängt, und dafs man die Zeit τ sucht, welche er braucht, um sich ihm bis auf die Entfernung c zu nähern, so wird man in diesem Fall $R = 2a + r$ und $r = 2a - c$ haben, welches $z' = -1$ und $z = \frac{c-a}{a}$ giebt; dann wird die Formel (a)

$$\tau = \frac{a^{\frac{3}{2}} \cdot T}{2\pi} \cdot \left[\pi - \text{arc} \cdot \cos\left(\frac{c-a}{a}\right) + \sqrt{\frac{2ac - c^2}{a^2}}\right]$$

geben. Es giebt aber doch einen wesentlichen Unterschied zwischen der elliptischen Bewegung gegen einen Brennpunkt, und der Bewegung in einer unendlich abgeplatteten Ellipse. Ist im ersten Fall der Körper zum Brennpunkt gelangt, so geht er auf die andere Seite desselben, und entfernt sich von ihm eben so weit, als er anfangs entfernt war; ist aber der Körper im zweyten Fall zum Brennpunkt gelangt, so kehrt er zu dem Punkt, wovon er ausgegangen ist, zurück. Eine auch noch so geringe Tangential-Geschwindigkeit in der Sonnenferne reicht zu, um diesen Unterschied hervorzubringen, welcher auf die Zeit, die der Körper anwendet, um gegen den Brennpunkt herabzusteigen, keinen Einfluſs hat.

28. Da die Beobachtungen uns nicht die Umstände der ursprünglichen Bewegung der Himmelskörper zu erkennen geben, so kann man die Elemente ihrer Bahnen nicht durch die Formeln des 26sten Satzes bestimmen. Zu diesem Zweck muſs man ihre zu verschiedenen Zeiten beobachteten Lagen unter einander vergleichen, welches um desto mehr Schwierigkeiten darbietet, weil man diese Körper nicht aus dem Mittelpunkt ihrer Bewegungen beobachtet. In Rücksicht auf die Planeten kann man vermittelst ihrer Oppositionen oder ihrer Conjunctionen ihre Längen so erhalten, wie man sie aus dem Mittelpunkt der Sonne selbst beobachten würde. Dieser Umstand, mit ihrer kleinen Eccentricität und geringen Neigung ihrer Bahnen gegen die Ekliptik vereinigt, verschafft ein sehr leichtes Mittel, ihre Elemente zu erhalten. Aber bey dem gegenwärtigen Zustande der Astronomie bedürfen die Elemente dieser Bahnen nur sehr geringe Verbesserungen; und da die Aenderungen der Entfernungen der Planeten von der Erde niemals groſs genug sind, um sie unserm Blick zu entziehen, so kann man sie ohne Aufhören beobachten, und durch die Vergleichung mit einer groſsen Anzahl Beobachtungen die Elemente ihrer Bahnen und selbst die Irrthümer, deren die Beobachtungen fähig sind, verbessern.

Dies ist nicht der Fall für die Kometen; wir sehen sie nur in ihrer Sonnennähe. Sind die Beobachtungen ihrer Erscheinung unzulänglich, um ihre Elemente zu bestimmen, so haben wir kein Mittel, diese Gestirne in Gedanken in dem unendlichen Raum zu verfolgen, und wenn die Folge der Jahrhunderte sie gegen die Sonne zurück führt, so ist es uns unmöglich, sie wieder zu erkennen.

Es ist also wichtig, durch die bloſsen Beobachtungen der Erscheinung eines Kometen die Elemente seiner Bahn bestimmen zu können. Eine strenge Auflösung dieser Aufgabe übersteigt aber die Kräfte der Analysis, und man ist genöthigt, zu Näherungsmethoden seine Zuflucht zu nehmen, um die ersten Werthe dieser Elemente zu erhalten, welche man hernach mit aller Schärfe, welche die Beobachtungen verstatten, verbessern kann.

Brauchte man von einander entfernte Beobachtungen, so würden die Eliminationen auf unausführbare Rechnungen führen; man muſs sich also begnügen, bloſs nahe Beobachtungen zu betrachten, und selbst mit dieser Einschränkung bietet die Aufgabe noch groſse Schwürigkeiten dar. Es hat mir, nachdem ich hierüber nachgedacht hatte, vortheilhafter geschienen, anstatt die Beobachtungen unmittelbar anzuwenden, Data aus ihnen herzuleiten, welche ein genaues und einfaches Resultat darbieten, und ich habe mich versichert, daſs diejenigen, welche am besten diese Bedingung erfüllen, folgende sind: die geocentrische Länge und Breite des Kometen für einen gegebenen Augenblick, und ihre ersten und zweyten Differenziale durch die entsprechende Potenz des Differenzials der Zeit dividirt. Denn man kann vermittelst dieser gegebenen Stücke die Elemente genau und leicht bestimmen, ohne eine Integration nöthig zu haben, und durch die bloſse Betrachtung der Differenzialgleichungen der Bahn. Ueberdies verstattet diese Art, die Aufgabe zu betrachten, eine groſse Anzahl naher Beobachtungen zu gebrauchen, und so einen beträchtlichen Zwischenraum zwischen den äuſsersten Beobachtungen zu umfassen, welches sehr nützlich ist, den Einfluſs der Fehler zu vermindern, denen diese Beobachtungen wegen des Nebels, welcher die Kometen umgiebt, stets unterworfen sind. Ich werde zuerst die Formeln geben, welche zur Herleitung der ersten Differenziale der Länge und Breite aus irgend einer Anzahl naher Beobachtungen, nöthig sind; ich werde alsdann die Elemente der Bahn eines Kometen vermittelst dieser Differenziale bestimmen, und endlich die Art erklären, welche mir die einfachste geschienen hat, um diese Elemente durch drey von einander entfernte Beobachtungen zu verbessern.

29. Es sey zu einer gegebenen Epoche α die geocentrische Länge eines Kometen, und θ seine nördliche geocentrische Breite; die südlichen Breiten müssen als negativ angesehen werden. Bezeichnet man nun durch s die Anzahl der seit dieser Epoche verflossenen Tage, so werden die geocentrischen Längen und

Breiten des Kometen nach diesem Zeitraum, vermöge der Formel (i) des 21sten Satzes durch folgende zwey Reihen ausgedrückt werden:

$$\alpha + s \cdot \left(\frac{d\alpha}{ds}\right) + \frac{s^2}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right) + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{d^3\alpha}{ds^3}\right) + \ldots$$

$$\theta + s \cdot \left(\frac{d\theta}{ds}\right) + \frac{s^2}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right) + \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{d^3\theta}{ds^3}\right) + \ldots$$

Man wird die Werthe von α, $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$, . . ., θ, $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)$, . . . vermittelst mehrerer beobachteten geocentrischen Längen und Breiten bestimmen. Um hierzu auf die einfachste Art zu gelangen, wollen wir die Reihe, welche die geocentrische Länge ausdrückt, betrachten. Die Koefficienten der Potenzen von s in dieser Reihe müssen durch die Bedingung bestimmt werden, dafs diese Reihe jede beobachtete Länge darstellen mufs, wenn man statt s die der Beobachtung entsprechende Anzahl Tage setzt; man wird also eben so viel Gleichungen als Beobachtungen haben, und wenn ihre Anzahl n ist, so wird man vermittelst derselben in der unendlichen Reihe nur n von den Gröfsen α, $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$. . . bestimmen können. Hierbey ist aber zu bemerken, dafs man die in s^n, s^{n+1}, u. s. w. multiplicirten Glieder vernachlässigen kann, wenn man s sehr klein setzt; dadurch wird die unendliche Reihe auf ihre ersten n Glieder reducirt, welche man durch die n Beobachtungen bestimmen kann. Diese Bestimmungen können nur Näherungen seyn, und ihre Genauigkeit wird von der Kleinheit der weggelassenen Glieder abhangen; sie werden desto genauer seyn, je kleiner s und je gröfser die Anzahl der gebrauchten Beobachtungen ist. Die Theorie der Interpolationen ist dadurch darauf zurückgebracht, eine rationelle und nicht gebrochene Function von s zu finden, welche so beschaffen ist, dafs sie sich in die beobachtete Länge verwandelt, wenn man statt s die jeder Beobachtung entsprechende Anzahl Tage setzt.

Wir wollen die beobachteten Längen des Kometen mit β, β', β'' . . . , die Anzahl der Tage, um welche sie auf die gegebene Epoche folgen, mit i, i', i'' . . . bezeichnen; diese letztern Gröfsen müssen für Beobachtungen vor der Epoche negativ angenommen werden. Setzt man nun

$$\frac{\beta' - \beta}{i' - i} = \delta\beta; \quad \frac{\beta'' - \beta'}{i'' - i'} = \delta\beta'; \quad \frac{\beta''' - \beta''}{i''' - i''} = \delta\beta''; \quad \text{etc.}$$

$$\frac{\delta\beta' - \delta\beta}{i'' - i} = \delta^2\beta; \qquad \frac{\delta\beta'' - \delta\beta'}{i''' - i'} = \delta^2\beta'; \qquad \text{etc.}$$

$$\frac{\delta^2\beta' - \delta^2\beta}{i''' - i} = \delta^3\beta; \qquad \text{etc.}$$

so wird die gesuchte Function folgende seyn:

$$\beta + (s-i)\,\delta\beta + (s-i)\,(s-i')\,.\,\delta^2\beta + (s-i)\,(s-i')\,(s-i'')\,.\,\delta^3\beta + \ldots$$

denn man kann sich leicht versichern, daſs sie sich nach und nach in β, β', β''... verwandelt, wenn man $s = i$; $s = i'$; $s = i''$ u. s. w. setzt.

Vergleicht man nun diese Function mit der obigen

$$\alpha + s\,.\left(\frac{d\alpha}{ds}\right) + \frac{s^2}{1\,.\,2}\,.\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right) + \text{etc.}$$

so erhält man, wenn man die Koefficienten der gleichen Potenzen von s einander gleich setzt,

$$\alpha = \beta - i\,.\,\delta\beta + i\,.\,i'\,.\,\delta^2\beta + i\,.\,i'\,.\,i''\,.\,\delta^3\beta + \ldots$$

$$\left(\frac{d\alpha}{ds}\right) = \delta\beta - (i + i')\,\delta^2\beta + (ii' + ii'' + i'i'')\,.\,\delta^3\beta + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\,.\left(\frac{d^2\alpha}{ds}\right) = \delta^2\beta - (i + i' + i'')\,.\,\delta^3\beta + \ldots$$

Die höhern Differenziale von α werden wir nicht brauchen. Die Koefficienten dieser Ausdrücke sind abwechselnd positiv und negativ. Der Koefficient von $\delta^r\beta$ ist, das Zeichen abgerechnet, das Product der r Gröſsen i, i', i'' ... $i^{(r-1)}$ in dem Werth von α; er ist die Summe der Producte derselben Gröſsen, immer $r - 1$ Factoren genommen, in dem Werthe von $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$; er ist endlich die Summe der Producte derselben Gröſsen, immer $r - 2$ Factoren genommen, in dem Werth von $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$.

Bezeichnet man die beobachteten geocentrischen Breiten des Kometen mit γ, γ', γ'' ... so wird man die Werthe von θ, $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)$... erhalten, wenn man in den vorhergehenden Ausdrücken von α, $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$, etc. die Gröſsen β, β', β'' ... in γ, γ', γ'' ... verwandelt.

Die-

Diese Ausdrücke sind um desto genauer, je mehr Beobachtungen man hat, und je kleiner die Zwischenräume sind, welche sie trennen. Man würde also alle der gewählten Epoche nahe Beobachtungen anwenden können, wenn sie genau wären; die Fehler aber, denen sie immer unterworfen sind, würden auf ein fehlerhaftes Resultat führen; man muſs also, um den Einfluſs dieser Fehler zu vermindern, den Zwischenraum zwischen den äuſsersten Beobachtungen vermehren, so wie man mehrere Beobachtungen anwendet. Man wird auf diese Art mit fünf Beobachtungen einen Zwischenraum von 35 bis 40 Grad umfassen können, welches sehr genäherte Werthe der geocentrischen Länge und Breite, und ihrer ersten und zweyten Differenziale geben muſs.

Hat man die Epoche so gewählt, daſs man eine gleiche Anzahl Beobachtungen vor und nach der Epoche hat, so daſs jede Länge, welche auf sie folgt, eine correspondirende Länge hat, welche um denselben Zwischenraum vor ihr vorher geht, so wird diese Bedingung die Werthe von α, $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$ und $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$ der Wahrheit noch mehr nähern, und man wird sich leicht versichern können, daſs neue, in gleichen Abständen auf beiden Seiten der Epoche genommene Beobachtungen diesen Werthen nur Glieder hinzusetzen würden, welche in Vergleichung mit ihren letzten Gliedern von eben der Ordnung seyn würden, von welcher das Verhältniſs $s^2 \,.\, \left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$ zu α ist. Diese symmetrische Anordnung hat dann Statt, wenn alle Beobachtungen gleich weit von einander entfernt sind, und wenn man die Epoche in der Mitte des Zwischenraums, den sie umfassen, genommen hat; es ist also vortheilhaft, ähnliche Beobachtungen zu brauchen. Es wird im Allgemeinen immer vortheilhaft seyn, die Epoche gegen die Mitte dieses Zwischenraums zu nehmen, weil die Annäherungen convergirender sind, da die Anzahl der Tage, welche die äuſsersten Beobachtungen von ihr trennen, geringer ist. Man wird auch noch die Rechnung vereinfachen, wenn man für die Epoche den Augenblick einer der Beobachtungen wählt, wodurch die Werthe von α und von θ unmittelbar bestimmt seyn werden.

Hat man nach dem Vorhergehenden $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)$ und $\left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)$ bestimmt, so wird man daraus die ersten und zweyten Differenziale von α und θ, durch das Differenzial der Zeit dividirt, auf folgende Art erhalten. Vernach-

lässigt man die Massen der Planeten und Kometen in Vergleichung mit der Masse der Sonne, welche man als Einheit der Massen annimmt; sieht man ferner die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde als Einheit der Entfernungen, und die mittlere Bewegung der Erde um die Sonne nach dem 23sten Satz als Maafs der Zeit t an, so wird man

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{d\alpha}{ds}\right); \qquad \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$$

haben, wo λ die Anzahl der Sekunden ist, welche die Erde in einem Tage vermittelst ihrer mittlern Sideralbewegung beschreibt, und wo also die Zeit t, welche der Anzahl von s Tagen entspricht, gleich λs ist. Die Beobachtungen geben in Tafellogarithmen $\log \lambda = 4,0394622$, und $\log \lambda^2 = \log \lambda + \log \frac{\lambda}{R}$, wo R der Halbmesser des Kreises in Sekunden ausgedrückt ist, folglich $\log \lambda^2 = 2,2750444$. Verwandelt man so die Werthe von $\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)$ und $\left(\frac{d^2\alpha}{ds^2}\right)$ in Sekunden, und zieht man von den Logarithmen dieser Werthe die Logarithmen 4,0394622 und 2,2750444 ab, so wird man die Logarithmen von $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ und $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$ erhalten. Man wird eben so die Logarithmen von $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ und $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ erhalten, wenn man dieselben Logarithmen von den Logarithmen ihrer in Sekunden ausgedrückten Werthe abzieht.

Von der Genauigkeit der Werthe von α, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, θ, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ hängt die Genauigkeit der folgenden Resultate ab; und da die Art, sie zu erhalten, sehr einfach ist, so mufs man die Beobachtungen so wählen und so vervielfältigen, dafs man sie mit der gröfst möglichen Genauigkeit erhält. Wir wollen nun vermittelst dieser Werthe die Elemente der Bahn des Kometen bestimmen, und um diese Resultate allgemeiner zu machen, die Bewegung eines Systems von Körpern, auf welche gegebene Kräfte wirken, betrachten.

30. Es sollen x, y, z die rechtwinklichten Koordinaten des ersten Körpers, x', y', z' die des zweyten Körpers u. s. w. seyn. Wir wollen uns vorstellen, dafs auf den ersten Körper, parallel mit den Axen der x, y und z, die Kräfte X, Y, Z wirken, von denen wir annehmen, dafs sie diese veränderlichen

Kräfte beständig zu vermindern streben. Wir wollen uns ferner vorstellen, daſs auf den zweyten Körper, parallel mit denselben Axen, die Kräfte X', Y', Z' wirken u. s. w. Die Bewegungen aller dieser Körper werden dann durch die Differenzialgleichungen der zweyten Ordnung gegeben seyn:

$$o = \frac{d^2x}{dt^2} + X; \quad o = \frac{d^2y}{dt^2} + Y; \quad o = \frac{d^2z}{dt^2} + Z;$$

$$o = \frac{d^2x'}{dt^2} + X'; \quad o = \frac{d^2y'}{dt^2} + Y'; \quad o = \frac{d^2z'}{dt^2} + Z';$$

etc.

Wenn die Anzahl dieser Körper n ist, so wird die Anzahl dieser Gleichungen $3n$ seyn, und ihre endlichen Integrale werden $6n$ willkührliche Gröſsen enthalten, welches die Elemente der Bahnen der verschiedenen Körper seyn werden.

Wir werden nun, um diese Elemente durch die Beobachtungen zu bestimmen, die Koordinaten jedes Körpers in andere verwandeln, deren Anfangspunkt der Ort der Beobachtung sey. Wir nehmen also eine Ebene an, welche durch das Auge des Beobachters geht, und immer mit sich selbst parallel bleibt, während daſs der Beobachter sich auf einer gegebenen krummen Linie bewegt; wir werden dann ϱ, ϱ', ϱ'' . . . die auf diese Ebene projicirten Entfernungen der verschiedenen Körper vom Beobachter nennen; α, α', α'' . . . die scheinbaren geocentrischen Längen dieser Körper auf die nämliche Ebene bezogen, und θ, θ', θ'' . . . ihre scheinbaren Breiten. Die veränderlichen Gröſsen x, y, z werden so durch Functionen von ϱ, α, θ und den Koordinaten des Beobachters gegeben seyn. Eben so werden x', y', z' durch Functionen von ϱ', α', θ' und den Koordinaten des Beobachters gegeben seyn u. s. w. Nimmt man überdies an, daſs die Kräfte X, Y, Z, X', Y', Z' aus der gegenseitigen Anziehung der Körper des Systems und aus äuſsern Anziehungen entstehen, so werden sie durch Functionen von ϱ, ϱ', ϱ'' etc., α, α', α'' etc., θ, θ', θ'' etc., und bekannter Gröſsen gegeben seyn; die vorhergehenden Differenzialgleichungen werden sich dadurch in Gleichungen zwischen diesen neuen veränderlichen Gröſsen und ihren ersten und zweyten Differenzialen verwandeln. Die Zahl der unbekannten Gröſsen ist $3n$, und da man $3n$ Differenzialgleichungen hat, so wird man sie bestimmen können. Man wird selbst den Vortheil haben, daſs die ersten und zweyten Differenziale von ϱ, ϱ', ϱ'' etc. nur unter linearischer Gestalt in diesen Gleichungen erscheinen werden.

Wenn die Gröſsen α, θ, ϱ, α', θ', ϱ' etc. und ihre ersten durch dt dividirten Differenziale bekannt sind, so wird man für jeden gegebenen Augenblick die Werthe von x, y, z, x', y', z' etc. und ihrer ersten durch dt dividirten Differenziale haben. Substituirt man diese Werthe in den $3n$ endlichen Integralen der vorhergehenden Gleichungen und in den ersten Differenzialen dieser Integrale, so wird man $6n$ Gleichungen erhalten, vermittelst welcher man die $6n$ willkührlichen Gröſsen dieser Integrale, oder die Elemente der Bahnen der verschiedenen Körper wird bestimmen können.

31. Wir wollen nun diese Methode auf die Bewegung der Kometen anwenden. Hierzu bemerken wir, daſs die Hauptkraft, welche auf sie wirkt, die anziehende Kraft der Sonne ist, und wir können also alle andere Kräfte auſser Acht lassen. Wenn aber der Komet nahe genug bey einem groſsen Planeten vorbeyginge, um eine merkliche Stöhrung zu erfahren, so würde doch die vorhergehende Methode seine Geschwindigkeit und seine Entfernung von der Erde zu erkennen geben; da dieser Fall aber äuſserst selten ist, so werden wir in den folgenden Untersuchungen nur auf die Wirkung der Sonne Rücksicht nehmen.

Wenn man zur Einheit der Massen die Masse der Sonne, und zur Einheit der Entfernungen ihre Entfernung von der Erde annimmt; wenn man ferner den Mittelpunkt der Sonne für den Anfangspunkt der Koordinaten x, y, z eines Kometen nimmt, dessen Radius vector wir r nennen, so werden die Differenzialgleichungen (O) des 17ten Satzes, wenn man die Masse des Kometen in Vergleichung mit der Masse der Sonne vernachlässigt, sich in folgende verwandeln:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3}; \\ 0 &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3}; \\ 0 &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3}. \end{aligned}\right\} \quad (k)$$

Man nehme nun an, daſs die Ebene der x und y die Ebene der Ekliptik selbst sey; daſs die Axe der x die Linie sey, welche aus dem Mittelpunkt der Sonne zum ersten Punkt des Widders zu einer gegebenen Epoche gezogen wird; daſs die Axe der y die Linie sey, welche aus dem Mittelpunkt der Sonne zum Anfangspunkt des Krebses zu derselben Epoche gezogen wird; daſs endlich

die positiven z mit dem Nordpol der Ekliptik auf derselben Seite sind. Man nenne endlich x' und y' die Koordinaten der Erde und R ihren Radius vector.

Dieses vorausgesetzt, verwandle man die Koordinaten x, y, z in andere, welche sich auf den Beobachter beziehen; man nenne hierzu die geocentrische Länge des Kometen α, seine geocentrische Breite θ, und seine Entfernung vom Mittelpunkt der Erde auf die Ebene der Ekliptik projicirt ϱ, so wird man

$$x = x' + \varrho \cdot \cos \alpha; \quad y = y' + \varrho \cdot \sin \alpha; \quad z = \varrho \cdot \tang \theta$$

haben. Multiplicirt man die erste der Gleichungen (k) mit $\sin \alpha$, die zweyte mit $- \cos \alpha$ und addirt sie, so erhält man

$$0 = \sin \alpha \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} - \cos \alpha \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{x \cdot \sin \alpha - y \cdot \cos \alpha}{r^3}.$$

Substituirt man für x und y ihre vorhergehenden Werthe, so erhält man hieraus

$$0 = \sin \alpha \cdot \frac{d^2 x'}{dt^2} - \cos \alpha \cdot \frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{x' \cdot \sin \alpha - y' \cdot \cos \alpha}{r^3}$$
$$- 2 \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) - \varrho \cdot \left(\frac{d^2 \alpha}{dt^2}\right).$$

Da die Erde, so wie der Komet, durch die Attractionskraft der Sonne in ihrer Bahn zurückgehalten wird, so hat man

$$0 = \frac{d^2 x'}{dt^2} + \frac{x'}{R^3}; \quad 0 = \frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{y'}{R^3};$$

dieses giebt

$$\sin \alpha \cdot \frac{d^2 x'}{dt^2} - \cos \alpha \cdot \frac{d^2 y'}{dt^2} = \frac{y' \cdot \cos \alpha - x' \cdot \sin \alpha}{R^3},$$

man erhält hierdurch

$$0 = y' \cdot (\cos \alpha - x' \cdot \sin \alpha) \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) - 2 \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) - \varrho \cdot \left(\frac{d^2 \alpha}{dt^2}\right).$$

Es sey A die aus der Erde gesehene Länge der Sonne, so hat man

$$x' = R \cdot \cos A; \quad y' = R \cdot \sin A;$$

folglich

$$y' \cdot \cos \alpha - x' \cdot \sin \alpha = R \cdot \sin (A - \alpha),$$

dadurch verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in folgende:

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) = \frac{R \cdot \sin (A - \alpha)}{2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)} \cdot \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) - \frac{\varrho \cdot \left(\frac{d^2 \alpha}{dt^2}\right)}{2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)} . \quad (1).$$

Wir wollen nun einen zweyten Ausdruck für $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)$ suchen. Hierzu werden wir die erste der Gleichungen (k) mit tang θ . cos α, die zweyte mit tang θ . sin α multipliciren, und von der Summe dieser beiden Producte die dritte Gleichung abziehen; wir werden so folgende Gleichung erhalten:

$$o = \text{tang}\,\theta \,.\, \left(\cos\alpha \,.\, \frac{d^2x}{dt^2} + \sin\alpha \,.\, \frac{d^2y}{dt^2}\right) + \text{tang}\,\theta \,.\, \frac{(x.\cos\alpha + y.\sin\alpha)}{r^3} - \frac{d^2z}{dt^2} - \frac{z}{r^3}.$$

Substituirt man statt x, y, z ihre Werthe, so verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$o = \text{tang}\,\theta \,.\, \left[\left(\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{x'}{r^3}\right)\cos\alpha + \left(\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{y'}{r^3}\right)\sin\alpha\right] - \frac{2\left(\frac{d\theta}{dt}\right).\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)}{\cos\theta^2}$$
$$- \varrho \,.\, \left\{\frac{\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)}{\cos\theta^2} + \frac{2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.\sin\theta}{\cos\theta^3} + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2.\,\text{tang}\,\theta\right\}.$$

Man hat aber

$$\left(\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{x'}{r^3}\right).\cos\alpha + \left(\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{y'}{r^3}\right).\sin\alpha = (x'.\cos\alpha + y'.\sin\alpha).\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)$$
$$= R\,.\,\cos(A-\alpha)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right);$$

folglich

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) = -\tfrac{1}{2}\varrho\,.\,\left\{\frac{\left(\frac{d^2\theta^2}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)} + 2\left(\frac{d\theta}{dt}\right).\,\text{tang}\,\theta + \frac{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2.\,\sin\theta\,.\,\cos\theta}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}\right\}$$
$$+ \frac{R\,.\sin\theta\,.\cos\theta\,.\cos(A-\alpha)}{2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}.\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right); \quad (2).$$

Zieht man diesen Werth von $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)$ vom erstern ab, und setzt man

$$\mu' = \frac{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) - \left(\frac{d\theta}{dt}\right).\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.\text{tang}\,\theta + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^3.\sin\theta.\cos\theta}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\,\sin\theta\,.\,\cos\theta\,.\,\cos(A-\alpha) + \left(\frac{d\theta}{dt}\right).\,\sin(A-\alpha)},$$

so erhält man

$$\varrho = \frac{R}{\mu'} \cdot \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) \cdot ()$$

Da ϱ, die projicirte Distanz des Kometen von der Erde, immer positiv ist, so zeigt diese Gleichung, daſs r, die Entfernung des Kometen von der Sonne, kleiner oder gröſser als R, die Entfernung der Sonne von der Erde ist, je nachdem μ' positiv oder negativ ist; ist $\mu' = 0$, so sind beide Entfernungen einander gleich.

Man kann durch die bloſse Ansicht einer Himmelskugel das Zeichen von μ' bestimmen, und folglich auch, ob der Komet mehr oder weniger als die Erde von der Sonne entfernt ist. Wir wollen uns hierzu einen gröſsten Kreis vorstellen, welcher durch zwey geocentrische und unendlich nahe Oerter des Kometen geht. Es sey γ die Neigung dieses Kreises gegen die Ekliptik und λ die Länge seines aufsteigenden Knotens; man wird dann

$$\text{tang}\, \gamma \,.\, \sin(\alpha - \lambda) = \text{tang}\, \theta$$

haben, und hieraus

$$d\theta \,.\, \sin(\alpha - \lambda) = d\alpha \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\theta \,.\, \cos(\alpha - \lambda).$$

Differenziirt man noch einmal, so erhält man [83])

$$0 = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d^2\theta_{,}}{dt^2}\right) - \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 . \text{tang}\,\theta + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^3 . \sin\theta . \cos\theta,$$

wo $d^2\theta_{,}$ der Werth von $d^2\theta$ ist, welcher Statt haben würde, wenn der Komet sich scheinbar in dem nämlichen gröſsten Kreis zu bewegen fortführe. Substituirt man in dem Werth von μ' statt $d\theta$ seinen Werth $\frac{d\alpha . \sin\theta . \cos\theta . \cos(\alpha - \lambda)}{\sin(\alpha - \lambda)}$, so verwandelt er sich in folgenden:

83) Man erhält unmittelbar durch Differenziiren:

$$0 = d^2\theta_{,} \,.\, \sin(\alpha - \lambda) + d\theta \,.\, d\alpha \,.\, \cos(\alpha - \lambda) + d\alpha^2 . \sin\theta . \cos\theta . \sin(\alpha - \lambda) + d\alpha \,.\, d\theta \,.\, (\sin\theta^2 - \cos\theta^2) \cos(\alpha - \lambda)$$
$$- d^2\alpha . \sin\theta . \cos\theta . \cos(\alpha - \lambda).$$

Die zwey in $d\theta \,.\, d\alpha$ multiplicirten Glieder sind gleich $2\, d\alpha \,.\, d\theta . \sin\theta^2 . \cos(\alpha - \lambda)$. Substituirt man statt $\cos(\alpha - \lambda)$ seinen Werth $\frac{d\theta \,.\, \sin(\alpha - \lambda)}{d\alpha \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\theta}$, welcher aus dem ersten Differenzial hergeleitet worden; dividirt man dann die Gleichung mit $\sin(\alpha - \lambda)$, und multiplicirt man mit $d\alpha$, so erhält man

$$0 = d^2\theta_{,} \,.\, d\alpha + d\theta \,.\, d\alpha^2 + d\alpha^3 \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\theta + d\alpha \,.\, d\theta^2 \,.\, \text{tang}\,\theta - d^2\alpha \,.\, d\theta.$$

$$\mu' = \frac{\left[\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) - \left(\frac{d^2\theta,}{dt^2}\right)\right] . \sin(\alpha - \lambda)}{\sin\theta . \cos\theta . \sin(A - \lambda)}.$$

Die Function $\frac{\sin(\alpha - \lambda)}{\sin\theta . \cos\theta}$ ist beständig positiv; der Werth von μ' ist also positiv oder negativ, je nachdem $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{d^2\theta,}{dt^2}\right)$ gleiches oder entgegengesetztes Zeichen mit $\sin(A - \lambda)$ hat; nun ist aber $A - \lambda$ gleich zwey rechten Winkeln + die Entfernung der Sonne vom aufsteigenden Knoten des gröſsten Kreises. Hieraus kann man leicht schlieſsen, daſs μ' positiv oder negativ seyn wird, je nachdem die Abweichung des Kometen vom gröſsten Kreise in einer dritten, den beiden ersten unendlich nahen, Beobachtung sich mit der Sonne auf der nämlichen oder auf der entgegengesetzten Seite befindet [84]). Man stelle sich also vor, daſs man durch zwey sehr nahe geocentrische Oerter des Kometen einen gröſsten Kreis gezogen hat. Weicht nun der Komet in einem dritten, auf die beiden ersten folgenden, und sehr nahen geocentrischen Ort vom gröſsten Kreise auf derselben Seite, auf welcher sich die Sonne befindet, oder auf der entgegengesetzten Seite ab, so wird er näher oder entfernter von der Sonne seyn, als die Erde; die Entfernungen beider Körper werden gleich seyn, wenn der Komet auf

84) Es sey $A' - \lambda$ die Entfernung der Sonne vom aufsteigenden Knoten, also $\sin(A' - \lambda) = - \sin(A - \lambda)$ und $\frac{\left[\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) - \left(\frac{d^2\theta,}{dt^2}\right)\right]}{\sin(A - \lambda)}$ gleich $\frac{\left(\frac{d^2\theta,}{dt^2}\right) - \left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)}{\sin(A' - \lambda)}$. Der Zähler dieses Bruchs giebt die Abweichung des Kometen vom gröſsten Kreise in der dritten Beobachtung; diese Abweichung kann nur durch die zweyten Differenziale der Breite gegeben werden, weil angenommen worden ist, daſs die drey Beobachtungen unendlich nahe sind. Die Gröſse μ wird also positiv seyn, wenn der Zähler und Nenner des obigen Bruchs zugleich positiv oder negativ sind. Im ersten Fall wird die Abweichung des Kometen vom gröſsten Kreise nördlich, und seine Entfernung vom Knoten kleiner als 180° seyn. Der Komet wird in Rücksicht auf die Breite entfernter von der Sonne seyn, als wenn er sich im gröſsten Kreise bewegt hätte; die Abweichung des Kometen vom gröſsten Kreise ist also nicht auf der Seite, wo die Sonne sich befindet. Man sieht sogleich, daſs dies auch im zweyten Fall Statt finden muſs, weil die Abweichung des Kometen und der Ort der Sonne jetzt entgegengesetzte Lagen haben, und folglich ihre Lage gegen einander nicht geändert haben. Die Gröſse μ ist also positiv, wenn die Abweichung des Kometen in einer dritten Beobachtung vom gröſsten durch die zwey ersten gezogenen Kreise, nicht auf der Seite ist, wo die Sonne sich befindet. Hieraus folgt unmittelbar, daſs im entgegengesetzten Fall μ negativ seyn muſs.

auf dem nämlichen gröfsten Kreis zu erscheinen fortfährt. Die verschiedenen Biegungen der scheinbaren Bahn werden uns also über die Aenderungen seiner Entfernung von der Sonne belehren.

Wir bemerken ferner, um r aus der Gleichung (3) zu eliminiren, und diese Gleichung dahin zu bringen, dafs sie nur die unbekannte Gröfse ϱ enthält, dafs $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist; substituirt man statt x, y, z ihre Werthe in ϱ, α und θ, so erhält man

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + 2\,\varrho \cdot (x' . \cos\alpha + y' . \sin\alpha) + \frac{\varrho^2}{\cos\theta^2};$$

man hat aber $x' = R . \cos A$; $y' = R . \sin A$; folglich

$$r^2 = \frac{\varrho^2}{\cos\theta^2} + 2\,R . \varrho . \cos(A - \alpha) + R^2.$$

Quadrirt man die beiden Glieder der Gleichung (3), nachdem man ihr die folgende Gestalt gegeben hat:

$$r^3 . (\mu' R^2 \varrho + 1) = R^3,$$

so erhält man, wenn man statt r^2 seinen Werth substituirt,

$$\left[\frac{\varrho^2}{\cos\theta^2} + 2\,R\varrho . \cos(A - \alpha) + R^2\right]^3 . (\mu' R^2 \varrho + 1)^2 = R^6 \quad (4),$$

eine Gleichung, in welcher man nur die unbekannte Gröfse ϱ hat, und welche vom 7ten Grade ist, weil die ganze Gleichung durch ϱ dividirt werden kann, da das völlig bekannte Glied des ersten Theils gleich R^6 ist. Hat man also ϱ bestimmt, so wird man $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)$ vermittelst der Gleichungen (1) und (2) haben.

Substituirt man z. B. in der Gleichung (1) statt $\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}$ seinen durch die Gleichung (3) gegebenen Werth $\frac{\mu' \varrho}{R}$, so erhält man

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) = - \frac{\varrho}{2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)} . \left[\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + \mu' . \sin(A - \alpha)\right].$$

Die Gleichung (4) kann oft verschiedene reelle und positive Wurzeln haben. Bringt man ihren zweyten Theil, R^6, auf die linke Seite des Gleichheitszeichens, so ist das letzte Glied der Gleichung gleich

$$2\,R^5 . \cos\theta^6 . [\mu' R^3 + 3\cos(A - \alpha)].$$

Da die Gleichung für ϱ vom 7ten oder von einem ungeraden Grade ist, so hat sie wenigstens zwey reelle positive Wurzeln, wenn $\mu' R^3 + 3 \cos (A - \alpha)$ positiv ist; denn sie muſs vermöge der Natur der Aufgabe immer eine positive Wurzel haben, und sie kann alsdann nur eine gerade Anzahl positiver Wurzeln haben. Jeder reelle und positive Werth von ϱ giebt einen verschiedenen Kegelschnitt für die Bahn des Kometen; man wird also eben so viel krumme Linien haben, welche den drey nahen Beobachtungen Genüge thun werden, als ϱ reelle und positive Werthe haben wird, und um die wahre Kometenbahn zu bestimmen, muſs man eine neue Beobachtung gebrauchen.

32. Der aus der Gleichung (4) erhaltene Werth von ϱ würde vollkommen genau seyn, wenn α, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, θ, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ und $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ genau bekannt wären; diese Gröſsen sind aber nur durch Annäherungen gegeben. Man kann sich in der That durch die vorher erklärte Methode der Wahrheit immer mehr nähern, wenn man eine groſse Anzahl Beobachtungen braucht, welches den Vortheil verschafft, groſse Zwischenräume zu gebrauchen, und die Beobachtungsfehler werden sich einander aufheben. Diese Methode hat aber in analytischer Rücksicht die Unbequemlichkeit, mehr als drey Beobachtungen für eine Aufgabe anzuwenden, wo drey zureichen. Man kann diese Unbequemlichkeit auf folgende Art vermeiden, und unsere Auflösung der Wahrheit so nahe bringen, als man will, wenn man auch nur drey Beobachtungen betrachtet.

Wir nehmen hierzu an, daſs α und θ die geocentrische Länge und Breite der Zwischenbeobachtung bezeichnen. Substituirt man in den Gleichungen (k) des vorhergehenden Satzes statt x, y, z ihre Werthe $x' + \varrho \,.\, \cos \alpha$; $y' + \varrho \,.\, \sin \alpha$ und $\varrho \,.\, \operatorname{tang} \theta$, so werden sie $\left(\frac{d^2\varrho}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ durch Functionen der Gröſsen ϱ, α und θ, ihrer ersten Differenziale und bekannter Gröſsen geben. Differenziirt man diese Functionen, so wird man $\left(\frac{d^3\varrho}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)$ und $\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)$ durch Functionen der Gröſsen ϱ, α, θ und ihrer ersten und zweyten Differenziale erhalten. Man wird das zweyte Differenzial von ϱ vermittelst seines Werthes, und das erste Differenzial vermittelst der Gleichung (2) des vorhergehenden Satzes eliminiren können. Fährt man so fort, die Werthe von

$\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)$ und $\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)$ nach und nach zu differenziiren, und die Differenziale von α und von θ, welche höher als die zweyten sind, und alle Differenziale von ϱ zu eliminiren, so wird man die Werthe von $\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^4\alpha}{dt^4}\right)$ etc., $\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^4\theta}{dt^4}\right)$ etc. durch Functionen von ϱ, α, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, θ, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ erhalten.

Dieses vorausgesetzt, sollen $\alpha_{,}$, α, α' die drey beobachteten geocentrischen Längen des Kometen; $\theta_{,}$, θ, θ' die drey zugehörigen geocentrischen Breiten seyn; es sey i die Anzahl der Tage, welche die erste Beobachtung von der zweyten trennen, und i' die Anzahl der Tage, welche die zweyte von der dritten trennen; es sey endlich λ der Bogen, welchen die Erde vermittelst ihrer Sideralbewegung in einem Tage beschreibt, so wird man nach dem 29sten Satz folgende Gleichungen haben:

$$\alpha_{,} = \alpha - i\,.\,\lambda\,.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) + \frac{i^2\,.\,\lambda^2}{1\,.\,2}\,.\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) - \frac{i^3\,.\,\lambda^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right) + \ldots$$

$$\alpha' = \alpha + i\,.\,\lambda\,.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) + \frac{i^2\,.\,\lambda^2}{1\,.\,2}\,.\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + \frac{i^3\,.\,\lambda^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right) + \ldots$$

$$\theta_{,} = \theta - i\,.\,\lambda\,.\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{i^2\,.\,\lambda^2}{1\,.\,2}\,.\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) - \frac{i^3\,.\,\lambda^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right) + \ldots$$

$$\theta' = \theta + i\,.\,\lambda\,.\left(\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{i^2\,.\,\lambda^2}{1\,.\,2}\,.\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) + \frac{i^3\,.\,\lambda^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right) + \ldots$$

Substituirt man in diese Reihen statt $\left(\frac{d^3\alpha}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^4\alpha}{dt^4}\right)$ etc., $\left(\frac{d^3\theta}{dt^3}\right)$, $\left(\frac{d^4\theta}{dt^4}\right)$ etc. ihre nach dem Vorhergehenden erhaltenen Werthe, so wird man Gleichungen zwischen den fünf unbekannten Gröſsen ϱ, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ erhalten. Diese Gleichungen werden um desto genauer seyn, je mehr man Glieder dieser Reihen gebraucht hat. Man wird so $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ und $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ durch Functionen von ϱ und von bekannten Gröſsen erhalten, und wenn man diese in die Gleichung (4) des vorhergehenden Satzes setzt, so wird sie

nur die unbekannte Gröſse ϱ enthalten. Ich habe übrigens diese Art hier nur deswegen erklärt, um zu zeigen, wie man bloſs durch drey Beobachtungen Werthe von ϱ, welche der Wahrheit sich immer mehr nähern, erhalten kann; sie würde aber in der Ausübung eine zu mühsame Rechnung erfordern, und es ist genauer und zugleich einfacher, eine gröſsere Anzahl derselben nach der Methode des 29sten Satzes zu gebrauchen.

33. Wenn die Werthe von ϱ und von $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)$ bestimmt sind, so hat man die Werthe von $x, y, z, \left(\frac{dx}{dt}\right), \left(\frac{dy}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ vermittelst der Gleichungen

$$x = R \,.\, \cos A + \varrho \,.\, \cos \alpha; \quad y = R \,.\, \sin A + \varrho \,.\, \sin \alpha; \quad z = \varrho \,.\, \operatorname{tang} \theta,$$

und vermittelst ihrer durch dt dividirten Differenziale

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{dR}{dt}\right) . \cos A - R \,.\, \left(\frac{dA}{dt}\right) . \sin A + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) . \cos \alpha - \varrho \,.\, \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) . \sin \alpha$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) = \left(\frac{dR}{dt}\right) . \sin A + R \,.\, \left(\frac{dA}{dt}\right) . \cos A + \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) . \sin \alpha + \varrho \,.\, \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) . \cos \alpha$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) . \operatorname{tang} \theta + \frac{\varrho \,.\, \left(\frac{d\theta}{dt}\right)}{\cos \theta^2}.$$

Die Werthe von $\left(\frac{dA}{dt}\right)$ und von $\left(\frac{dR}{dt}\right)$ sind durch die Theorie der Bewegung der Erde gegeben; um ihre Berechnung zu erleichtern, sey E die Eccentricität der Erdbahn und H die Länge ihrer Sonnennähe, so hat man durch die Natur der elliptischen Bewegung

$$\left(\frac{dA}{dt}\right) = \frac{\sqrt{1 - E^2}}{R^2}; \quad R = \frac{1 - E^2}{1 + E \,.\, \cos (A - H)}.$$

Beide Gleichungen geben

$$\left(\frac{dR}{dt}\right) = \frac{E \,.\, \sin (A - H)}{\sqrt{1 - E^2}}.$$

Es sey R' der Radius vector der Erde, welcher der um einen rechten Winkel vermehrten Länge A der Erde zugehört, so wird man

$$R' = \frac{1 - E^2}{1 - E \,.\, \sin (A - H)}$$

haben, und hieraus

$$E.\sin(A-H)=\frac{R'-1+E^2}{R'},$$

folglich

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)=\frac{R'+E^2-1}{R'.\sqrt{1-E^2}}.$$

Vernachlässigt man die Quadrate der Eccentricität der Erdbahn, welche sehr klein ist, so erhält man [85])

$$\left(\frac{dA}{dt}\right)=\frac{1}{R^2};\quad\left(\frac{dR}{dt}\right)=R'-1.$$

Die vorhergehenden Werthe von $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ werden sich so in folgende verwandeln:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)=(R'-1).\cos A-\frac{\sin A}{R}+\left(\frac{d\varrho}{dt}\right).\cos\alpha-\varrho.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\sin\alpha$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)=(R'-1).\sin A+\frac{\cos A}{R}+\left(\frac{d\varrho}{dt}\right).\sin\alpha+\varrho.\left(\frac{d\alpha}{dt}\right).\cos\alpha.$$

Da nun R, R' und A unmittelbar durch die Sonnentafeln gegeben sind, so wird die Berechnung der sechs Gröſsen x, y, z, $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ leicht seyn, sobald ϱ und $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)$ bekannt seyn werden. Man wird daraus die Elemente der Bahn des Kometen auf folgende Art herleiten.

Der unendlich kleine Sector, welchen der auf die Ekliptik projicirte Radius vector des Kometen während des Zeittheilchens dt beschreibt, ist $\frac{xdy-ydx}{2}$, und es ist sichtbar, daſs dieser Sector positiv oder negativ ist, je nachdem die Bewegung des Kometen rechtläufig oder rückgängig ist; sucht man

85) Man erhält eigentlich $\left(\frac{dR}{dt}\right)=\frac{R'-1}{R'}$. Nun ist $(R')^{-1}=1-E.\sin(A-H)$, also $\frac{R'-1}{R'}$ gleich $(R'-1)-(R'-1)E.\sin(A-H)$. Nun ist $(R'-1)$ von der Form $E.Q$; das zweyte Glied des Werths von $\frac{R'-1}{R'}$ ist also in E^2 multiplicirt, und kann daher vernachlässigt werden.

also die Gröfse $x \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right) - y \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)$, so wird ihr Zeichen die Richtung der Bewegung des Kometen anzeigen.

Um die Lage der Bahn zu bestimmen, nennen wir ϕ ihre Neigung gegen die Ekliptik und I die Länge des Knotens, welches der aufsteigende Knoten seyn wird, wenn die Bewegung des Kometen rechtläufig ist; wir werden dann

$$z = y \cdot \cos I \cdot \operatorname{tang} \phi - x \cdot \sin I \cdot \operatorname{tang} \phi$$

haben. Diese Gleichung wird folgende geben [86]):

$$\operatorname{tang} I = \frac{y \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right) - z \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)}{x \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right) - z \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

$$\operatorname{tang} \phi = \frac{y \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right) - z \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)}{\sin I \cdot \left[x \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right) - y \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)\right]}.$$

Da ϕ beständig positiv und kleiner als ein rechter Winkel seyn mufs, so bestimmt diese Bedingung das Zeichen von sin I; sind aber die Tangente von I und das Zeichen seines Sinus bestimmt, so ist der Winkel I völlig bestimmt. Dieser Winkel ist die Länge des aufsteigenden Knotens der Bahn, wenn die Bewegung rechtläufig ist; ist sie aber rückgängig, so mufs man zu diesem Winkel zwey rechte Winkel addiren, um die Länge dieses Knotens zu erhalten. Es würde einfacher seyn, nur rechtläufige Bewegungen zu brauchen, und dabey die Neigung ϕ der Bahnen von Null bis zu zwey rechten Winkeln sich ändern zu lassen; denn es ist sichtbar, dafs alsdann die rückgängigen Bewegungen einer Neigung entsprechen würden, welche gröfser als ein rechter Winkel ist. In

86) Man hat nämlich $\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot \cos I \cdot \operatorname{tang} \varphi - \left(\frac{dx}{dt}\right) \cdot \sin I \cdot \operatorname{tang} \varphi$,

also $y \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right) - z \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right) = \left[x \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right) - y \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)\right] \cdot \sin I \cdot \operatorname{tang} \varphi$,

und $x \cdot \left(\frac{dz}{dt}\right) - z \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right) = \left[x \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right) - y \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)\right] \cdot \cos I \cdot \operatorname{tang} \varphi$.

Der Quotient der zweyten Theile dieser zwey Gleichungen ist tang I.

diesem Fall haben tang ϕ und $\left[x.\left(\frac{dy}{dt}\right)-y.\left(\frac{dx}{dt}\right)\right]$ dasselbe Zeichen; dieses bestimmt den sin I und folglich den Winkel I, welcher immer die Länge des aufsteigenden Knotens ausdrückt.

Sind a und ea die halbe grofse Axe und die Eccentricität der Bahn, so hat man nach dem 18ten und 19ten Satz, wenn man $\mu = 1$ setzt,

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{r} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2;$$

$$a(1-e^2) = 2r - \frac{r^2}{a} - \left[x.\left(\frac{dx}{dt}\right) + y.\left(\frac{dy}{dt}\right) + z.\left(\frac{dz}{dt}\right)\right]^2.$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt die halbe grofse Axe der Bahn, und die zweyte ihre Eccentricität. Das Zeichen der Function $x.\left(\frac{dx}{dt}\right) + y.\left(\frac{dy}{dt}\right) + z.\left(\frac{dz}{dt}\right)$ giebt zu erkennnen, ob der Komet schon durch sein Perihelium gegangen ist; denn er nähert sich demselben, wenn diese Function negativ ist; im entgegengesetzten Fall entfernt er sich von diesem Punkte.

Es sey T der zwischen der Epoche und dem Durchgang des Kometen durch die Sonnennähe enthaltene Zeitraum; die beiden ersten der Gleichungen (f) des 20sten Satzes werden folgende geben, wenn man bemerkt, dafs, $\mu = 1$ gesetzt, $n = a^{-\frac{3}{2}}$ ist:

$$r = a\,(1 - e\,.\cos u); \qquad T = a^{\frac{3}{2}}.\,(u - e\,.\cos u);$$

die erste dieser Gleichungen giebt den Winkel u, die zweyte die Zeit T. Addirt oder subtrahirt man diese Zeit von der Epoche, je nachdem der Komet sich der Sonnennähe nähert oder sich von ihr entfernt, so erhält man die Zeit seines Durchgangs durch diesen Punkt. Die Werthe von x und von y bestimmen den Winkel, welchen die Projection des Radius vectors r mit der Axe der x macht, und da man den Winkel I kennt, welchen diese Axe und die Knotenlinie macht, so wird man den Winkel haben, welchen diese letztere Linie mit der Projection von r macht, woraus man vermittelst der Neigung ϕ der Bahn den Winkel erhalten wird, welchen die Knotenlinie mit dem Radius vector r macht. Da aber der Winkel u bekannt ist, so wird man vermittelst der dritten der Gleichungen (f) des 20sten Satzes den Winkel v haben, welchen dieser Radius vector mit der Apsidenlinie macht; man wird so den zwischen der Kno-

ten- und Apsidenlinie enthaltenen Winkel, und folglich die Lage der Sonnennähe erhalten. Auf diese Art werden alle Elemente der Bahn bestimmt seyn.

34. Diese Elemente sind nach dem Vorhergehenden in Functionen von ϱ, $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)$ und von bekannten Gröſsen gegeben; und da $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)$ in ϱ durch den 31sten Satz gegeben ist, so werden die Elemente der Bahn Functionen von ϱ und von bekannten Gröſsen seyn. Wäre eins von denselben bekannt, so würde man eine neue Gleichung erhalten, vermittelst welcher man ϱ würde bestimmen können; diese Gleichung würde einen gemeinschaftlichen Divisor mit der Gleichung (4) des 31sten Satzes haben, und wenn man diesen Theiler durch die gewöhnlichen Methoden suchte, so würde man auf eine Gleichung des ersten Grades für ϱ kommen. Man würde überdies eine Bedingungsgleichung zwischen den durch die Beobachtungen gegebenen Gröſsen haben, und diese Gleichung wird Statt haben müssen, wenn das gegebene Element der Kometenbahn zugehören soll.

Wir wollen nun diese Bemerkung auf die Natur anwenden. Hierzu bemerken wir, daſs die Kometenbahnen sehr abgeplattete Ellipsen sind, welche in dem Theil, wo diese Gestirne sichtbar sind, von einer Parabel unmerklich verschieden sind; man kann also ohne merklichen Irrthum $a = \infty$, und folglich $\frac{1}{a} = 0$ setzen. Dann giebt der Ausdruck des vorhergehenden Satzes folgende Gleichung:

$$0 = \frac{2}{r} - \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2}.$$

Substituirt man hernach statt $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ ihre in dem nämlichen Satz gefundenen Werthe, so wird man nach allen Reductionen, wenn man die Quadrate von $R' - 1$ vernachlässigt, folgende Gleichung erhalten [87]:

0 =

87) Setzt man $(R' - 1) \cos A - \frac{\sin A}{R} = B$; $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) \cos \alpha - \varrho \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) \sin \alpha = C$;
$(R' - 1) \sin A + \frac{\cos A}{R} = F$, und $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) \sin \alpha + \varrho \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right) \cos \alpha = G$,

so

$$o = \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \varrho^2 \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left[\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) . \operatorname{tang}\theta + \varrho . \left(\frac{d\theta}{dt}\right) . \cos\theta^{-2}\right]^2$$

$$+ 2 . \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) . \left[(R' - 1) . \cos(A - \alpha) - \frac{\sin(A - \alpha)}{R}\right] \qquad (5)$$

$$+ 2\varrho . \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) . \left[(R' - 1) . \sin(A - \alpha) + \frac{\cos(A - \alpha)}{R}\right] + \frac{1}{R^2} - \frac{2}{r}.$$

Substituirt man in dieser Gleichung statt $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)$ seinen im 31sten Satz gefundenen Werth

$$- \frac{\varrho}{2 . \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)} . \left[\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + \mu' . \sin(A - \alpha)\right],$$

und setzt man alsdann

$$4 . \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 . B = 4 . \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^4 + \left[\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + \mu' . \sin(A - \alpha)\right]^2$$

$$+ \left[\operatorname{tang}\theta . \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + \mu' . \operatorname{tang}\theta . \sin(A - \alpha) - 2 . \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) . \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \cos\theta^{-2}\right]^2$$

$$C = \frac{\left[\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + \mu' . \sin(A - \alpha)\right]}{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)} . \left[\frac{\sin(A - \alpha)}{R} - (R' - 1) . \cos(A - \alpha)\right]$$

so ist $\left(\frac{dx}{dt}\right) = B + C$ und $\left(\frac{dy}{dt}\right) = F + G$, folglich

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = B^2 + C^2 + 2BC + F^2 + G^2 + 2FG.$$

Nun ist $B^2 + F^2 = (R' - 1)^2 + \frac{1}{R^2} = \frac{1}{R^2}$, weil $(R' - 1)^2$ von der Ordnung E^2 ist, und also vernachlässigt werden kann; ferner $C^2 + G^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 . \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$ und $2BC + 2FG =$

$$2 . \left(\frac{d\rho}{dt}\right) . (R' - 1) . (\cos A . \cos\alpha + \sin A . \sin\alpha) + 2\rho . \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) . (R' - 1) . (\sin A . \cos\alpha - \sin\alpha . \cos A)$$

$$- \frac{2\, d\rho}{R} (\sin A . \cos\alpha - \sin\alpha . \cos A) + \frac{2\rho}{R} . \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) (\cos\alpha . \cos A + \sin\alpha . \sin A).$$

Vereinigt man die Summen der Producte der Sinus und Kosinus in ein einziges Glied nach dem bekannten Lehrsatz, und addirt man statt $\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ das Quadrat seines Werthes, ohne es wirklich zu entwickeln, so erhält man den Werth von $\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt}$ und dadurch unmittelbar die Gleichung (5).

$$+ 2 \,.\, \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) \,.\, \left[(R' - 1) \,.\, \sin(A - \alpha) + \frac{\cos(A - \alpha)}{R}\right],$$

so erhält man

$$0 = B \,.\, \varrho^2 + C \,.\, \varrho + \frac{1}{R^2} - \frac{2}{r},$$

und folglich

$$r^2 \,.\, \left[B \,.\, \varrho^2 + C \,.\, \varrho + \frac{1}{R^2}\right]^2 = 4.$$

Diese Gleichung ist nur vom 6ten Grade, und in dieser Rücksicht ist sie einfacher als die Gleichung (4) des 31sten Satzes; sie hat aber bloſs für die Parabel Statt, da hingegen die Gleichung (4) sich auf jeden Kegelschnitt erstreckt.

35. Man sieht aus der vorhergehenden Analysis, daſs die Bestimmung der parabolischen Bahnen der Kometen auf mehr Gleichungen führt, als man unbekannte Gröſsen hat. Verbindet man also diese Gleichungen auf verschiedene Arten, so kann man eben so viel verschiedene Methoden zur Berechnung dieser Bahnen erhalten. Wir wollen nun diejenigen untersuchen, von welchen man die gröſste Genauigkeit in den Resultaten erwarten kann, oder auf welche die Fehler der Beobachtungen am wenigsten einflieſsen.

Der Einfluſs dieser Fehler ist bey den Werthen von $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ am merklichsten; denn man muſs, um sie zu bestimmen, die zweyten Differenzen der geocentrischen Längen und Breiten des Kometen, welche in einem kurzen Zeitraum beobachtet worden sind, nehmen. Diese Differenzen sind aber kleiner als die ersten Differenzen und die Fehler der Beobachtungen machen einen gröſsern Theil derselben aus; übrigens geben die Formeln des 29sten Satzes, welche durch die Vergleichung der Beobachtungen die Werthe von α, θ, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$ und $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ bestimmen, die ersten vier dieser Gröſsen genauer als die zwey letzten; es ist also vortheilhaft, sich so wenig als möglich auf die zweyten Differenziale von α und von θ zu verlassen; und da man sie nicht beide zugleich verwerfen kann, so wird diejenige Methode zu den genauesten Resultaten führen, welche nur die gröſste dieser Gröſsen anwendet.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir die im 31 und 34sten Satze gegebenen Gleichungen wieder vornehmen:

$$\left.\begin{aligned}
r^2 &= \frac{\varrho^2}{\cos\theta^2} + 2R \cdot \varrho \cdot \cos(A-\alpha) + R^2; \\
\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) &= \frac{R \cdot \sin(A-\alpha)}{2 \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)} \cdot \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) - \frac{\varrho \cdot \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)}{2 \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)}; \\
\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) &= -\tfrac{1}{2}\varrho \cdot \left\{\frac{\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)} + 2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \cdot \operatorname{tang}\theta + \frac{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}\right\} \\
&\quad + \frac{R \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos(A-\alpha)}{2 \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right)} \cdot \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right); \\
0 &= \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \varrho^2 \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \left[\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) \cdot \operatorname{tang}\theta + \varrho \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \cdot \cos\theta^{-2}\right]^2 \\
&\quad + 2 \cdot \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) \cdot \left[(R'-1) \cdot \cos(A-\alpha) - \frac{\sin(A-\alpha)}{R}\right] \\
&\quad + 2\varrho \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) \cdot \left[(R'-1) \cdot \sin(A-\alpha) + \frac{\cos(A-\alpha)}{R}\right] + \frac{1}{R^2} - \frac{2}{r}.
\end{aligned}\right\} \text{(L).}$$

Will man $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$ verwerfen, so wird man nur die erste, zweyte und vierte dieser Gleichungen brauchen. Eliminirt man aus der letztern $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)$ vermittelst der zweyten, so wird man eine Gleichung erhalten, welche, von Brüchen befreit, ein in $r^6\,\varrho^2$ multiplicirtes Glied enthalten wird, und noch andere Glieder, welche in gerade und ungerade Potenzen von r und von ϱ multiplicirt seyn werden. Sammelt man auf der einen Seite des Gleichheitszeichens alle in die ungeraden Potenzen von r multiplicirten Glieder, und auf der andern Seite alle gerade Potenzen, und quadrirt man dann jeden dieser Theile, um nur gerade Potenzen von r zu haben, so wird das in $r^6\,\varrho^2$ multiplicirte Glied ein in $r^{12}\,\varrho^4$ multiplicirtes Glied hervorbringen. Substituirt man dann statt r^2 seinen durch die erste der Gleichungen (L) gegebenen Werth, so wird man eine Endgleichung

vom 16ten Grade für ϱ erhalten. Es ist aber einfacher, anstatt diese Gleichungen zu bilden und sie dann aufzulösen, durch Versuche den drey vorhergehenden Gleichungen Genüge zu thun.

Will man $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$ verwerfen, so muſs man die erste, dritte und vierte der Gleichungen (L) gebrauchen. Diese drey Gleichungen werden ebenfalls auf eine Gleichung des 16ten Grades für ϱ führen, und man kann ihnen leicht durch Versuche Genüge thun.

Die beiden vorhergehenden Methoden scheinen mir die genauesten zu seyn, welche man in der Bestimmung der parabolischen Bahnen der Kometen anwenden kann. Es ist selbst unumgängliche Nothwendigkeit, sie zu gebrauchen, wenn die Bewegung des Kometen in Länge oder in Breite unmerklich oder so klein ist, daſs die Fehler der Beobachtungen ihre zweyten Differenzen merklich ändern; denn in diesem Fall muſs man diejenige der Gleichungen (L) verwerfen, welche diese Differenz enthält. Ob man aber schon in dieser Methode nur drey der Gleichungen braucht, so ist die vierte Gleichung doch nützlich, um unter allen reellen und positiven Werthen von ϱ, welche dem System der drey übrigen Gleichungen Genüge thun, denjenigen, welcher der wahre ist und gebraucht werden muſs, zu bestimmen.

36. Die nach dem Vorhergehenden bestimmten Elemente der Bahn eines Kometen würden genau seyn, wenn die Werthe von α, θ, und ihrer ersten und zweyten Differenziale strenge genau wären; denn wir haben auf die Eccentricität der Erdbahn auf eine sehr einfache Art vermittelst des Radius vectors R' der Erde, welcher ihrer um einen rechten Winkel vermehrten Anomalie entspricht, Rücksicht genommen, und wir haben uns bloſs erlaubt, das Quadrat dieser Eccentricität zu vernachlässigen, weil dieser Bruch so klein ist, daſs es keinen merklichen Einfluſs auf die Resultate haben kann, wenn man ihn wegläſst. Es sind aber θ, α und ihre Differenziale stets einiger Unrichtigkeit unterworfen, theils wegen der Fehler der Beobachtungen, theils weil wir diese Differenziale nur Näherungsweise aus den Beobachtungen hergeleitet haben. Es ist also nothwendig, die Elemente vermittelst dreyer von einander entfernten Beobachtungen zu verbessern, welches man auf unendlich viel Arten thun kann. Denn wenn man zwey Gröſsen, welche sich auf die Bewegung eines Kometen beziehen, beynahe kennt, z. B. die zweyen Beobachtungen zugehörenden Radius vectors, oder die Lage

des Knotens und die Neigung der Bahn, so berechne man anfangs die Beobachtungen mit diesen Gröſsen, und hernach mit andern von ihnen nur sehr wenig verschiedenen; das Gesetz der Unterschiede der Resultate wird leicht die Verbesserungen zu erkennen geben, welche man an diesen Gröſsen anbringen muſs. Unter den Verbindungen von zwey zu zwey der Gröſsen, welche sich auf die Bewegung des Kometen beziehen, giebt es eine, welche die leichteste Berechnung darbieten muſs, und welche deswegen verdient aufgesucht zu werden: denn es ist in der That in einem so verwickelten Problem wichtig, dem Berechner jede überflüssige Operation zu ersparen. Die beiden Elemente, welche mir diesen Vortheil darzubieten schienen, sind der kleinste Abstand von der Sonne, und die Zeit des Durchgangs des Kometen durch die Sonnennähe; man kann sie nicht nur leicht aus den Werthen von ϱ und $\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)$ herleiten, sondern sie auch bequem durch die Beobachtungen verbessern, ohne genöthigt zu seyn, bey jeder Veränderung die man an ihnen anbringt, die übrigen entsprechenden Elemente der Bahn zu bestimmen.

Wir wollen die im 19ten Satze gefundene Gleichung wieder vornehmen:

$$a(1 - e^2) = 2r - \frac{r^2}{a} - \frac{r^2 . dr^2}{dt^2},$$

wo $a(1 - e^2)$ der halbe Parameter des Kegelschnitts ist, dessen halbe groſse Axe a, und dessen Eccentricität ea ist; in der Parabel, wo a unendlich und e der Einheit gleich ist, ist $a(1 - e^2)$ dem doppelten kleinsten Abstand von der Sonne gleich; es sey dieser kleinste Abstand gleich D, so verwandelt sich die vorhergehende Gleichung, für diese krumme Linie, in folgende:

$$D = r - \tfrac{1}{2} . \left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2.$$

Nun ist $\frac{r\,dr}{dt} = \frac{\frac{1}{2}\,d.r^2}{dt^2}$; substituirt man ferner statt r^2 seinen Werth $\frac{\varrho^2}{\cos\theta^2} + 2R.\varrho.\cos(A - \alpha) + R^2$, und statt $\left(\frac{dR}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dA}{dt}\right)$ ihre im 33sten Satze gefundenen Werthe, so erhält man

$$\frac{r\,dr}{dt} = \frac{\varrho}{\cos\theta^2} . \left[\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) + \varrho . \left(\frac{d\theta}{dt}\right) . \operatorname{tang}\theta\right] + R . \left(\frac{d\varrho}{dt}\right) . \cos(A - \alpha)$$

$$+ \varrho \cdot \left[(R' - 1) \cdot \cos(A - \alpha) - \frac{\sin(A - \alpha)}{R} \right]$$
$$+ \varrho \cdot R \cdot \left(\frac{d\alpha}{dt}\right) \cdot \sin(A - \alpha) + R \cdot (R' - 1).$$

Es sey diese Gröſse gleich P; ist sie negativ, so nimmt der Radius vector r ab, und der Komet bewegt sich gegen seine Sonnennähe, entfernt sich aber von derselben, wenn sie positiv ist. Man hat hernach

$$D = r - \tfrac{1}{2} P^2.$$

Die Winkelentfernung v des Kometen von seiner Sonnennähe wird durch die Polargleichung der Parabel;

$$\cos \tfrac{1}{2} v^2 = \frac{D}{r}$$

bestimmt werden. Man wird endlich vermittelst der allgemeinen Tafel der Bewegung der Kometen die Zeit erhalten, welche, um den Winkel v zu beschreiben, angewendet wird. Addirt oder subtrahirt man diese Zeit von der gegebenen Epoche, je nachdem P negativ oder positiv ist, so erhält man die Zeit des Durchgangs des Kometen durch die Sonnennähe.

37. Vereinigt man diese verschiedenen Resultate, so wird man folgende Methode erhalten, um die parabolischen Bahnen der Kometen zu bestimmen.

Allgemeine Methode zur Bestimmung der Kometenbahnen.

Diese Methode hat zwey Theile: im ersten werden wir die Mittel geben, den kleinsten Abstand von der Sonne und die Zeit seines Durchgangs durch die Sonnennähe beynahe zu erhalten; im zweyten werden wir diese Elemente als beynahe bekannt voraussetzen, und daraus alle Elemente der Bahn genau bestimmen.

Genäherte Bestimmung des kleinsten Abstandes des Kometen von der Sonne und der Zeit seines Durchgangs durch die Sonnennähe.

Man wird 3, 4 oder 5 u. s. w., so weit es möglich ist, gleich weit von einander entfernte Beobachtungen des Kometen wählen; man wird mit vier Beobachtungen einen Raum von 30°; mit fünf Beobachtungen einen Raum von 36° oder 40° umfassen können, und so für die übrigen; der zwischen den Beobachtungen durchlaufene Raum muſs aber desto beträchtlicher seyn, je gröſser ihre Anzahl ist, damit der Einfluſs ihrer Fehler vermindert werde.

Dieses vorausgesetzt, sollen β, β', β'' . . . die auf einander folgenden geocentrischen Längen des Kometen seyn; θ, θ', θ'' . . . die zugehörigen Breiten, welche positiv oder negativ angenommen werden müssen, je nachdem sie nördlich oder südlich sind. Man wird die Differenz $\beta' - \beta$ durch die Anzahl der Tage, welche die erste Beobachtung von der zweyten trennen, dividiren; eben so die Differenz $\beta'' - \beta'$ durch die Anzahl der Tage, welche die zweyte Beobachtung von der dritten trennen, und die Differenz $\beta''' - \beta''$ durch die Anzahl der Tage, welche die dritte Beobachtung von der vierten trennen, und so für die übrigen. Diese Quotienten sollen $\delta\beta$, $\delta\beta'$, $\delta\beta''$. . . seyn.

Man wird die Differenz $\delta\beta' - \delta\beta$ durch die Anzahl der Tage dividiren, welche die erste Beobachtung von der dritten trennen; eben so die Differenz $\delta\beta'' - \delta\beta'$ durch die Anzahl der Tage, welche die zweyte Beobachtung von der vierten trennen, und die Differenz $\delta\beta''' - \delta\beta''$ durch die Anzahl der Tage, welche die dritte Beobachtung von der fünften trennen, und so für die übrigen. Diese Quotienten sollen $\delta^2\beta$, $\delta^2\beta'$, $\delta^2\beta''$. . . seyn.

Man dividire ferner die Differenz $\delta^2\beta' - \delta^2\beta$ durch die Anzahl der Tage, welche die erste Beobachtung von der vierten trennen; eben so $\delta^2\beta'' - \delta^2\beta'$ durch die Anzahl der Tage, welche die zweyte Beobachtung von der fünften trennen, und so für die übrigen. Es sollen diese Quotienten $\delta^3\beta$, $\delta^3\beta'$. . . seyn. Man wird so fortfahren bis man auf $\delta^{n-1}\beta$ gekommen, wenn n die Anzahl der Beobachtungen ist.

Hierauf nehme man eine mittlere oder beynahe mittlere Epoche zwischen den Zeiten der beiden äussersten Beobachtungen an; nennt man nun i, i', i'' u. s. w. die Anzahl der Tage, um welche sie auf jede Beobachtung folgt, wo i, i', i'' . . . negativ gesetzt werden müssen, wenn die Beobachtungen früher als die Epoche sind, so wird die Länge des Kometen nach einer kleinen Anzahl z, von der Epoche an gezählter, Tage durch folgende Formel ausgedrückt werden:

$$\beta - i\,.\,\delta\beta + ii'\,.\,\delta^2\beta - ii'i''\,.\,\delta^3\beta + \ldots$$
$$+ z\,.\,[\delta\beta - (i+i')\,.\,\delta^2\beta + (ii'+ii''+i'i'')\,.\,\delta^3\beta - (ii'i''+ii'i'''+ii''i'''+i'i''i''')\,.\,\delta^4\beta + \ldots]$$
$$+ z^2\,.\,[\delta^2\beta - (i+i'+i'')\,.\,\delta^3\beta + (ii'+ii''+ii'''+i'i''+i'i'''+i''i''')\,.\,\delta^4\beta - \ldots] \quad (\mathrm{p}).$$

Die Koefficienten von $-\delta\beta$, $+\delta^2\beta$, $-\delta^3\beta$. . . in dem von z unabhängigen Theile sind 1) die Zahl i; 2) das Product der zwey Zahlen i und i'; 3) das Product der drey Zahlen i, i', i'' u. s. w.

Die Koefficienten von $-\delta^2\beta$, $+\delta^3\beta$, $-\delta^4\beta$... in dem mit z multiplicirten Theile sind: 1) die Summe der zwey Zahlen i und i', 2) die Summe aller Producte aus zwey Factoren der drey Zahlen i, i', i''; 3) die Summe aller Producte aus drey Factoren der vier Zahlen i, i', i'', i''' u. s. w.

Die Koefficienten von $-\delta^3\beta$, $+\delta^4\beta$, $-\delta^5\beta$... in dem mit z^2 multiplicirten Theil sind: 1) die Summe der drey Zahlen i, i', i''; 2) die Summe aller Producte aus zwey Factoren der vier Zahlen i, i', i'', i'''; 3) die Summe aller Producte aus drey Factoren der fünf Zahlen i, i', i'', i''', i'''' u. s. w.

Es ist eben so einfach, anstatt diese Producte zu formiren, die Function

$$\beta + (z-i) \,.\, \delta\beta + (z-i) \,.\, (z-i') \,.\, \delta^2\beta + (z-i) \,.\, (z-i') \,.\, (z-i'') \,.\, \delta^3\beta + \ldots$$

zu entwickeln, indem man die Potenzen von z, welche höher als das Quadrat sind, wegläſst, welches die vorhergehende Formel giebt.

Verfährt man auf eine ähnliche Weise mit den beobachteten geocentrischen Breiten des Kometen, so wird die geocentrische Breite nach z, von der Epoche an gezählten, Tagen durch die Formel (p) ausgedrückt werden, wenn man in ihr β in γ verwandelt. Man nenne (q) die so verwandelte Formel.

Dieses vorausgesetzt, sey α der von z unabhängige Theil der Formel (p); θ eben derselbe Theil in der Formel (q).

Man verwandele den Koefficienten von z in der Formel (p) in Sekunden, und ziehe vom Tafellogarithmen dieser Anzahl Sekunden, den Logarithmen 4,0394622 ab, so wird man den Logarithmen einer Zahl erhalten, welche wir mit a bezeichnen.

Man verwandele den Koefficienten von z^2 in derselben Formel in Sekunden; vom Logarithmen dieser Anzahl Sekunden ziehe man den Logarithmen 1,9740144 ab, so wird man den Logarithmen einer Zahl haben, welche wir mit b bezeichnen.

Verwandelt man eben so die Koefficienten von z und z^2 in der Formel (q) in Sekunden, und zieht man vom Logarithmen dieser Sekunden die Logarithmen 4,0394622 und 1,9740144 ab, so erhält man die Logarithmen zweyer Zahlen, welche wir mit h und l bezeichnen wollen.

Die Genauigkeit der Methode hängt von der Genauigkeit der Werthe von a, b, h, l ab, und da ihre Berechnung leicht ist, so muſs man die Beobachtungen so wählen und so vervielfältigen, daſs man sie mit aller Genauigkeit erhält, welche die Beobachtungen verstatten. Man sieht leicht, daſs diese Gröſsen

nichts

nichts anders sind, als die Gröſsen $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$, $\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$ und $\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$, welche wir um mehrerer Einfachheit willen durch die vorhergehenden Buchstaben ausgedrückt haben.

Ist die Anzahl der Beobachtungen ungerade, so kann man für die Epoche die Zeit der mittlern Beobachtung nehmen; dies erspart die Berechnung der von z unabhängigen Theile in den beiden vorhergehenden Formeln; denn es ist sichtbar, daſs diese Theile alsdann der Länge und Breite der mittlern Beobachtung gleich sind.

Hat man so die Werthe von α, a, b, θ, h und l bestimmt, so wird man die Länge der Sonne für die als Epoche angenommene Zeit bestimmen; es sey E diese Länge, R die entsprechende Entfernung der Erde von der Sonne, und R' die Entfernung, welche dem um einen rechten Winkel vermehrten E entspricht, so wird man folgende Gleichungen bilden:

$$r^2 = \frac{x^2}{\cos\theta^2} - 2Rx \,.\, \cos(E-\alpha) + R^2 \quad (1);$$

$$y = \frac{R \,.\, \sin(E-\alpha)}{2a} \,.\, \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) - \frac{bx}{2a} \quad (2);$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -x \,.\, \left[h \,.\, \tan\theta + \dfrac{l}{2h} + \dfrac{a^2 \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\theta}{2h}\right. \\ \qquad \left. + \dfrac{R \,.\, \sin\theta \,.\, \cos\theta}{2h} \,.\, \cos(E-\alpha) \,.\, \left(\dfrac{1}{R^3} - \dfrac{1}{r^3}\right)\right] \end{array}\right\} (3);$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = y^2 + a^2x^2 + \left(y.\tan\theta + \dfrac{hx}{\cos\theta^2}\right)^2 + 2y.\left[\dfrac{\sin(E-\alpha)}{R} - (R'-1).\cos(E-\alpha)\right] \\ \qquad - 2ax \,.\, \left[(R'-1)\sin(E-\alpha) + \dfrac{\cos(E-\alpha)}{R}\right] + \dfrac{1}{R^2} - \dfrac{2}{r} \end{array}\right\} (4).$$

Um aus diesen Gleichungen die Werthe der unbekannten Gröſsen x, y und r zu erhalten, wird man zuerst bemerken, ob, das Zeichen abgerechnet, b gröſser oder kleiner als l ist. Im ersten Fall wird man die Gleichungen (1), (2) und (4) brauchen. Man wird eine erste Hypothese über x bilden, und es z. B. der Einheit gleich setzen; man wird dadurch vermittelst der Gleichungen (1) und (2) die Werthe von ϱ und y erhalten. Substituirt man alsdann diese Werthe in die Gleichung (4), und ist der Rest gleich Null, so ist dies ein Beweis, daſs der Werth von x richtig angenommen worden ist; ist aber dieser Rest negativ, so

mufs man den Werth von x vermehren; man mufs ihn hingegen vermindern, wenn der Rest positiv ist. Da aber diese unbekannte Gröfse mehrere reelle und positive Werthe haben kann, so mufs man denjenigen wählen, welcher der Gleichung (3) genau oder beynahe Genüge thut.

Im zweyten Fall, wenn nämlich $l > b$ ist, wird man die Gleichungen (1), (3) und (4) brauchen, und alsdann wird die Gleichung (2) zur Prüfung dienen. Hat man auf diese Art die Werthe von x, y und r, so wird man die Gröfse P suchen.

$$P = \frac{x}{\cos \theta^2} \cdot (y + hx \cdot \operatorname{tang} \theta) - Ry \cdot \cos (E - \alpha)$$
$$+ x \cdot \left[\frac{\sin (E - \alpha)}{R} - (R' - 1) \cdot \cos (E - \alpha) \right] - R a x . \sin (E - \alpha) + R . (R' - 1).$$

Der kleinste Abstand des Kometen von der Sonne, D, wird

$$D = r - \tfrac{1}{2} P^2,$$

der Kosinus seiner Anomalie v wird durch die Gleichung

$$\cos \tfrac{1}{2} v^2 = \frac{D}{r}$$

gegeben werden, und man wird daraus vermittelst der allgemeinen Tafel der Bewegung der Kometen die Zeit schliefsen, welche er anwendet, um den Winkel v zu durchlaufen. Man mufs diese Zeit, um den Augenblick des Durchgangs durch die Sonnennähe zu erhalten, zur Epoche addiren, wenn P negativ ist, und sie davon abziehen, wenn P positiv ist, weil der Komet im ersten Fall sich der Sonnennähe nähert, im zweyten aber sich von ihr entfernt.

Hat man so den kleinsten Abstand des Kometen von der Sonne und die Zeit seines Durchgangs durch die Sonnennähe beynahe gefunden, so wird man dieselben durch die folgende Methode verbessern können, welche den Vortheil hat, von der Kenntnifs der genäherten Werthe der übrigen Elemente der Bahn unabhängig zu seyn.

Genaue Bestimmung der Elemente der Bahn, wenn man den kleinsten Abstand des Kometen von der Sonne, und die Zeit seines Durchgangs durch die Sonnennähe beynahe kennt.

Man wird zuerst drey von einander entfernte Beobachtungen des Kometen wählen; vermittelst des nach dem Vorhergehenden bestimmten kleinsten Abstandes des Kometen von der Sonne und der Zeit seines Durchgangs durch die Son-

nennähe, wird man für die Zeiten der drey Beobachtungen die drey Anomalien des Kometen und die drey zugehörigen Radius vectors berechnen. Es sollen v, v', v'' diese Anomalien seyn, wo diejenigen, welche vor dem Durchgang durch die Sonnennähe fallen, negativ gesetzt werden müssen; es sollen überdies r, r', r'' die entsprechenden Radius vectors des Kometen seyn, so werden $v'-v$, $v''-v$ die zwischen r und r' und zwischen r und r'' enthaltenen Winkel seyn; es sey U der erste dieser Winkel und U' der zweyte. Wir werden noch α, α', α'' die drey beobachteten geocentrischen Längen des Kometen nennen, welche auf ein unveränderliches Aequinoctium bezogen werden müssen; θ, θ', θ'' seine drey geocentrischen Breiten, wo die südlichen Breiten negativ gesetzt werden müssen; β, β', β'' seine drey entsprechenden heliocentrischen Längen, und ϖ, ϖ', ϖ'' die drey heliocentrischen Breiten. Man nenne endlich E, E', E'' die drey zugehörenden Längen der Sonne; R, R', R'' die drey Entfernungen der Sonne vom Mittelpunkt der Erde.

Man stelle sich vor, daſs der Buchstabe S den Mittelpunkt der Sonne, T den der Erde, C den des Kometen, und C' seine Projection auf die Ebene der Ekliptik anzeigt. Der Winkel STC' ist der Unterschied der geocentrischen Länge der Sonne und des Kometen; addirt man den Logarithmen des Kosinus des Winkels STC' zum Kosinus der geocentrischen Breite des Kometen, so wird man den Logarithmen des Kosinus des Winkels STC erhalten; man wird also im Dreyeck STC die Seite ST oder R, die Seite SC oder r, und den Winkel STC kennen, und folglich durch die Trigonometrie den Winkel CST erhalten. Man wird alsdann die heliocentrische Breite ϖ des Kometen vermittelst der Formel

$$\tang \varpi = \frac{\sin \theta \cdot \sin CST}{\sin CTS}$$

erhalten. Der Winkel TSC' ist die Seite eines rechtwinklichten sphärischen Dreyecks, dessen Hypotenuse der Winkel TSC, und dessen eine Seite der Winkel ϖ ist; hieraus wird man leicht den Winkel TSC' und folglich die heliocentrische Länge β des Kometen erhalten.

Man wird auf eben diese Art ϖ', β', ϖ'', β'' finden, und die Werthe von β, β', β'' werden zu erkennen geben, ob die Bewegung des Kometen rechtläufig oder rückgängig ist.

Verlängert man die beiden Breitenkreise ϖ und ϖ' bis zum Pol der Ekliptik, so werden sie sich daselbst unter einem Winkel, gleich $\beta'-\beta$, schnei-

den, und in dem sphärischen Dreyeck, welches dieser Winkel und die Seiten $\frac{\pi}{2} - \varpi$, und $\frac{\pi}{2} - \varpi'$ bilden, wo π die halbe Peripherie ist, wird die dem Winkel $\beta' - \beta$ gegenüberstehende Seite der Winkel an der Sonne seyn, welchen die beiden Radius vectors r und r' einschliefsen. Man wird sie leicht vermittelst der sphärischen Trigonometrie oder durch die folgende Formel bestimmen:

$$\sin \tfrac{1}{2} V^2 = \cos \tfrac{1}{2} (\varpi + \varpi')^2 - \cos \tfrac{1}{2} (\beta' - \beta)^2 \, . \cos \varpi \, . \cos \varpi',$$

in welcher V diesen Winkel bezeichnet, so dafs, wenn man A den Winkel nennt, wovon das Quadrat des Sinus gleich $\cos \frac{1}{2} (\beta' - \beta)^2 \, . \cos \varpi \, . \cos \varpi'$ ist, und welchen man leicht durch die Tafeln erhält,

$$\sin \tfrac{1}{2} V^2 = \cos (\tfrac{1}{2} \varpi + \tfrac{1}{2} \varpi' + A) \, . \cos (\tfrac{1}{2} \varpi + \tfrac{1}{2} \varpi' - A)$$

seyn wird. Bezeichnet man eben so durch V' den Winkel, welchen die zwey Radius vectors r und r'' einschliefsen, so erhält man

$$\sin \tfrac{1}{2} V'^2 = \cos (\tfrac{1}{2} \varpi + \tfrac{1}{2} \varpi'' + A') \, . \cos (\tfrac{1}{2} \varpi + \tfrac{1}{2} \varpi'' - A'),$$

wo A' der Werth ist, welchen A erhält, wenn man in ihm ϖ' und β' in ϖ'' und β'' verwandelt.

Wenn nun der kleinste Abstand des Kometen von der Sonne, und die Zeit seines Durchgangs durch die Sonnennähe genau bestimmt worden, und wenn die Beobachtungen vollkommen genau wären, so würde man

$$V = U; \qquad V' = U'$$

haben; da dies aber fast niemals sich ereignen wird, so setze man

$$m = U - V; \qquad m' = U' - V'.$$

Wir bemerken hierbey, dafs die Berechnung des Dreyecks STC für den Winkel CTS zwey verschiedene Werthe giebt; die Natur der Bewegung des Kometen wird meistens zu erkennen geben, welchen von beiden man gebrauchen mufs, vorzüglich wenn beide Werthe sehr von einander verschieden sind. Denn alsdann wird der eine derselben den Kometen mehr von der Erde entfernen als der andere, und man wird leicht aus der scheinbaren Bewegung des Kometen zur Zeit der Beobachtung beurtheilen können, welcher vorgezogen werden mufs. Bleibt aber einige Ungewifsheit in dieser Rücksicht übrig, so kann man sie immer dadurch heben, dafs man den Werth wählt, durch welchen V und V' wenig von U und U' verschieden werden.

Man wird alsdann eine zweyte Hypothese machen, in welcher man dieselbe Zeit des Durchgangs durch die Sonnennähe, wie oben, beybehalten, den kleinsten Abstand von der Sonne aber um eine kleine Gröſse, z. B. um den 50sten Theil seines Werthes, ändern wird, und man wird in dieser Hypothese die Werthe von $U - V$ und $U' - V'$ suchen; es sey alsdann

$$n = U - V; \qquad n' = U' - V'.$$

Man mache endlich eine dritte Hypothese, in welcher man den nämlichen kleinsten Abstand von der Sonne, wie in der ersten Hypothese, behält, die Zeit des Durchgangs durch die Sonnennähe aber um einen halben oder einen Tag, mehr oder weniger, sich ändern läſst. Man suche in dieser neuen Hypothese die Werthe von $U - V$ und $U' - V'$. Es sey alsdann

$$p = U - V; \qquad p' = U' - V'.$$

Nennt man nun u die Zahl, durch welche man die angenommene Aenderung des kleinsten Abstandes von der Sonne multipliciren muſs, um die wahre Aenderung desselben zu haben, und t die Zahl, durch welche man die angenommene Aenderung der Zeit des Durchgangs durch die Sonnennähe multipliciren muſs, um die wahre Zeit des Durchgangs zu erhalten, so wird man die folgenden zwey Gleichungen haben:

$$(m - n) \,.\, u + (m - p) \,.\, t = m;$$
$$(m' - n') \,.\, u + (m' - p') \,.\, t = m';$$

hieraus wird man u und t erhalten, und folglich den verbesserten kleinsten Abstand von der Sonne, und die wahre Zeit des Durchgangs des Kometen durch die Sonnennähe.

Die vorhergehenden Verbesserungen setzen voraus, daſs die durch die erste Annäherung bestimmten Elemente der Wahrheit nahe genug sind, um ihre Fehler als unendlich klein behandeln zu können. Wenn aber die zweyte Annäherung noch nicht hinlänglich scheint, so kann man eine dritte anwenden, wenn man mit den schon verbesserten Elementen eben so verfährt, wie mit den ersten; nur muſs man darauf aufmerksam seyn, kleinere Aenderungen an ihnen anzubringen. Es wird selbst hinreichend seyn, durch diese verbesserten Elemente die Werthe von $U - V$ und von $U' - V'$ zu berechnen; man bezeichne sie mit M und M', und substituire sie statt m und m' in den zweyten Theilen der beiden vorigen Gleichungen. Man wird so zwey neue Gleichungen erhalten,

welche die Werthe von u und t, wodurch die Verbesserungen dieser neuen Elemente gegeben sind, bestimmen werden.

Hat man so den wahren kleinsten Abstand von der Sonne, und die wahre Zeit des Durchgangs des Kometen durch die Sonnennähe erhalten, so wird man daraus auf folgende Art die übrigen Elemente der Bahn bestimmen.

Es sey j die Länge des Knotens, und zwar des aufsteigenden, wenn die Bewegung des Kometen rechtläufig ist, und ϕ die Neigung der Bahn, so erhält man, wenn man die erste und letzte Beobachtung mit einander vergleicht,

$$\text{tang}\, j = \frac{\text{tang}\,\varpi\,.\,\sin\beta'' - \text{tang}\,\varpi''\,.\,\sin\beta}{\text{tang}\,\varpi\,.\,\cos\beta'' - \text{tang}\,\varpi''\,.\,\cos\beta},$$

$$\text{tang}\,\phi = \frac{\text{tang}\,\varpi''}{\sin(\beta'' - j)}.$$

Da man so die drey Beobachtungen paarweise mit einander vergleichen kann, so wird es genauer seyn, diejenigen zu wählen, welche den vorhergehenden Brüchen die gröfsten Zähler und Nenner geben.

Da tang j auf gleiche Art den zwey Winkeln j und $\pi + j$ zugehören kann, wenn j der kleinste der positiven Winkel ist, welchen sein Werth zugehört, so mufs man, um denjenigen der beiden Winkel zu bestimmen, welchen man wählen mufs, bemerken, dafs ϕ positiv und kleiner als ein rechter Winkel ist, und dafs also sin $(\beta'' - j)$ und tang ϖ'' dasselbe Zeichen haben müssen. Diese Bedingung wird den Winkel j bestimmen, und dieser Winkel wird die Lage des aufsteigenden Knotens seyn, wenn die Bewegung des Kometen rechtläufig ist; ist aber seine Bewegung rückläufig, so wird man zwey rechte Winkel zu j hinzusetzen müssen, um die Lage dieses Knotens zu haben.

Die Hypotenuse des sphärischen Dreyecks, dessen zwey Seiten $\beta'' - j$ und ϖ'' sind, ist die Entfernung des Kometen von seinem aufsteigenden Knoten in der dritten Beobachtung, und der Unterschied zwischen v'' und dieser Hypotenuse ist der auf der Bahn gezählte Zwischenraum zwischen dem Knoten und dem Sonnennähepunkt.

Will man der Theorie eines Kometen alle Genauigkeit geben, welche die Beobachtungen verstatten, so mufs man sie auf die besten Beobachtungen vereinigt gründen, welches man auf folgende Art wird thun können. Man bezeichne mit einem Strich, zwey Strichen u. s. w. die Buchstaben m, n, p, wenn sie sich auf die zweyte, dritte u. s. w. Beobachtung beziehen, von welchen jede

mit der ersten verglichen worden; man wird so die Gleichungen formiren:

$$(m - n) \cdot u + (m - p) \cdot t = m;$$
$$(m' - n') \cdot u + (m' - p') \cdot t = m';$$
$$(m'' - n'') \cdot u + (m'' - p'') \cdot t = m'';$$
etc.

Verbindet man nun diese Gleichungen unter einander, auf die Art, welche zur Bestimmung von u und t am vortheilhaftesten ist, so wird man die Verbesserungen des kleinsten Abstandes von der Sonne, und der Zeit des Durchgangs durch die Sonnennähe erhalten, welche auf alle Beobachtungen vereinigt gegründet sind. Man wird daraus die Werthe von β, β', β'' . . . ϖ, ϖ', ϖ'' . . . herleiten, und man wird folgende Gleichung haben [88]):

$$\tang j = \frac{\tang\varpi \cdot (\sin\beta' + \sin\beta'' + \ldots) - \sin\beta \cdot (\tang\varpi' + \tang\varpi'' + \ldots)}{\tang\varpi \cdot (\cos\beta' + \cos\beta'' + \ldots) - \cos\beta \cdot (\tang\varpi' + \tang\varpi'' + \ldots)}$$

$$\tang \phi = \frac{\tang\varpi' + \tang\varpi'' + \ldots}{\sin(\beta' - j) + \sin(\beta'' - j) + \ldots}.$$

38. Es giebt einen, in der That sehr seltenen, Fall, wo die Bahn eines Kometen auf eine strenge und einfache Art bestimmt werden kann: dies ist der Fall wo der Komet in seinen beiden Knoten beobachtet worden ist. Die gerade Linie, welche seine beiden beobachteten Lagen vereinigt, geht alsdann durch den Mittelpunkt der Sonne, und fällt mit der Knotenlinie zusammen. Die Länge dieser geraden Linie ist durch die zwischen den zwey Beobachtungen verflossene Zeit bestimmt. Nennt man nun T diese Zeit in Decimaltheilen des Tages ausgedrückt, und bezeichnet man mit c die gerade Linie, von der wir so eben sprechen, so hat man nach dem 27sten Satz

$$c = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{T^2}{(9^t{,}688724)^2}}.$$

88) Diese zwey Formeln gründen sich darauf, daſs, wenn man eine Anzahl Brüche hat, welche alle denselben Werth haben, daſs dann die Summe aller Zähler, durch die Summe aller Nenner dividirt, denselben Werth haben muſs. Sind diese Brüche nicht vollkommen, sondern nur sehr nahe einander gleich, so ist der so erhaltene Werth der mittlere Werth dieses Bruchs. Uebrigens ist es oft vortheilhafter, sich der indirecten Methode zu bedienen, da man die Werthe von φ und j schon beynahe kennt. Man wird dann die Beobachtungen so untereinander vergleichen können, wie es zur Bestimmung des einen oder des andern dieser Elemente am vortheilhaftesten ist, und auch diejenigen Beobachtungen, welche zu sehr von den übrigen abweichen, ausschlieſsen können.

Es sey nun β die heliocentrische Länge des Kometen im Augenblick der ersten Beobachtung, r sein Radius vector, ϱ seine Entfernung von der Erde, und α seine geocentrische Länge. Es sey noch R der Halbmesser der Erdbahn im nämlichen Augenblick, und E die entsprechende Länge der Sonne, so hat man

$$r \,.\, \sin\beta = \varrho \,.\, \sin\alpha - R \,.\, \sin E;$$
$$r \,.\, \cos\beta = \varrho \,.\, \cos\alpha - R \,.\, \cos E.$$

Die heliocentrische Länge des Kometen im Augenblick der zweyten Beobachtung wird $\pi + \beta$ seyn; bezeichnet man die Gröfsen r, α, ϱ, R und E für denselben Augenblick mit einem Strich, so erhält man

$$r' \,.\, \sin\beta = R' \,.\, \sin E' - \varrho' \,.\, \sin\alpha';$$
$$r' \,.\, \cos\beta = R' \,.\, \cos E' - \varrho' \,.\, \cos\alpha'.$$

Diese vier Gleichungen geben

$$\text{tang}\,\beta = \frac{\varrho \,.\, \sin\alpha - R \,.\, \sin E}{\varrho \,.\, \cos\alpha - R \,.\, \cos E} = \frac{\varrho' \,.\, \sin\alpha' - R' \,.\, \sin E'}{\varrho' \,.\, \cos\alpha' - R' \,.\, \cos E'},$$

und hieraus erhält man

$$\varrho' = \frac{RR' \,.\, \sin(E' - E) - R\varrho \,.\, \sin(\alpha - E')}{\varrho \,.\, \sin(\alpha' - \alpha) - R \,.\, \sin(\alpha' - E')}.$$

Man hat ferner

$$(r + r') \,.\, \sin\beta = \varrho \,.\, \sin\alpha - \varrho' \,.\, \sin\alpha' - R \,.\, \sin E + R' \,.\, \sin E'$$
$$(r + r') \,.\, \cos\beta = \varrho \,.\, \cos\alpha - \varrho' \,.\, \cos\alpha' - R \,.\, \cos E + R' \,.\, \cos E'.$$

Quadrirt man diese beiden Gleichungen und addirt sie, substituirt dann c statt $r + r'$, so erhält man

$$\begin{aligned} c^2 = {} & R^2 - 2\,RR' \,.\, \cos(E' - E) + R'^2 \\ & + 2\varrho \,.\, [R' \,.\, \cos(\alpha - E') - R \,.\, \cos(\alpha - E)] \\ & + 2\varrho \,.\, [R \,.\, \cos(\alpha' - E) - R' \,.\, \cos(\alpha' - E')] \\ & + \varrho^2 - 2\,\varrho\varrho' \,.\, \cos(\alpha' - \alpha) + \varrho'^2. \end{aligned}$$

Substituirt man in dieser Gleichung statt ϱ' seinen vorhergehenden Werth in ϱ, so wird man eine Gleichung vom vierten Grade für ϱ erhalten, welche man durch die gewöhnlichen Methoden wird auflösen können. Es wird aber einfacher seyn, für ϱ irgend einen Werth anzunehmen, daraus den Werth von ϱ' zu schliefsen, und dann die Werthe von ϱ und ϱ' in die vorhergehende Gleichung zu setzen und zu sehen, ob sie ihr Genüge thun. Eine kleine Anzahl Versuche wird zureichen, um ϱ und ϱ' mit Genauigkeit zu geben.

Ver-

Vermittelst dieser Grösen wird man β, r und r' haben. Nennt man v den Winkel, welchen der Radius vector r mit dem kleinsten Abstand von der Sonne, welchen wir mit D bezeichnen, macht, so wird $\pi - v$ der Winkel seyn, welchen derselbe kleinste Abstand mit dem Radius vector r' macht; man wird also nach dem 23sten Satze

$$r = \frac{D}{\cos \frac{1}{2} v^2}; \qquad r' = \frac{D}{\sin \frac{1}{2} v^2}$$

haben; dieses giebt

$$\text{tang } \frac{1}{2} v^2 = \frac{r}{r'}; \qquad D = \frac{r r'}{r + r'}.$$

Man wird so die Anomalie v des Kometen im Augenblick der ersten Beobachtung und seinen kleinsten Abstand von der Sonne D haben, woraus man leicht die Lage der Sonnennähe, und die Zeit des Durchgangs des Kometen durch diesen Punkt wird schliesen können. Von fünf Elementen der Bahn des Kometen werden auf diese Art vier bekannt seyn, nämlich: der kleinste Abstand des Kometen von der Sonne, die Lage der Sonnennähe, die Zeit des Durchgangs des Kometen durch die Sonnennähe, und die Lage des Knotens. Es ist also nur noch die Neigung der Bahn zu finden übrig. Hierzu muss man aber eine dritte Beobachtung gebrauchen, welche überdies dazu dienen wird, unter den verschiedenen reellen und positiven Wurzeln der Gleichung für ϱ diejenige zu wählen, welche man gebrauchen muss.

39. Die Annahme der parabolischen Bewegung der Kometen ist nicht streng genau; sie ist sogar unendlich wenig wahrscheinlich, da die Anzahl der Fälle, welche eine elliptische oder hyperbolische Bahn geben, in Vergleichung mit denen, welche die parabolische Bewegung bestimmen, unendlich gros ist. Ueberdies würde ein Komet, der sich in einer parabolischen oder hyperbolischen Laufbahn bewegt, nur einmal sichtbar seyn; man kann also mit Wahrscheinlichkeit annehmen, dass wenn es einige Kometen giebt, welche dergleichen krumme Linien beschreiben, dieselben schon lange verschwunden sind, so dass wir heut zu Tage nur diejenigen beobachten, welche sich in geschlossenen Bahnen bewegen, und daher ohne Aufhören in grösern oder kleinern Zwischenzeiten in die Theile des Raums, welche der Sonne nahe sind, zurückgeführt werden. Man wird durch die folgende Methode die Dauer ihrer Umlaufszeiten bis auf einige Jahre bestimmen können, wenn man eine sehr grose Anzahl sehr genauer Beobachtungen vor und nach dem Durchgang durch die Sonnennähe hat.

Wir nehmen hierzu an, daſs man vier oder eine gröſsere Anzahl guter Beobachtungen hat, welche den ganzen sichtbaren Theil der Bahn umfassen, und daſs man durch die vorhergehende Methode die Parabel bestimmt hat, welche ohngefähr diesen Beobachtungen Genüge thut. Es sollen v, v', v'', v''' ... die zugehörigen Anomalien; r, r', r'', r''' . . die zugehörigen Radius vectors seyn. Es sey noch $v' - v = U$; $v'' - v = U'$; $v''' - v = U''$ etc.
Dieses vorausgesetzt, berechne man nach der vorhergehenden Methode mit der schon gefundenen Parabel die Werthe von U, U', U'' . . . V, V', V'' . . . Es sey

$$m = U - V; \quad m' = U' - V'; \quad m'' = U'' - V''; \quad m''' = U''' - V''' \text{ etc.}$$

Man lasse hernach den kleinsten Abstand von der Sonne dieser Parabel um eine kleine Gröſse sich ändern; es sey in dieser Hypothese

$$n = U - V; \quad n' = U' - V'; \quad n'' = U'' - V''; \quad n''' = U''' - V''' \text{ etc.}$$

Man mache eine dritte Hypothese, in welcher man den nämlichen kleinsten Abstand von der Sonne beybehält, wie in der erstern, die Zeit des Durchgangs durch die Sonnennähe aber um eine kleine Gröſse ändert; es sey alsdann

$$p = U - V; \quad p' = U' - V'; \quad p'' = U'' - V''; \quad p''' = U''' - V''' \text{ etc.}$$

Man berechne endlich mit dem kleinsten Abstand von der Sonne und mit der Zeit des Durchgangs des Kometen durch die Sonnennähe der ersten Hypothese den Winkel v und den Radius vector r, indem man die Bahn elliptisch, und $1 - e$, den Unterschied seiner Eccentricität und der Einheit, einer sehr kleinen Gröſse z. B. $\frac{1}{50}$ gleich setzt. Um den Werth des Winkels v in dieser Hypothese zu erhalten, wird es nach dem 23sten Satze hinreichend seyn, der in der Parabel der ersten Hypothese berechneten Anomalie v einen kleinen Winkel hinzuzusetzen, dessen Sinus gleich

$$\tfrac{1}{10}(1 - e) \cdot \text{tang}\,\tfrac{1}{2}v\,(4 - 3\cos\tfrac{1}{2}v^2 - 6\cos\tfrac{1}{2}v^4)$$

ist. Substituirt man hernach in der Gleichung

$$r = \frac{D}{\cos\frac{1}{2}v^2} \cdot \left[1 - \frac{(1 - e)}{2} \cdot \text{tang}\,\tfrac{1}{2}v^2\right]$$

statt v die auf diese Art in der Ellipse berechnete Anomalie, so wird man den entsprechenden Radius vector r erhalten. Man wird auf eben die Art v', r', v'', r'', v''', r''' u. s. w. berechnen, woraus man die Werthe von U, U', U'', U''' u. s. w., und hieraus nach dem 37sten Satze die von V, V', V'', V''' u. s. w. erhalten wird. Es sey in diesem Fall

$q = U - V$; $\quad q' = U' - V'$; $\quad q'' = U'' - V''$; $\quad q''' = U''' - V'''$ etc.
Man nenne endlich u die Zahl, mit welcher man die angenommene Aenderung des kleinsten Abstandes multipliciren muſs, um den wahren kleinsten Abstand zu erhalten; t die Zahl, mit welcher man die angenommene Aenderung der Zeit des Durchgangs durch die Sonnennähe multipliciren muſs, um die wahre Zeit zu erhalten; und s die Zeit, mit welcher man den angenommenen Werth von $1 - e$ multipliciren muſs, um den wahren zu erhalten, und man formire folgende Gleichungen:

$$(m - n) \cdot u + (m - p) \cdot t + (m - q) \cdot s = m;$$
$$(m' - n') \cdot u + (m' - p') \cdot t + (m' - q') \cdot s = m';$$
$$(m'' - n'') \cdot u + (m'' - p'') \cdot t + (m'' - q'') \cdot s = m'';$$
$$(m''' - n''') \cdot u + (m''' - p''') \cdot t + (m''' - q''') \cdot s = m'''.$$
etc.

Man wird vermittelst dieser Gleichungen die Werthe von u, t, s bestimmen; hieraus wird man den wahren kleinsten Abstand von der Sonne, die wahre Zeit des Durchgangs des Kometen durch die Sonnennähe, und den wahren Werth von $1 - e$ erhalten. Es sey D der kleinste Abstand von der Sonne, und a die halbe groſse Axe der Bahn, so wird man $a = \frac{D}{1 - e}$ haben; die Zeit des Sideralumlaufs des Kometen wird durch eine Anzahl Sideraljahre ausgedrückt werden, welche gleich $a^{\frac{3}{2}}$ oder $\left(\frac{D}{1 - e}\right)^{\frac{3}{2}}$ ist, wenn die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde zur Einheit angenommen wird. Man wird dann durch den 37sten Satz die Neigung der Bahn und die Lage des Knotens haben.

Mit welcher Genauigkeit auch die Beobachtungen angestellt seyn mögen, so werden sie doch immer Ungewiſsheit über die Dauer der Umlaufszeit der Kometen lassen. Die genaueste Methode, sie zu bestimmen, besteht darin, die Beobachtungen eines Kometen in zwey auf einander folgenden Umläufen zu vergleichen; aber dieses Mittel ist nur dann anwendbar, wenn die Folge der Zeit den Kometen gegen seine Sonnennähe zurückgeführt hat.

Fünftes Kapitel.

Allgemeine Methoden, durch allmälige Näherungen die Bewegungen der himmlischen Körper zu bestimmen.

40. Wir haben in der ersten Annäherung der Bewegungen der himmlischen Körper nur die Hauptkräfte, welche auf sie wirken, betrachtet, und daraus die Gesetze der elliptischen Bewegung hergeleitet. Wir werden in den folgenden Untersuchungen auf die Stöhrungskräfte dieser Bewegungen Rücksicht nehmen. Die Wirkung dieser Kräfte setzt nur sehr kleine Glieder den Differenzialgleichungen der elliptischen Bewegung hinzu, deren endliche Integrale wir vorher gegeben haben; jetzt müssen wir durch successive Näherungen die Integrale derselben Gleichungen bestimmen, wenn sie um die aus der Wirkung der stöhrenden Kräfte entstehenden Glieder vermehrt worden sind. Wir geben hierzu eine allgemeine Methode, welches auch die Anzahl und die Ordnung der Differenzialgleichungen seyn mag, deren immer mehr und mehr genäherte Integrale man sucht.

Wir nehmen an, daſs man zwischen den n veränderlichen Gröſsen y, y', y'' . . . und der veränderlichen Gröſse t, deren Differenzial als beständig angesehen wird, folgende n Differenzialgleichungen hat:

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha . Q;$$

$$0 = \frac{d^i y'}{dt^i} + P' + \alpha . Q',$$

etc.

wo P, Q, P', Q' u. s. w. Functionen von t, y, y' . . . und ihren Differenzialen bis zur Ordnung $i - 1$, inclusive, sind, und wo α ein sehr kleiner beständiger Koefficient ist, welcher in der Theorie der himmlischen Bewegungen von der Ordnung der perturbirenden Kräfte ist. Wir nehmen ferner an, daſs man die endlichen Integrale dieser Gleichungen hat, wenn Q, Q' . . . gleich Null sind. Differenziirt man jedes derselben $i - 1$ mal hinter einander, so werden sie mit ihren Differenzialen in Gleichungen geben, vermittelst welcher man die willkührlichen Gröſsen c, c', c'' . . . in Functionen von t, y, y', y'' . . und ihren Differenzialen bis zur Ordnung $i - 1$ durch die Elimination bestimmen wird. Bezeichnet man also diese Functionen mit V, V', V'' . . ., so wird man

$$c = V; \qquad c' = V'; \qquad c'' = V'' \quad \text{etc.}$$

haben. Diese Gleichungen sind die in Integrale von der Ordnung $i - 1$, welche die Differenzialgleichungen haben müssen, und welche durch die Elimination der Differenziale der veränderlichen Gröſsen ihre endlichen Integrale geben.

Differenziirt man nun die vorhergehenden Integrale von der Ordnung $i - 1$, so wird man

$$0 = dV; \qquad 0 = dV'; \qquad 0 = dV'' \quad \text{etc.}$$

erhalten. Nun ist aber klar, daſs diese Differenzialgleichungen, da sie von der Ordnung i sind und keine willkührlichen Gröſsen enthalten, nur Summen der Gleichungen

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + P; \qquad 0 = \frac{d^i y'}{dt^i} + P' \quad \text{etc.}$$

seyn können, wovon jede mit einem schicklichen Factor multiplicirt worden ist, damit diese Summen vollständige Differenziale sind. Nennt man also Fdt, $F'dt$ u. s. w. die Factoren, mit welchen man diese Gleichungen, in ihrer Ordnung auf einander, multipliciren muſs, um die Gleichung $0 = dV$ zu bilden; nennt man ferner Hdt, $H'dt$ u. s. w. die Factoren, mit welchen man dieselben Gleichungen multipliciren muſs, um die folgende $0 = dV'$ zu bilden, und so für die übrigen, so wird man folgende Gleichungen erhalten:

$$dV = F \,.\, dt \,.\, \left(\frac{d^i y}{dt^i} + P\right) + F' \,.\, dt \,.\, \left(\frac{d^i y'}{dt^i} + P'\right) + \ldots$$

$$dV' = H \,.\, dt \,.\, \left(\frac{d^i y}{dt^i} + P\right) + H' \,.\, dt \,.\, \left(\frac{d^i y'}{dt^i} + P'\right) + \ldots$$

etc.

wo F, F' . . ., H, H' . . . Functionen von t, y, y', y'' u. s. w. und ihrer Differenziale bis zur Ordnung $i - 1$ sind. Man wird sie leicht bestimmen können, wenn V, V' u. s. w. bekannt sind; denn F ist offenbar der Koefficient von $\frac{d^i y}{dt^i}$ in dem Differenzial von V; F' ist der Koefficient von $\frac{d^i y'}{dt^i}$ in dem nämlichen Differenzial und so ferner. Eben so sind H, H' . . . die Koefficienten von $\frac{d^i y}{dt^i}$, $\frac{d^i y'}{dt^i}$. . . in dem Differenzial von V'; da nun angenommen wird, daſs man die Functionen V, V' u. s. w. kennt, so braucht man sie nur in Beziehung auf $\frac{d^{i-1} y}{dt^{i-1}}$, $\frac{d^{i-1} y'}{dt^{i-1}}$ u. s. w. zu differenziiren, um die Factoren zu erhalten, mit welchen man die Differenzialgleichungen

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + P; \qquad 0 = \frac{d^i y'}{dt^i} + P' \quad \text{etc.}$$

multipliciren muſs, um vollständige Differenziale zu erhalten.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir die Differenzialgleichungen

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha . Q; \qquad 0 = \frac{d^i y'}{dt^i} + P' + \alpha . Q' \quad \text{etc.}$$

wieder vornehmen. Multiplicirt man die erste mit Fdt, die zweyte mit $F'dt$, und so für die übrigen, und addirt sie, so erhält man

$$0 = dV + \alpha dt . (FQ + F'Q' + \text{etc.});$$

auf eben diese Art erhält man

$$0 = dV' + \alpha dt . (HQ + H'Q' + \text{etc.});$$

etc.

Integrirt man sie, so erhält man

$$c - \alpha . \int dt . (FQ + F'Q' + \text{etc.}) = V;$$

$$c' - \alpha . \int dt . (HQ + H'Q' + \text{etc.}) = V';$$

etc.

Man wird so in Differenzialgleichungen erhalten, welche von eben der Form seyn werden, als in dem Fall, wenn Q, Q' u. s. w. gleich Null sind, mit dem einzigen Unterschied, daſs die willkührlichen Gröſsen c, c' u. s. w. in

$c - \alpha . \int dt . (FQ + F'Q' + \ldots)$; $\qquad c' - \alpha . \int dt . (HQ + H'Q' + \ldots)$ etc.

verwandelt werden müssen. Man erhält aber die n endlichen Integrale der

gegebenen Gleichungen, in dem Fall, wenn man Q, Q' . . . gleich Null setzt, wenn man aus den in Integralen von der Ordnung $i - 1$ die Differenziale der veränderlichen Gröſsen y, y' u. s. w. eliminirt. Man wird also dieselben Integrale für den Fall, wenn Q, Q' u. s. w. nicht gleich Null sind, erhalten, wenn man in den erstern Integralen c, c' u. s. w. in $c - \alpha . \int dt . (FQ + \text{etc.})$; $c' - \alpha . \int dt . (HQ + \text{etc.})$ u. s. w. verwandelt.

41. Sind die Differenziale

$$dt . (FQ + F'Q' + \text{etc.}); \qquad dt . (HQ + H'Q' + \text{etc.}) \text{ u. s. w.}$$

vollständig, so wird man durch die vorhergehende Methode die endlichen Integrale der gegebenen Differenzialgleichungen erhalten. Dieses hat aber nur in einigen besondern Fällen Statt, unter welchen der Fall, wenn diese Gleichungen linearisch sind, der umfassendste und interessanteste ist. Wir wollen also annehmen, daſs P, P' . . . Linearfunctionen von y, y' . . . und von ihren Differenzialen bis zur Ordnung $i - 1$ sind, ohne ein von diesen veränderlichen Gröſsen unabhängiges Glied zu haben, und wir wollen anfangs den Fall betrachten, wenn Q, Q' u. s. w. gleich Null sind. Da die Differenzialgleichungen linearisch sind, so sind ihre auf einander folgenden Integrale ebenfalls linearisch, so daſs, wenn $c = V$, $c' = V'$ u. s. w. die in Integrale von der Ordnung $i - 1$ der linearischen Differenzialgleichungen

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + P; \qquad 0 = \frac{d^i y'}{dt^i} + P' \text{ etc.}$$

sind, man V, V' u. s. w. als Linearfunctionen von y, y' u. s. w., und ihrer Differenziale bis zur Ordnung $i - 1$ annehmen kann. Wir werden, um dies zu zeigen, in den Ausdrücken von y, y' u. s. w. die willkührliche beständige Gröſse c einer bestimmten Gröſse plus einer unbestimmten δc gleich setzen; wir werden eben so die willkührliche beständige Gröſse c' einer bestimmten Gröſse plus der unbestimmten Gröſse $\delta c'$ gleich setzen, und so für die übrigen. Verwandelt man dann diese Ausdrücke in Reihen, welche nach den Potenzen und Producten von δc, $\delta c'$ u. s. w. geordnet sind, so erhält man durch die Formeln des 21sten Satzes

$$y = Y + \delta c . \left(\frac{dY}{dc}\right) + \delta c' . \left(\frac{dY}{dc'}\right) + \text{etc.}$$

$$+ \frac{\delta c^2}{1 . 2} . \left(\frac{d^2 Y}{dc^2}\right) + \text{etc.}$$

$$y' = Y' + \delta c \,.\, \left(\frac{dY'}{dc}\right) + \delta c' \,.\, \left(\frac{dY'}{dc'}\right) + \text{etc.}$$
$$+ \frac{\delta c^2}{1\,.\,2} \,.\, \left(\frac{d^2 Y'}{dc^2}\right) + \text{etc.}$$

u. s. w.

wo Y, Y', $\left(\frac{dY}{dc}\right)$ etc. Functionen von t ohne willkührliche beständige Gröſsen sind. Substituirt man diese Werthe in die gegebenen Differenzialgleichungen, so ist klar, daſs die Koefficienten der ersten Potenzen von δc, $\delta c'$. . . in diesen verschiedenen Gleichungen gleich Null seyn müssen, weil diese Gröſsen unbestimmt sind. Da nun diese Gleichungen linearisch sind, so wird man offenbar die in die ersten Potenzen von δc, $\delta c'$ u. s. w. multiplicirte Glieder erhalten, wenn man in ihnen $\left(\frac{dY}{dc}\right) \,.\, \delta c + \left(\frac{dY}{dc'}\right) \,.\, \delta c' +$ etc. statt y; $\left(\frac{dY'}{dc}\right) \,.\, \delta c + \left(\frac{dY'}{dc'}\right) \,.\, \delta c' +$ etc. statt y' u. s. w. substituirt. Diese Ausdrücke von y, y' u. s. w. werden also einzeln den gegebenen Differenzialgleichungen Genüge thun, und da sie die *in* willkührlichen Gröſsen δc, $\delta c'$ u. s. w. enthalten, so sind sie die vollständigen Integrale dieser Gleichungen. Man sieht also, daſs die willkührlichen Gröſsen in den Ausdrücken von y, y' u. s. w., und folglich auch in ihren Differenzialen, in linearischer Gestalt vorhanden sind, woraus man leicht schlieſsen kann, daſs die veränderlichen Gröſsen y, y' u. s. w. und ihre Differenziale in linearischer Gestalt in den auf einander folgenden Integralen der gegebenen Differenzialgleichungen angenommen werden können.

Sind also F, F' u. s. w. die Koeffizienten von $\frac{d^i y}{dt^i}$, $\frac{d^i y'}{dt^i}$ etc. in dem Differenzial von V; ferner H, H' u. s. w. die Koefficienten derselben Differenziale in dem Differenzial von V', und so für die übrigen, so folgt aus dem Vorhergehenden, daſs diese Gröſsen Functionen der einzigen veränderlichen Gröſse t sind. Nimmt man also an, daſs Q, Q' u. s. w. Functionen der einzigen veränderlichen Gröſse t sind, so werden die Differenziale
$dt \,.\, (FQ + F'Q' + \,.\,.\,)$; $dt \,.\, (HQ + H'Q' + \,.\,.\,.\,)$ etc. vollständig seyn.

Hieraus entspringt ein sehr einfaches Mittel, die Integrale irgend einer Anzahl von n linearischen Differenzialgleichungen von der Ordnung i zu erhalten,

ten, welche die Glieder αQ, $\alpha Q'$ u. s. w., Functionen der einzigen veränderlichen Gröfse t, enthalten, wenn man dieselben Gleichungen in dem Fall integriren kann, wenn diese Glieder gleich Null sind. Differenziirt man nämlich ihre n endlichen Integrale $(i - 1)$ mal auf einander, so wird man in Gleichungen erhalten, welche durch die Elimination die Werthe der in willkührlichen Gröfsen in Functionen von t, y, y' u. s. w., und von den Differenzialen dieser veränderlichen Gröfsen bis zur Ordnung $i - 1$, geben werden. Man wird so die in Gleichungen $c = V$, $c' = V'$ u. s. w. formiren; dann werden F, F' u. s. w. die Koefficienten von $\frac{d^{i-1}y}{dt^{i-1}}$; $\frac{d^{i-1}y'}{dt^{i-1}}$ etc. in V seyn; H, H' u. s. w. die Koefficienten derselben Differenziale in V', und so für die übrigen; man wird also die endlichen Integrale der linearischen Differenzialgleichungen

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha . Q; \quad 0 = \frac{d^i y'}{dt^i} + P' + \alpha . Q' \text{ etc.}$$

erhalten, wenn man in den endlichen Integralen dieser Gleichungen, wenn in ihnen die letzten Glieder αQ, $\alpha Q'$ u. s. w. fehlen, die willkührlichen Gröfsen $c, c' \ldots$ in $c - \alpha . \int dt . (FQ + F'Q' + \text{etc.})$; $c' - \alpha . \int dt . (HQ + H'Q' + \text{etc.})$ u. s. w. verwandelt.

Wir wollen, als Beyspiel, die linearische Differenzialgleichung

$$0 = \frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 . y + \alpha . Q$$

betrachten. Das endliche Integral der Gleichung $0 = \frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y$ ist [89])

$$y = \frac{c}{a} . \sin at + \frac{c'}{a} . \cos at;$$

89) Dividirt man die gegebene Gleichung mit a^2, so erhält sie folgende Form:

$$\frac{d^2 y}{a^2 \, dt^2} = - y.$$

Nun haben bekanntlich der Sinus und Kosinus eines Bogens die Eigenschaft, dafs ihr zweytes Differenzial, durch das Quadrat des Differenzials des Bogens dividirt, dem gegebenen Sinus oder Kosinus, negativ genommen, gleich ist. Die Gröfse y ist also gleich $C . \sin (at + \iota)$ oder $C . \cos (at + \iota)$, wo C und ι die zwey beständigen Gröfsen sind, welche dies Integral, um vollständig zu seyn, enthalten mufs. Nun ist $C . \sin (at + \iota) = C . \cos \iota . \sin at + C . \sin \iota . \cos at$, welcher Werth von y mit dem im Text gegebenen identisch ist.

wo c und c' willkührliche beständige Gröſsen sind. Differenziirt man dies Integral, so erhält man

$$\frac{dy}{dt} = c \,.\, \cos at - c' \,.\, \sin at.$$

Verbindet man diese Differenzialgleichung mit dem Integral selbst, so erhält man folgende zwey Integrale der ersten Ordnung

$$c = ay \,.\, \sin at + \frac{dy}{dt} \,.\, \cos at;$$

$$c' = ay \,.\, \cos at - \frac{dy}{dt} \,.\, \sin at;$$

man hat folglich in diesem Fall

$$F = \cos at; \qquad H = -\sin at;$$

das vollständige Integral der gegebenen Gleichung wird also folgendes seyn:

$$y = \frac{c}{a} \,.\sin at + \frac{c'}{a} \,.\cos at - \frac{\alpha \,.\sin at}{a} \,.\int .\, Qdt \,.\cos at + \frac{\alpha \,.\cos at}{a} \,.\int .\, Qdt.\sin at.$$

Man kann hieraus leicht schlieſsen, daſs, wenn Q aus Gliedern von der Form $K \,.\, {}^{\sin}_{\cos} (mt + \varepsilon)$ besteht, jedes dieser Glieder im Werth von y ein ihm entsprechendes Glied $\frac{\alpha K}{m^2 - a^2} \,.\, {}^{\sin}_{\cos} (mt + \varepsilon)$ hervorbringen wird [90]). Ist m gleich

90) Wir bemerken zuerst, daſs wenn das Glied $K \sin (mt + \varepsilon)$ im Werth von y das Glied $\frac{\alpha K}{m^2 - a^2} \sin (mt + \varepsilon)$ hervorbringt, auch $K \cos (mt + \varepsilon)$ das Glied $\frac{\alpha K}{m^2 - a^2} \cos (mt + \varepsilon)$ hervorbringen wird. Man darf nämlich den willkührlichen beständigen Winkel ε nur um 90° vermehren, um die Sinus in Kosinus zu verwandeln.

Man multiplicire nun $K \,.\, \sin (mt + \varepsilon)$ mit $\cos at$, so erhält man

$$\frac{K}{2} \,.\, \sin [(m + a)\, t + \varepsilon] + \frac{K}{2} \,.\, \sin [(m - a)\, t + \varepsilon];$$

dies mit dt multiplicirt und integrirt giebt

$$-\frac{K}{2\,(m + a)} \,.\, \cos [(m + a)\, t + \varepsilon] - \frac{K}{2\,(m - a)} \,.\, \cos [(m - a)\, t + \varepsilon],$$

oder $+ \frac{K}{2\,(m^2 - a^2)} \,.\, \Big[-(m - a) \,.\, \cos [(m + a)\, t + \varepsilon] - (m + a) \,.\, \cos [(m - a)\, t + \varepsilon] \Big]$.

Multiplicirt man endlich diesen Ausdruck mit $-\frac{\alpha}{a} \sin at$, so erhält man

$$\frac{\alpha K}{4a\,(m^2 - a^2)} \Big[(m - a) \sin [(m + 2a)\, t + \varepsilon] + 2a \,.\, \sin (mt + \varepsilon) - (m + a) \sin [(m - 2a)\, t + \varepsilon] \Big].$$

a, so wird das Glied $K . \frac{\sin}{\cos} (mt + \varepsilon)$ in y folgende Glieder hervorbringen: erstlich das Glied $-\frac{\alpha K}{4a^2} . \frac{\sin}{\cos} (at + \varepsilon)$, welches man vernachlässigen kann, weil es in den zwey Gliedern $\frac{c}{a} \sin at + \frac{c'}{a} \cos at$ enthalten ist; zweytens das Glied $\pm \frac{\alpha Kt}{2a} . \frac{\cos}{\sin} (at + \varepsilon)$, wo das Zeichen + Statt hat, wenn das Glied des Ausdrucks für Q ein Sinus ist, das Zeichen — hingegen, wenn es ein Kosinus ist. Man sieht hieraus, wie durch die auf einander folgenden Integrationen der Bogen t außerhalb der Zeichen Sinus und Kosinus in den Werthen von y, y' u. s. w. kömmt, ob schon die Differenzialgleichungen ihn nicht in dieser Gestalt enthalten. Es ist klar, daſs dies allemal Statt finden wird, so oft die Functionen FQ, $F'Q'$ u. s. w., HQ, $H'Q'$ u. s. w. beständige Glieder enthalten werden.

Dies ist der Werth von $-\frac{\alpha . \sin at}{a} . \int . Q dt . \cos at$, wenn man von Q bloſs das Glied $K . \sin (mt + \varepsilon)$ betrachtet. In eben dieser Voraussetzung für Q erhält das Glied $\frac{\alpha . \cos at}{a} . \int . Q\, dt . \sin at$ folgenden Werth:

$$\frac{\alpha K}{4a(m^2 - a^2)} \left[-(m-a) \sin[(m+2a)t+\varepsilon] + 2a . \sin(mt+\varepsilon) + (m+a) \sin[(m-2a)t+\varepsilon] \right].$$

Die Summe beider Werthe ist $\frac{\alpha K}{m^2 - a^2} . \sin(mt + \varepsilon)$.

Ist $m = a$, so ist $K . \sin(mt + \varepsilon) . \cos at$ gleich $\frac{K}{2} . \sin(2at + \varepsilon) + \frac{K}{2} . \sin \varepsilon$; multiplicirt man mit dt und integrirt man, so erhält man $-\frac{K}{4a} . \cos(2at + \varepsilon) + \frac{K}{2} . t . \sin \varepsilon$, und dies von neuem mit $-\frac{\alpha}{a} . \sin at$ multiplicirt, giebt

$$+ \frac{\alpha K}{8a^2} . \sin(3at + \varepsilon) - \frac{\alpha K}{8a^2} . \sin(at + \varepsilon) - \frac{\alpha K}{2a} . t . \sin at . \sin \varepsilon.$$

Auf eben diese Art giebt $\frac{\alpha . \cos at}{a} . \int . Q dt . \sin at$ folgende Glieder:

$$-\frac{\alpha K}{8a^2} \sin(3at + \varepsilon) - \frac{\alpha K}{8a^2} . \sin(at + \varepsilon) + \frac{\alpha K}{2a} . t . \cos at . \cos \varepsilon.$$

Die Summe beider Ausdrücke ist $-\frac{\alpha K}{4a^2} . \sin(at + \varepsilon) + \frac{\alpha K}{2a} . t . \cos(at + \varepsilon)$.

42. Wenn die Differenziale $dt.(FQ + \text{etc.})$, $dt.(HQ + \text{etc.})$ u. s. w. nicht vollständig sind, so kann die vorhergehende Analysis nicht ihre strengen Integrale geben; sie verschafft aber ein sehr einfaches Mittel, immer mehr und mehr genäherte Integrale zu haben, wenn α sehr klein ist, und wenn man die Werthe von y, y' u. s. w. in dem Fall hat, wenn $\alpha = 0$ ist. Differenziirt man diese Werthe $(i - 1)$ mal hinter einander, so wird man die folgenden Differenzialgleichungen von der Ordnung $(i - 1)$ erhalten:

$$c = V; \qquad c' = V' \quad \text{etc.}$$

Die Koefficienten von $\frac{d^iy}{dt^i}$, $\frac{d^iy'}{dt^i}$ etc. in den Differenzialen von V, V' u. s. w. sind die Werthe von F, F' etc., H, H' etc.; man wird sie in die Differenzialfunctionen

$$dt.(FQ + F'Q' + \text{etc.}); \qquad dt.(HQ + H'Q' + \text{etc.}) \quad \text{u. s. w.}$$

substituiren. Hierauf wird man diese Functionen in ihre ersten Näherungswerthe statt y, y' u. s. w. setzen, wodurch diese Differenziale Functionen von t und den willkührlichen Gröſsen c, c' u. s. w. werden. Es sollen diese Functionen Tdt, $T'dt$ u. s. w. seyn. Verwandelt man in den ersten Näherungswerthen von y, y' u. s. w. die willkührlichen Gröſsen c, c' u. s. w. respective in $c - \alpha.\int Tdt$, $c' - \alpha.\int T'dt$ etc., so wird man die zweyten Näherungswerthe dieser veränderlichen Gröſsen erhalten.

Man wird diese zweyten Werthe von neuem in die Differenzialfunctionen

$$dt.(FQ + \text{etc.}); \qquad dt.(HQ + \text{etc.})$$

substituiren; nun ist augenscheinlich, daſs diese Functionen alsdann eben die Werthe erhalten, welche Tdt, $T'dt$ u. s. w. erhalten, wenn man in ihnen die willkührlichen Gröſsen c, c' u. s. w. in $c - \alpha.\int Tdt$, $c' - \alpha.\int T'dt$ u. s. w. verwandelt. Es sollen also $T_,$, $T_,'$ u. s. w. die Werthe seyn, welche T, T' u. s. w. durch diese Veränderungen erhalten, so wird man die dritten Näherungswerthe von y, y' u. s. w. erhalten, wenn man in den ersten c, c' u. s. w. respective in $c - \alpha.\int T_,dt$; $c' - \alpha.\int T_,'dt$ verwandelt.

Man nenne auf ähnliche Art $T_{,,}$, $T_{,,}'$ u. s. w. die Werthe, welche $T_,$, $T_,'$ u. s. w. erhalten, wenn man in ihnen c, c' u. s. w. in $c - \alpha.\int T_,dt$; $c' - \alpha.\int T_,'dt$ u. s. w. verwandelt; dann erhält man die vierten Näherungswerthe von y, y' u. s. w., wenn man in den ersten Näherungswerthen dieser ver-

änderlichen Gröſsen c, c' u. s. w. in $c - \alpha . \int T_{,,} dt$; $c' - \alpha . \int T_{,,}' dt$ u. s. w. verwandelt, und so ferner.

Wir werden hernach sehen, daſs die Bestimmung der himmlischen Bewegungen fast immer von Differenzialgleichungen von der Form

$$o = \frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 . y + \alpha . Q$$

abhängt, wo Q eine rationale ganze Function von y, von Sinus und Kosinus von Winkeln, welche proportional mit der Zeit t wachsen, ist. Folgendes ist das leichteste Mittel, diese Gleichung zu integriren.

Man wird anfangs α gleich Null setzen und wird dann durch den vorhergehenden Satz einen ersten Werth von y erhalten.

Man wird diesen Werth in Q substituiren, welches sich dadurch in eine rationale und ganze Function von Sinus und von Kosinus von Winkeln, welche mit t proportional sind, verwandeln wird. Integrirt man hernach die Differenzialgleichung, so wird man einen zweyten Werth von y erhalten, welcher bis zu den Gröſsen von der Ordnung α, mit eingeschlossen, genähert seyn wird.

Man substituire von neuem diesen Werth in Q; integrirt man dann wieder die Differenzialgleichung, so wird man einen dritten Näherungswerth von y erhalten, und so ferner.

Ob schon diese Art, die Differenzialgleichungen der himmlischen Bewegungen durch Näherung zu integriren, unter allen die einfachste ist, so hat sie doch die Unbequemlichkeit, in den Ausdrücken der veränderlichen Gröſsen y, y' u. s. w. Kreisbogen auſserhalb der Zeichen Sinus und Kosinus selbst in dem Fall zu geben, wo diese Bogen nicht in den streng genauen Werthen dieser Gröſsen vorhanden sind. Man begreift in der That, daſs, wenn diese Werthe Sinus oder Kosinus von Winkeln von der Ordnung αt enthalten, diese Sinus oder Kosinus sich in der Gestalt von Reihen in den Näherungswerthen, welche man durch die vorhergehende Methode findet, darstellen werden, weil diese letztern Werthe nach den Potenzen von α geordnet sind. Wird aber der Bogen αt durch die Länge der Zeit beträchtlich, so hört die Entwickelung der Sinus und Kosinus der Winkel von der Ordnung αt auf genau zu seyn; die Näherungswerthe von y, y' u. s. w. können sich also nicht auf eine unbegränzte Zeit erstrecken. Da es nun wichtig ist, Werthe zu haben, welche die vergange-

nen und zukünftigen Jahrhunderte umfassen, so ist es eine mifsliche und interessante Aufgabe der Analysis, von den Kreisbogen, welche die Näherungswerthe enthalten, zu den Functionen zurück zu kehren, aus welchen sie durch die Entwickelung in Reihen entsprungen sind. Wir geben zur Auflösung dieser Aufgabe folgende allgemeine und sehr einfache Methode.

43. Wir wollen folgende Differenzialgleichung von der Ordnung i betrachten:

$$o = \frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha . Q,$$

wo α sehr klein ist, und P und Q algebraische Functionen von y, $\frac{dy}{dt}$. . . $\frac{d^{i-1} y}{dt^{i-1}}$, und von Sinus und Kosinus von Winkeln, welche mit t proportional wachsen, sind. Wir nehmen an, dafs man das vollständige Integral dieser Differenzialgleichung für den Fall $\alpha = o$ hat, und dafs der Werth von y, welchen dieses Integral giebt, den Bogen t aufserhalb der Zeichen Sinus und Kosinus enthält; wir nehmen ferner an, dafs, wenn man diese Gleichung in dem Fall, wenn α nicht gleich Null ist, durch die vorhergehende Näherungsmethode integrirt,

$$y = X + t . Y + t^2 . Z + t^3 . S + \text{etc.}$$

ist, wo X, Y, Z u. s. w. periodische Functionen von t sind, und die i willkührlichen Gröfsen c, c', c'' u. s. w. enthalten, und wo die Potenzen von t in diesem Ausdruck von y sich bis ins Unendliche vermöge der allmähligen Näherungen erstrecken. Es ist sichtbar, dafs die Koefficienten dieser Potenzen desto schneller abnehmen werden, je kleiner α ist. In der Theorie der himmlischen Bewegungen drückt α die Ordnung der stöhrenden Kräfte in Beziehung auf die Hauptkräfte, welche auf sie wirken, aus.

Substituirt man den vorhergehenden Werth von y in die Function $\frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha . Q$, so wird sie die Form $k + k't + k''t^2 + \text{etc.}$ erhalten, wo k, k', k'' u. s. w. periodische Functionen von t sind; der Werth von y thut aber nach der Voraussetzung der Differenzialgleichung

$$o = \frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha . Q$$

Genüge; man muſs also identisch

$$o = k + k't + k''t^2 + \text{etc.}$$

haben. Wären nun k, k', k'' u. s. w. nicht Null, so würde diese Gleichung durch die Umkehrung der Reihen den Bogen t durch eine Function von Sinus und von Kosinus von Winkeln, welche t proportional sind, geben; setzt man also α unendlich klein, so würde man t gleich einer endlichen Function von Sinus und Kosinus ähnlicher unendlich kleiner Winkel erhalten, welches unmöglich ist; die Functionen k, k' u. s. w. sind also identisch gleich Null.

Ist nun der Bogen t nur zur ersten Potenz unter den Zeichen Sinus und Kosinus erhoben, welches der Fall in der Theorie der himmlischen Bewegungen ist, so wird dieser Bogen nicht aus den successiven Differenzialen von y entstanden seyn; substituirt man also den vorhergehenden Werth von y in die Function $\frac{d^iy}{dt^i} + P + \alpha . Q$, so wird die Function $k + k't +$ etc., in welche sie sich verwandelt, den Bogen t auſserhalb der Zeichen sin und cos nur in so fern enthalten, in so fern er schon in y enthalten ist. Verwandelt man daher im Ausdruck von y den Bogen t auſserhalb der periodischen Zeichen in $t - \theta$, wo θ irgend eine beständige Gröſse ist, so wird die Function $k + k't +$ etc. sich in $k + k'(t - \theta) +$ etc. verwandeln, und da diese letztere Function vermöge der identischen Gleichungen $k = o$; $k' = o$ etc. identisch gleich Null ist, so erhellet, daſs der Ausdruck

$$y = X + (t - \theta) . Y + (t - \theta)^2 . Z + \text{etc.}$$

noch immer der Differenzialgleichung

$$o = \frac{d^iy}{dt^i} + P + \alpha . Q$$

Genüge thun wird. Ob nun schon dieser zweyte Werth von y, $(i + 1)$ willkührliche Gröſsen zu enthalten scheint, nämlich die i willkührlichen Gröſsen c, c', c'' u. s. w. und θ, so kann er doch nur die Anzahl i wirklich von einander verschiedener willkührlicher Gröſsen enthalten. Man muſs also durch eine schickliche Aenderung in den beständigen Gröſsen c, c', c'' u. s. w. die willkührliche Gröſse θ aus dem zweyten Ausdruck von y wegschaffen, und ihn so erhalten können, daſs er mit dem ersten Ausdruck übereinstimmt. Diese Bemerkung wird uns das Mittel verschaffen, die Kreisbogen auſserhalb der periodischen Zeichen wegzuschaffen.

Wir wollen dem zweyten Ausdruck von y folgende Gestalt geben:

$$y = X + (t - \theta) \,.\, R.$$

Da wir nun angenommen haben, daſs θ aus y verschwindet, so wird man $\left(\frac{dy}{d\theta}\right) = 0$, und folglich

$$R = \left(\frac{dX}{d\theta}\right) + (t - \theta) \,.\, \left(\frac{dR}{d\theta}\right)$$

haben. Differenziirt man diese Gleichung mehrmals nach einander, so erhält man

$$2 \,.\, \left(\frac{dR}{d\theta}\right) = \left(\frac{d^2X}{d\theta^2}\right) + (t - \theta) \,.\, \left(\frac{d^2R}{d\theta^2}\right);$$

$$3 \,.\, \left(\frac{d^2R}{d\theta^2}\right) = \left(\frac{d^3X}{d\theta^3}\right) + (t - \theta) \,.\, \left(\frac{d^3R}{d\theta^3}\right),$$

u. s. w.

woraus man leicht, wenn man R und seine Differenziale aus dem vorhergehenden Ausdruck von y eliminirt, folgende Gleichung erhält:

$$y = X + (t - \theta) \,.\, \left(\frac{dX}{d\theta}\right) + \frac{(t-\theta)^2}{1 \,.\, 2} \,.\, \left(\frac{d^2X}{d\theta^2}\right) + \frac{(t-\theta)^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, \left(\frac{d^3X}{d\theta^3}\right) + \text{etc.}$$

wo X eine Function von t und der beständigen Gröſsen c, c', c'' u. s. w. ist, und da diese beständigen Gröſsen Functionen von θ sind, so ist X eine Function von t und von θ, welche wir durch $\phi\,(t, \theta)$ bezeichnen wollen. Nun ist aber dieser Ausdruck von y, vermöge der Formel (i) des 21sten Satzes, die Entwickelung der Function $\phi\,(t, \theta + t - \theta)$ nach den Potenzen von $(t - \theta)$; man hat also $y = \phi\,(t, t)$, woraus folgt, daſs man y erhalten wird, wenn man in X die Gröſse θ in t verwandelt. Die Aufgabe besteht nun darinn, X durch eine Function von t und θ, und folglich c, c', c'' u. s. w. durch Functionen von t zu bestimmen.

Hierzu wollen wir die Gleichung

$$y = X + (t - \theta) \,.\, Y + (t - \theta)^2 \,.\, Z + (t - \theta)^3 \,.\, S + \text{etc.}$$

wieder vornehmen. Da vorausgesetzt worden ist, daſs die beständige Gröſse θ in diesem Ausdruck von y verschwindet, so wird man die identische Gleichung haben [91])

$$0 = \left(\frac{dX}{d\theta}\right) - Y + (t-\theta) \,.\, \left[\left(\frac{dY}{d\theta}\right) - 2Z\right] + (t-\theta)^2 \,.\, \left[\left(\frac{dZ}{d\theta}\right) - 3S\right] + \text{etc.} \ldots (a)$$

Wen-

91) Wenn man in Beziehung auf θ differenziirt.

Wendet man auf diese Gleichung eben die Schlüsse an, welche wir bey der Gleichung $0 = k + k't + k''t^2 +$ etc. gebraucht haben, so sieht man, daſs die Koefficienten der Potenzen von $t - \theta$ von selbst gleich Null seyn müssen. Die Functionen von X, Y, Z u. s. w. enthalten also nur θ, in so fern es in c, c' u. s. w. enthalten ist, so daſs es zur Formirung der partiellen Differenziale $\left(\frac{dX}{d\theta}\right)$, $\left(\frac{dY}{d\theta}\right)$, $\left(\frac{dZ}{d\theta}\right)$ etc. hinreichend ist, in diesen Functionen c, c' u. s. w. als veränderlich anzusehen; dieses giebt

$$\left(\frac{dX}{d\theta}\right) = \left(\frac{dX}{dc}\right) \cdot \left(\frac{dc}{d\theta}\right) + \left(\frac{dX}{dc'}\right) \cdot \left(\frac{dc'}{d\theta}\right) + \left(\frac{dX}{dc''}\right) \cdot \left(\frac{dc''}{d\theta}\right) + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{dY}{d\theta}\right) = \left(\frac{dY}{dc}\right) \cdot \left(\frac{dc}{d\theta}\right) + \left(\frac{dY}{dc'}\right) \cdot \left(\frac{dc'}{d\theta}\right) + \left(\frac{dY}{dc''}\right) \cdot \left(\frac{dc''}{d\theta}\right) + \text{etc.}$$

etc.

Nun kann es sich aber zutragen, daſs der Bogen t in den periodischen Functionen X, Y, Z u. s. w. mit einigen dieser willkührlichen Gröſsen c, c', c'' u. s. w. multiplicirt ist; durch die Differenziation dieser Functionen in Beziehung auf θ, oder, welches das nämliche ist, in Beziehung auf diese willkührlichen Gröſsen, wird dieser Bogen entwickelt werden und sich auſserhalb der Zeichen der periodischen Functionen befinden; die Differenziale $\left(\frac{dX}{d\theta}\right)$, $\left(\frac{dY}{d\theta}\right)$, $\left(\frac{dZ}{d\theta}\right)$ etc. werden alsdann von folgender Form seyn:

$$\left(\frac{dX}{d\theta}\right) = X' + t \cdot X'';$$

$$\left(\frac{dY}{d\theta}\right) = Y' + t \cdot Y'';$$

$$\left(\frac{dZ}{d\theta}\right) = Z' + t \cdot Z'';$$

etc.

wo X', X'', Y', Y'', Z', Z'' u. s. w. periodische Functionen von t sind, und noch auſserdem die willkührlichen Gröſsen c, c', c'' u. s. w., und ihre ersten durch dt dividirten Differenziale enthalten, welche Differenziale sich in diesen Functionen nur in linearischer Gestalt befinden; man wird also folgende Gleichungen haben:

$$\left(\frac{dX}{d\theta}\right) = X' + \theta . X'' + (t-\theta) . X'';$$
$$\left(\frac{dY}{d\theta}\right) = Y' + \theta . Y'' + (t-\theta) . Y'';$$
$$\left(\frac{dZ}{d\theta}\right) = Z' + \theta . Z'' + (t-\theta) . Z'';$$
etc.

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (a), so erhält man

$$\begin{aligned} o = & X' + \theta . X'' - Y \\ & + (t-\theta) . (Y' + \theta . Y'' + X'' - 2 Z) \\ & + (t-\theta)^2 . (Z' + \theta . Z'' + Y'' - 3 S) + \text{etc.} \end{aligned}$$

woraus man, wenn man die Koefficienten der Potenzen von $(t - \theta)$ einzeln gleich Null setzt, folgende Gleichungen erhält:

$$o = X' + \theta . X'' - Y;$$
$$o = Y' + \theta . Y'' + X'' - 2 Z;$$
$$o = Z' + \theta . Z'' + Y'' - 3 S;$$
etc.

Differenziirt man die erste dieser Gleichungen $(i - 1)$ mal hinter einander in Beziehung auf t, so wird man aus ihr eben so viel Gleichungen zwischen den Gröſsen c, c', c'' u. s. w. und ihren ersten durch $d\theta$ dividirten Differenzialen erhalten [92]). Integrirt man hernach diese neuen Gleichungen in Beziehung auf θ, so wird man diese beständigen Gröſsen durch Functionen von θ erhalten. Der bloſse Anblick der ersten der vorhergehenden Gleichungen wird fast immer zureichen, um die Differenzialgleichungen für c, c', c'' u. s. w. zu erhalten, wenn man die Koefficienten der Sinus und Kosinus, welche sie enthält, einzeln vergleicht; denn es ist sichtbar, daſs die Differenzialgleichungen, welche die Werthe von c, c' u. s. w. bestimmen, unabhängig von t seyn müssen, weil diese Werthe es sind. Die Vereinfachung, welche diese Betrachtung den Rechnungen verschafft, ist einer der vorzüglichsten Vortheile dieser Methode. Diese Gleichungen werden am öftersten nur durch allmählige Näherungen integrirt werden

92) Man wird dann diese Gleichungen so unter einander verbinden, daſs man neue Gleichungen erhält, in welchen nur eine der Gröſsen c, c', c'' u. s. w. und die Differenziale dieser Gröſse sich befinden. Integrirt man dann diese neuen Gleichungen in Beziehung auf θ, so wird man diese beständigen Gröſsen durch Functionen von θ erhalten.

können, wodurch der Bogen θ außerhalb der periodischen Zeichen in die Werthe von c, c' u. s. w. selbst dann kommen kann, wenn dieser Bogen sich nicht in den genauen Integralen befindet; man wird ihn aber durch die so eben erklärte Methode wegschaffen.

Es kann sich zutragen, daſs die erste der vorhergehenden Gleichungen und ihre $(i-1)$ in Beziehung auf t genommenen Integrale nicht i von einander verschiedene Gleichungen zwischen den Gröſsen c, c', c'' u. s. w. und ihren Differenzialen geben. In diesem Fall muſs man die zweyte und die übrigen Gleichungen gebrauchen.

Wenn man so die Werthe von c, c', c'' u. s. w. durch Functionen von θ bestimmt hat, so wird man sie in X substituiren. Verwandelt man hernach θ in t, so wird man den Werth von y ohne Kreisbogen außerhalb der periodischen Zeichen erhalten, wenn dies möglich ist. Enthielte dieser Werth noch dieselben, so würde dies ein Beweis seyn, daſs sie sich im genauen Integral befinden.

44. Wir wollen nun irgend eine Anzahl n Differenzialgleichungen betrachten:

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + P + \alpha . Q; \qquad 0 = \frac{d^i y'}{dt^i} + P' + \alpha . Q' \text{ etc.}$$

wo P, Q, P', Q' u. s. w. Functionen der Gröſsen y, y' u. s. w., ihrer Differenziale bis zur Ordnung $(i-1)$ und der Sinus und Kosinus von Winkeln sind, welche im Verhältniſs der veränderlichen Gröſse t zunehmen, deren Differenzial als beständig angenommen wird. Wir nehmen an, daſs die genäherten Integrale dieser Gleichungen folgende sind:

$$y = X + t . Y + t^2 . Z + t^3 . S + \text{etc.}$$
$$y' = X_, + t . Y_, + t^2 . Z_, + t^3 . S_, + \text{etc.}$$
etc.

wo X, Y, Z periodische Functionen von t sind, und die in willkührlichen Gröſsen c, c', c'' u. s. w. enthalten. Man wird, wie im vorhergehenden Satz, folgende Gleichungen haben:

$$0 = X' + \theta . X'' - Y;$$
$$0 = Y' + \theta . Y'' + X'' - 2 Z;$$
$$0 = Z' + \theta . Z'' + Y'' - 3 S;$$
etc.

Der Werth von y' wird auf eine ähnliche Art Gleichungen von folgender Form geben:

$$0 = X_{,}' + \theta \,.\, X_{,}'' - Y_{,};$$
$$0 = Y_{,}' + \theta \,.\, Y_{,}'' + X_{,}'' - 2\, Z_{,};$$
etc.

Die Werthe von y'', y''' u. s. w. werden ähnliche Gleichungen verschaffen. Man wähle aus diesen verschiedenen Gleichungen die einfachsten und am meisten genäherten, und bestimme aus ihnen die Werthe von c, c', c'' u. s. w. durch Functionen von θ; dann substituire man diese Werthe in X, $X_{,}$ u. s. w. und verwandele hernach θ in t, so erhält man, wenn es möglich ist, die Werthe von y, y' u. s. w. ohne Kreisbogen außerhalb der periodischen Zeichen.

45. Wir wollen nun die im 40sten Satze erklärte Methode wieder vornehmen. Es folgt aus ihr, daſs, wenn man die Parameter c, c', c'' u. s. w. anstatt sie beständig zu setzen, sich so ändern läſst, daſs

$$dc = -\alpha \,.\, dt \,.\, (FQ + F'Q' + \ldots)$$
$$dc' = -\alpha \,.\, dt \,.\, (HQ + H'Q' + \ldots)$$
etc.

ist, daſs man immer die in Integrale von der Ordnung $(i - 1)$

$$c = V; \quad c' = V'; \quad c'' = V''; \text{ etc.}$$

so wie in dem Fall, $\alpha = 0$, erhalten wird. Hieraus folgt, daſs nicht nur die endlichen Integrale, sondern auch alle Gleichungen, in welchen die Differenziale nur niedriger als von der Ordnung i sind, sowohl in dem Fall $\alpha = 0$, als auch in dem Fall, wo α irgend einen Werth hat, dieselbe Form haben werden, weil diese Gleichungen bloſs aus der Vergleichung der vorhergehenden Integrale von der Ordnung $i - 1$ entstehen können. Man wird also in beiden Fällen die endlichen Integrale auf gleiche Art $(i - 1)$ mal hinter einander differenziiren können, ohne die Gröſsen c, c' u. s. w. als veränderlich anzusehen; und da es erlaubt ist, alles zugleich als veränderlich anzusehen, so werden daraus Bedingungsgleichungen zwischen den Parametern c, c' u. s. w. und ihren Differenzialen entstehen.

Die Werthe von y, y' . . . und ihrer Differenziale bis zur Ordnung $(i-1)$ inclusive, werden in den beiden Fällen, wenn α gleich Null ist, und wenn α irgend einen Werth hat, dieselben Functionen von t und der Parameter c, c', c'' . . . seyn. Es sey also Y irgend eine Function der veränderlichen Gröſsen y, y', y'' u. s. w. und ihrer Differenziale, welche aber niedriger als von

der Ordnung $(i - 1)$ sind; man nenne T die Function von t, in welche sie sich verwandelt, wenn man in ihr statt dieser veränderlichen Gröſsen und ihrer Differenziale ihre durch t gegebenen Werthe setzt. Man wird beym Differenziiren der Gleichung $Y = T$ die Parameter c, c', c'' u. s. w. als beständig ansehen können; man wird sogar das partielle Differenzial von Y in Beziehung auf eine einzige oder auf mehrere der veränderlichen Gröſsen y, y' u. s. w. nehmen können, wofern man nur auch in T bloſs dasjenige als veränderlich ansieht, was sich mit ihnen ändert. Man wird in allen diesen Differenziationen die Parameter c, c', c'' u. s. w. immer als beständige Gröſsen ansehen können, weil man in den beiden Fällen, wenn α gleich Null, und wenn α gleich irgend einer Gröſse ist, durch die Substitution der in t gegebenen Werthe von y, y' u. s. w. und der Werthe ihrer Differenziale, Gleichungen erhält, welche identisch gleich Null sind.

Wenn die Differenzialgleichungen von der Ordnung $i - 1$ sind, so ist es nicht mehr erlaubt, die Parameter c, c', c'' u. s. w. beym Differenziiren als beständig anzusehen. Wir wollen, um diese Gleichungen zu differenziiren, die Gleichung $\phi = 0$ betrachten, wo ϕ eine Differenzialfunction von der Ordnung $(i - 1)$ ist, und die Parameter c, c', c'' u. s. w. enthält; es sey $\delta\phi$ das Differenzial dieser Function, so genommen, daſs man c, c' u. s. w. und die Differenziale $d^{i-1}y$, $d^{i-1}y'$ u. s. w. als beständig ansieht. Es sey S der Koefficient von $\frac{d^iy}{dt^{i-1}}$ im vollständigen Differenzial von ϕ; es sey S' der Koefficient von $\frac{d^iy'}{dt^{i-1}}$ in demselben Differenzial, und so ferner. Differenziirt man die Gleichung $\phi = 0$, so erhält man

$$0 = \delta\phi + \left(\frac{d\phi}{dc}\right) . dc + \left(\frac{d\phi}{dc'}\right) . dc' + \text{etc.}$$
$$+ S . \frac{d^iy}{dt^{i-1}} + S' . \frac{d^iy'}{dt^{i-1}} + \text{etc.}$$

Substituirt man statt $\frac{d^iy}{dt^{i-1}}$ seinen Werth $- dt . (P + \alpha . Q)$ und statt $\frac{d^iy'}{dt^{i-1}}$ seinen Werth $- dt . (P' + \alpha . Q')$ etc., so erhält man

$$o = \delta\phi + \left(\frac{d\phi}{dc}\right) . dc + \left(\frac{d\phi}{dc'}\right) . dc' + \text{etc.}$$

$$- dt . (SP + S'P' + \text{etc.}) - \alpha dt . (SQ + S'Q' + \text{etc.}) \qquad (t)$$

Die Parameter sind in der Voraussetzung, daſs α gleich Null ist, beständig, folglich

$$o = \delta\phi - dt . (SP + S'P' + \text{etc.}).$$

Substituirt man in diese Gleichung statt c, c', c'' u. s. w. ihre Werthe V, V', V'' u. s. w., so wird man eine Differenzialgleichung von der Ordnung $(i - 1)$ ohne willkührliche Gröſsen erhalten, welches unmöglich ist, wofern nicht diese Gleichung identisch gleich Null ist; die Gleichung (t) wird sich also in folgende verwandeln:

$$o = \left(\frac{d\phi}{dc}\right) . dc + \left(\frac{d\phi}{dc'}\right) . dc' + \text{etc.}$$

$$- \alpha\, dt . (SQ + S'Q' + \text{etc.}) \qquad (x)$$

Man sieht also, daſs es hinreichend ist, um die Gleichung $\phi = o$ zu differenziiren, die Parameter c, c' u. s. w. und die Differenziale $d^{i-1}y$, $d^{i-1}y'$ u. s. w. in ϕ als veränderlich anzusehen, und nach den Differenziationen $- \alpha Q$, $- \alpha Q'$ u. s. w. statt $\frac{d^iy}{dt^i}$, $\frac{d^iy'}{dt^i}$ zu setzen.

Es sey $\psi = o$ eine endliche Gleichung zwischen y, y' u. s. w. und der veränderlichen Gröſse t; bezeichnet man nun mit $\delta\psi$, $\delta^2\psi$ u. s. w. die auf einander folgenden Differenziale von ψ, so genommen, daſs man c, c' u. s. w. als beständig ansieht, so wird man nach dem Vorhergehenden, selbst in dem Fall, wenn c, c' u. s. w. veränderlich sind, folgende Gleichungen haben:

$$\psi = o; \quad \delta\psi = o; \quad \delta^2\psi = o; \; \ldots \; \delta^{i-1}\psi = o.$$

Verwandelt man nun successive in der Gleichung (x) die Function ϕ in ψ, $\delta\psi$, $\delta^2\psi$ u. s. w., so erhält man

$$o = \left(\frac{d\psi}{dc}\right) . dc + \left(\frac{d\psi}{dc'}\right) . dc' + \text{etc.}$$

$$o = \left(\frac{d\,.\,\delta\psi}{dc}\right) . dc + \left(\frac{d\,.\,\delta\psi}{dc'}\right) . dc' + \text{etc.}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$o = \left(\frac{d\,.\,\delta^{i-1}\psi}{dc}\right) . dc + \left(\frac{d\,.\,\delta^{i-1}\psi}{dc'}\right) . dc' + \text{etc.}$$

$$- \alpha\, dt . \left[Q . \left(\frac{d\psi}{dy}\right) + Q' . \left(\frac{d\psi}{dy'}\right) + \text{etc.}\right].$$

Nimmt man also an, daſs $\psi = 0$, $\psi' = 0$ u. s. w. die n endlichen Integrale der Differenzialgleichungen

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + P; \quad 0 = \frac{d^i y'}{dt^i} + P' \text{ etc.}$$

sind, so wird man die in Gleichungen erhalten, vermittelst welcher man die Parameter c, c', c'' u. s. w. wird bestimmen können, ohne daſs man hierzu die Gleichungen $c = V$, $c' = V'$ u. s. w. zu bilden braucht. Haben aber die Integrale die letztere Form, so wird die Bestimmung von c, c' u. s. w. einfacher seyn.

Diese Methode, die Parameter als veränderlich anzusehen, ist in der Analysis und in ihren Anwendungen von groſsem Nutzen. Um einen neuen Gebrauch derselben zu zeigen, wollen wir folgende Differenzialgleichung betrachten:

$$0 = \frac{d^i y}{dt^i} + P,$$

wo P eine Function von t, y, ihrer Differenziale bis zur Ordnung $i - 1$ und der Gröſsen q, q' u. s. w., welche Functionen von t sind, ist. Wir nehmen an, daſs man das endliche Integral dieser Differenzialgleichung für den Fall, wenn q, q' u. s. w. beständige Gröſsen sind, hat, und wir bezeichnen dies Integral durch $\Phi = 0$, welches i willkührliche Gröſsen c, c' u. s. w. enthalten wird; wir bezeichnen durch $\delta\Phi$, $\delta^2\Phi$, $\delta^3\Phi$ u. s. w. die auf einander folgenden Differenziale von Φ, so genommen, daſs man q, q' u. s. w., so wie auch die Parameter c, c' u. s. w. als beständig ansieht. Läſst man nun alle diese Gröſsen sich ändern, so wird das Differenzial folgendes seyn:

$$\delta\Phi + \left(\frac{d\Phi}{dc}\right) . dc + \left(\frac{d\Phi}{dc'}\right) . dc' + \text{etc.} + \left(\frac{d\Phi}{dq}\right) . dq + \left(\frac{d\Phi}{dq'}\right) . dq' + \text{etc.}$$

Setzt man nun

$$0 = \left(\frac{d\Phi}{dc}\right) . dc + \left(\frac{d\Phi}{dc'}\right) . dc' + \text{etc.} + \left(\frac{d\Phi}{dq}\right) . dq + \left(\frac{d\Phi}{dq'}\right) . dq' + \text{etc.},$$

so wird $\delta\Phi$ noch das erste Differenzial in dem Fall seyn, wenn c, c' u. s. w. q, q' u. s. w. veränderliche Gröſsen sind. Setzt man eben so

$$0 = \left(\frac{d . \delta\Phi}{dc}\right) . dc + \left(\frac{d . \delta\Phi}{dc'}\right) . dc' + \text{etc.} + \left(\frac{d . \delta\Phi}{dq}\right) . dq + \left(\frac{d . \delta\Phi}{dq'}\right) . dq' + \text{etc.}$$

.

$$0 = \left(\frac{d.\delta^{i-1}\Phi}{dc}\right) . dc + \left(\frac{d.\delta^{i-1}\Phi}{dc'}\right) . dc' + \text{etc.} + \left(\frac{d.\delta^{i-1}\Phi}{dq}\right) . dq + \left(\frac{d.\delta^{i-1}\Phi}{dq'}\right) . dq' + \text{etc.}$$

so werden $\delta^2\phi$, $\delta^3\phi$. . . $\delta^i\phi$ noch die zweyten, dritten, . . . iten Differenziale von ϕ seyn, wenn c, c' u. s. w. q, q' u. s. w. als veränderlich angenommen werden.

Nun ist die Differenzialgleichung

$$o = \frac{d^i y}{dt^i} + P,$$

für den Fall daſs c, c' u. s. w., q, q' u. s. w. beständig sind, das Resultat der Elimination der Parameter c, c' u. s. w. vermittelst der Gleichungen

$$\phi = o; \quad \delta\phi = o; \quad \delta^2\phi = o; \ldots \quad \delta^i\phi = o.$$

Da nun diese letztern Gleichungen auch dann noch Statt haben, wenn man q, q' u. s. w. als veränderlich annimmt, so wird die Gleichung $\phi = o$ auch noch in diesem Falle der gegebenen Differenzialgleichung Genüge thun, wofern man nur die Parameter c, c' u. s. w. vermittelst der i vorhergehenden Differenzialgleichungen bestimmt hat; und da ihre Integration i willkührliche beständige Gröſsen giebt, so wird die Function ϕ diese willkührlichen Gröſsen enthalten, und die Gleichung $\phi = o$ wird das vollständige Integral der gegebenen Gleichung seyn.

Man kann diese Art, die willkührlichen Gröſsen sich ändern zu lassen, dann mit Vortheil gebrauchen, wenn die Gröſsen q, q' u. s. w. sehr langsam sich ändern, weil dieser Umstand im Allgemeinen die Integration durch Näherungen der Differenzialgleichungen, welche die veränderlichen Parameter c, c' u. s. w. bestimmen, viel leichter macht.

Sech-

Sechstes Kapitel.

Zweyte Annäherung der himmlischen Bewegungen, oder Theorie ihrer Stöhrungen.

46. Wir wollen nun die vorhergehenden Methoden auf die Stöhrungen der himmlischen Bewegungen anwenden, um daraus die einfachsten Ausdrücke ihrer periodischen und ihrer sekular Ungleichheiten herzuleiten. Wir wollen hierzu die Differenzialgleichungen (1), (2) und (3) des 9ten Satzes wieder vornehmen, welche die relative Bewegung von m um M bestimmen [93]). Setzt man

$$R = \frac{m' . (xx' + yy' + zz')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{m'' . (xx'' + yy'' + zz'')}{(x''^2 + y''^2 + z''^2)^{\frac{3}{2}}} + \text{etc.} - \frac{\lambda}{m},$$

wo λ nach dem angeführten Satz folgender Gröſse gleich ist:

$$\frac{mm'}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{mm''}{[(x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2]^{\frac{1}{2}}}$$
$$+ \frac{m'm''}{[(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2]^{\frac{1}{2}}} + \text{etc};$$

setzt man ferner $M + m = \mu$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$; etc., so erhält man

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu . x}{r^3} + \left(\frac{dR}{dx}\right) \\ 0 &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu . y}{r^3} + \left(\frac{dR}{dy}\right) \\ 0 &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu . z}{r^3} + \left(\frac{dR}{dz}\right) \end{aligned}\right\} \quad (P).$$

93) Es scheint mir noch bequemer, die Gleichungen (i) des 14ten Satzes zu gebrauchen.

Multiplicirt man die erste von diesen drey Gleichungen mit dx, die zweyte mit dy, die dritte mit dz und integrirt ihre Summe, so erhält man

$$o = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2\int \mathrm{d}R; \qquad (Q)$$

wo das Differenzial dR blofs in Beziehung auf die Koordinaten x, y, z des Körpers m genommen werden mufs, und wo a eine willkührliche beständige Gröfse ist, welche vermöge des 18ten und 19ten Satzes, wenn R gleich Null ist, die halbe grofse Axe der von m um M beschriebenen Ellipse ist.

Multiplicirt man die Gleichungen (P) respective mit x, y, z, und addirt man sie zum Integral (Q), so erhält man

$$o = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d^2 . r^2}{dt^2} - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2\int \mathrm{d}R + x \cdot \left(\frac{dR}{dx}\right) + y \cdot \left(\frac{dR}{dy}\right) + z \cdot \left(\frac{dR}{dz}\right) \quad (R).$$

Nun kann man sich vorstellen, dafs die stöhrenden Massen m', m'' u. s. w. mit einem Koefficienten α multiplicirt sind, und alsdann wird der Werth von r eine Function der Zeit t und der Gröfse α seyn. Entwickelt man diese Function in Beziehung auf die Potenzen von α, und setzt man nach dieser Entwickelung $\alpha = 1$, so wird sie nach den Potenzen und Producten der stöhrenden Massen geordnet seyn. Man bezeichne durch die vor eine Gröfse gesetzte Karakteristik δ das Differenzial dieser Gröfse in Beziehung auf α genommen und durch $d\alpha$ dividirt. Hat man nun δr durch eine nach den Potenzen von α geordnete Reihe bestimmt, so wird man den Radius vector r erhalten, wenn man diese Reihe mit $d\alpha$ multiplicirt, wenn man sie dann in Beziehung auf α integrirt, und zu diesem Integral eine, von α unabhängige, Function von t setzt, eine Function, welche offenbar der Werth von r in dem Fall ist, wenn die stöhrenden Kräfte gleich Null sind, wo der Körper m einen Kegelschnitt beschreibt. Die Bestimmung von r beruht also darauf, die Differenzialgleichung, welche δr bestimmt, zu bilden und zu integriren.

Hierzu werden wir die Gleichung (R) wieder vornehmen, und zu mehrerer Vereinfachung

$$x \cdot \left(\frac{dR}{dx}\right) + y \cdot \left(\frac{dR}{dy}\right) + z \cdot \left(\frac{dR}{dz}\right) = r \,.\, R'$$

setzen. Differenziirt man dieselbe in Beziehung auf α, so erhält man

$$o = \frac{d^2 \,.\, r\delta r}{dt^2} + \frac{\mu \,.\, r\delta r}{r^3} + 2\int \delta \,.\, \mathrm{d}R + \delta \,.\, rR' \qquad (S).$$

Man nenne δv den unendlich kleinen von den zwey Radius vectors r und $r + dr$ eingeschlossenen Bogen, so wird das Element der von m um M beschriebenen krummen Linie gleich $\sqrt{dr^2 + r^2\, dv^2}$ seyn; man wird also $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2\, dv^2$ haben, und die Gleichung (Q) wird sich in folgende verwandeln:

$$o = \frac{r^2\, dv^2 + dr^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + 2\int \mathrm{d}R.$$

Eliminirt man aus dieser Gleichung $\frac{\mu}{a}$ vermittelst der Gleichung (R), so erhält man

$$\frac{r^2\, dv^2}{dt^2} = \frac{r\,.\,d^2r}{dt^2} + \frac{\mu}{r} + r\,.\,R',$$

woraus man, wenn man in Beziehung auf α differenziirt, folgende erhält [94]):

$$\frac{2\, r^2\, dv.d.\delta v}{dt^2} = \frac{r\,.\,d^2.\delta r - \delta r\,.\,d^2 r}{dt^2} - \frac{3\mu\; r\delta r}{r^3} + r\,.\,\delta R' - R'\,.\,\delta r.$$

Setzt man in dieser Gleichung statt $\frac{\mu\,.\,r\delta r}{r^3}$ seinen aus der Gleichung (S) gezogenen Werth, so erhält man

$$d\,.\,\delta v = \frac{d\,.\,(dr\,.\,\delta r + 2\, r\,.\,d\delta r) + dt^2\,.\,(3\int\delta\,.\,\mathrm{d}R + 2\, r.\delta R' + R'\,.\,\delta r)}{r^2\,.\,dv} \quad \text{(T).}$$

Man wird die Werthe von δr und von δv vermittelst der Gleichungen (S) und (T) so genau erhalten können, als man will; man muſs aber bemerken, daſs das Integral v nicht in einer Ebene ist, weil dv der zwischen den Radius vectors

94) Differenziirt man in Beziehung auf α, so erhält man

$$\frac{2r^2\,.\,dv.\delta dv}{dt^2} + \frac{2r\,.\delta r.\,dv^2}{dt^2} = \frac{\delta r\,.\,d^2r}{dt^2} + \frac{r\,.\,\delta\,.\,d^2 r}{dt^2} - \frac{\mu\,\delta r}{r^2} + \delta r\,.\,R' + r\,.\,\delta R'.$$

Man multiplicire die ursprüngliche Gleichung, woraus man diese Differenzialgleichung abgeleitet hat, mit $\frac{2\,\delta r}{r}$, so verwandelt sie sich in

$$\frac{2r\,.\,\delta r\,.\,dv^2}{dt^2} = \frac{2.\delta r.\,d^2r}{dt^2} + \frac{2\mu\,.\,\delta r}{r^2} + 2\,\delta r\,.\,R'.$$

Zieht man diese Gleichung von der vorhergehenden ab, so erhält man, wenn man noch δd und δd^2 mit $d\delta$ und $d^2\delta$ verwechselt,

$$\frac{2r^2.dv\,.\,d\delta v}{dt^2} = \frac{r\,.\,d^2\delta r - \delta r\,.\,d^2r}{dt^2} - \frac{3\mu\,.\,\delta r}{r^2} + r\,.\,\delta R' - \delta r\,.\,R'.$$

r und $r + dr$ enthaltene Winkel ist. Wir wollen, um hieraus den Werth des Winkels zu erhalten, welcher von dem auf eine feste Ebene projicirten Radius vector r beschrieben wird, diesen letztern Winkel mit $v_,$ bezeichnen, und die Tangente der Breite von m über diese Ebene, s nennen, so wird $r(1 + s^2)^{-\frac{1}{2}}$ der Ausdruck des projicirten Radius vectors seyn, und das Quadrat des Elements der von m beschriebenen krummen Linie wird [95])

$$\frac{r^2 \cdot dv_,^2}{1 + s^2} + dr^2 + \frac{r^2\, ds^2}{(1 + s^2)^2}$$

seyn; nun ist aber das Quadrat dieses Elements auch gleich $r^2 dv^2 + dr^2$; setzt man beide Ausdrücke einander gleich, so erhält man

$$dv_, = \frac{dv \cdot \sqrt{(1 + s^2)^2 - \frac{ds^2}{dv^2}}}{\sqrt{1 + s^2}}.$$

Man wird so $dv_,$ vermittelst dv bestimmen, wenn s bekannt seyn wird.

Nimmt man für die feste Ebene die Ebene der Bahn von m zu einer gegebenen Epoche an, so werden s und $\frac{ds}{dv}$ augenscheinlich von der Ordnung der stöhrenden Kräfte seyn; vernachlässigt man also die Quadrate und Producte dieser Kräfte, so wird $v = v_,$ seyn. Man kann in der Theorie der Planeten und Kometen diese Quadrate und Producte vernachlässigen, einige Glieder dieser Ordnung ausgenommen, welche durch besondere Umstände merklich werden, und welche man leicht vermittelst der Gleichungen (S) und (T) wird bestimmen können. Diese letztern Gleichungen erhalten eine einfachere Gestalt,

95) Das Quadrat des Elements einer Kurve ist den Quadraten der Differenziale der drey Koordinaten gleich. Diese Differenziale sind: erstlich das Differenzial der Breite, welches, da die Tangente der Breite gleich s ist, gleich $\frac{ds}{1 + s^2}$ ist; man mufs diesen kleinen Kreisbogen noch mit dem Halbmesser r multipliciren, um seine Gröfse, als Linie betrachtet, zu erhalten. Das zweyte Differenzial ist das Differenzial von r, nämlich dr. Das dritte Differenzial ist ein kleiner Kreisbogen, der dem folgenden Kreisbogen parallel und gleich ist, welcher dem Winkel $dv_,$ und dem projicirten Halbmesser $r(1 + s^2)^{-\frac{1}{2}}$ zugehört, und also gleich $r(1 + s^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot dv_,$ ist. Die Summe der Quadrate dieser drey Differenziale ist also

$$\frac{r^2 \cdot ds^2}{(1 + s^2)^2} + dr^2 + \frac{r^2 \cdot dv_,^2}{1 + s^2},$$

und dies ist der Ausdruck des Quadrats des Elements der Kurve.

wenn man nur die ersten Potenzen der stöhrenden Kräfte betrachtet. Man kann alsdann in der That δr und δv als die diesen Kräften zugehörenden Theile von r und von v ansehen; δR, $\delta . rR'$ sind die Werthe, welche R und rR' erhalten, wenn man in ihnen statt der Koordinaten der Körper ihre auf die elliptische Bewegung sich beziehenden Werthe setzt [96]); wir können sie durch diese letztern Gröſsen bezeichnen, wenn wir sie diesen Bedingungen unterwerfen. Die Gleichung (S) verwandelt sich so in folgende:

$$o = \frac{d^2 . r\delta r}{dt^2} + \frac{\mu . r\delta r}{r^3} + 2\int . dR + rR'.$$

Da man für die feste Ebene der x und der y die Ebene der Bahn m zu einer gegebenen Epoche annimmt, so wird z von der Ordnung der anziehenden Kräfte seyn; und da man die Quadrate dieser Kräfte vernachlässigt, so wird man die Gröſse $z . \left(\frac{dR}{dz}\right)$ vernachlässigen können. Auch ist der Radius vector r von seiner Projection nur um Gröſsen von der Ordnung z^2 unterschieden. Der Winkel, welchen dieser Radius mit der Axe der x macht, ist von seiner Projection nur um Gröſsen von derselben Ordnung verschieden; man kann also diesen Winkel gleich v setzen, und man hat bis auf Gröſsen von derselben Ordnung

$$x = r . \cos v; \qquad y = r . \sin v.$$

Hieraus erhält man [97])

96) Alle Glieder von R, und also auch von R', sind in eine der stöhrenden Kräfte multiplicirt. Wollte man nun in diesen Gliedern statt der Koordinaten nicht bloſs ihren elliptischen Werth setzen, sondern auch den Theil, welcher von den stöhrenden Kräften abhängt, so würden die aus diesem letztern entspringenden Gröſsen nothwendig in eine der stöhrenden Kräfte multiplicirt seyn; und da das ganze Glied schon eine der stöhrenden Kräfte zum Factor hat, so werden diese Gröſsen wenigstens in zwey der stöhrenden Kräfte multiplicirt, und also, der Annahme gemäſs, weggelassen werden müssen. Man muſs also in R und R' statt der Koordinaten bloſs ihren elliptischen Werth setzen. Der Hr. Verfasser hat kein neues Zeichen gewählt, um die Werthe, welche R und R' dadurch erhalten, zu bezeichnen; man bemerke also, daſs man in den zunächst folgenden Gleichungen statt der Koordinaten ihre durch die bloſse elliptische Bewegung gegebenen Werthe setzen muſs. Man muſs nun nach dem Vorhergehenden, um δR zu erhalten, R mit α multipliciren, dann in Beziehung auf α differenziiren und durch $d\alpha$ dividiren; δR ist also offenbar gleich R, weil R nur die erste Potenz von α enthält. Eben so ist $\delta . rR'$ gleich rR'.

97) Da R eine Function von x und y ist, so hat man $dR = \left(\frac{dR}{dx}\right) dx + \left(\frac{dR}{dy}\right) dy$;

R ist aber auch eine Function von r und v, folglich $dR = \left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{dv}\right) dv$;

$$x \cdot \left(\frac{dR}{dx}\right) + y \cdot \left(\frac{dR}{dy}\right) = r \cdot \left(\frac{dR}{dr}\right),$$

und folglich $r \cdot R' = r \cdot \left(\frac{dR}{dr}\right)$. Man kann sich leicht durch Differenziiren versichern, daſs die vorhergehende Differenzialgleichung vermittelst der zwey ersten Gleichungen (P) folgende Gleichung geben wird, wenn man die Quadrate der stöhrenden Kraft vernachlässsigt [98]):

$$r \cdot \delta r = \frac{x \cdot \int y dt \cdot \left[2\int dR + r \cdot \left(\frac{dR}{dr}\right)\right] - y \cdot \int x dt \cdot \left[2\int dR + r \cdot \left(\frac{dR}{dr}\right)\right]}{\left(\frac{xdy - ydx}{dt}\right)}.$$

setzt man beide Werthe von dR einander gleich, so erhält man

$$\left(\frac{dR}{dx}\right) dx + \left(\frac{dR}{dy}\right) dy = \left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{dv}\right) dv.$$

Nun ist $dx = dr \cdot \cos v - dv \cdot r \sin v$, und $dy = dr \cdot \sin v + dv \cdot r \cdot \cos v$. Substituirt man diese Werthe von dx und dy, so erhält man

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)dx + \left(\frac{dR}{dy}\right)dy = \left[\left(\frac{dR}{dx}\right) \cdot \cos v + \left(\frac{dR}{dy}\right) \cdot \sin v\right] \cdot dr - \left[\left(\frac{dR}{dx}\right) \cdot r \cdot \sin v - \left(\frac{dR}{dy}\right) \cdot r \cdot \cos v\right] dv.$$

Diese Gröſse muſs vermöge der vorhergehenden Gleichung gleich $\left(\frac{dR}{dr}\right) dr + \left(\frac{dR}{dv}\right) dv$ seyn, und die Koefficienten von dr müssen also in beiden Ausdrücken einander gleich seyn; dies giebt

$$\left[\left(\frac{dR}{dx}\right) \cdot \cos v + \left(\frac{dR}{dy}\right) \cdot \sin v\right] = \left(\frac{dR}{dr}\right),$$

oder wenn man mit r multiplicirt und statt $r \cdot \cos v$ und $r \cdot \sin v$ ihre Werthe x und y setzt,

$$\left(\frac{dR}{dx}\right) \cdot x + \left(\frac{dR}{dy}\right) \cdot y = \left(\frac{dR}{dr}\right) \cdot r.$$

Die Vergleichung der Koefficienten von dv giebt

$$x \cdot \left(\frac{dR}{dy}\right) - y \cdot \left(\frac{dR}{dx}\right) = \left(\frac{dR}{dv}\right).$$

98) Man setze der Kürze wegen $2\int dR + rR'$ gleich Q, so hat man

$$o = \frac{d^2 \cdot r\delta r}{dt^2} + \frac{\mu \cdot r\delta r}{r^3} + Q \ldots (1).$$

Man kann aus dieser Gleichung das Glied $\frac{\mu \cdot r\delta r}{r^3}$ vermittelst einer der Gleichungen (P) eliminiren; man muſs hierzu die erste der Gleichungen (P) mit $r\delta r \cdot dt$, die Gleichung (1) mit $- x \cdot dt$ multipliciren, und beide Gleichungen addiren. Man erhält so

$$o = - \frac{x \cdot d^2 \cdot r\delta r}{dt^2} - \frac{\mu x}{r^3} \cdot r\delta r \cdot dt - Qx dt$$

$$o = \frac{d^2x}{dt} \cdot r\delta r + \frac{\mu x}{r^3} \cdot r\delta r \cdot dt + r\delta r \cdot dt \cdot \left(\frac{dR}{dx}\right).$$

Die Koordinaten im zweyten Theil dieser Gleichung können auf die elliptische Bewegung bezogen werden; dieses giebt $\frac{xdy - ydx}{dt}$ gleich einer beständigen Gröſse, und nach dem 19ten Satze gleich $\sqrt{\mu\ a\,(1 - e^2)}$, wo ae die Eccentricität der Bahn von m ist. Substituirt man im Ausdruck von $r\delta r$ statt x und y ihre Werthe $r\,.\cos v$ und $r\,.\sin v$ und statt $\frac{xdy - ydx}{dt}$ die Gröſse

In der Summe beider Gleichungen muſs man das Glied $r\delta r\,.\,dt\,.\left(\frac{dR}{dx}\right)$ weglassen, weil es von der Ordnung der Quadrate der stöhrenden Kräfte ist, da jeder Theil von δr und von $\left(\frac{dR}{dx}\right)$ wenigstens in eine der stöhrenden Kräfte multiplicirt ist. Diese Summe giebt also folgende Gleichung:

$$0 = \frac{d^2x\,.\,r\delta r - x\,.\,d^2\,.\,r\delta r}{dt} - Q\,x\,dt \;.\;.\;.\; (2).$$

Multiplicirt man eben so die zweyte der Gleichungen (P) mit $r\delta r\,.\,dt$, und die Gleichung (1) mit $-y\,dt$, so erhält man

$$0 = \frac{d^2y\,.\,r\delta r - y\,.\,d^2\,.\,r\delta r}{dt} - Q\,y\,dt \;.\;.\;.\; (3),$$

welche Gleichung man unmittelbar aus (2) erhält, wenn man x in y verwandelt. Multiplicirt man das Integral der Gleichung (2) mit y; das Integral der Gleichung (3) mit $-x$, so giebt ihre Summe

$$\left.\begin{aligned} 0 = y\int\frac{d^2x\,.\,r\delta r}{dt} - y\int\frac{x\,d^2\,.\,r\delta r}{dt} - y\int Q\,x\,dt \\ - x\int\frac{d^2y\,.\,r\delta r}{dt} + x\int\frac{y\,d^2\,.\,r\delta r}{dt} + x\int Q\,y\,dt \end{aligned}\right\}\ (4)$$

Integrirt man theilweise, so hat man $y\int d^2x\,.\,\frac{r\delta r}{dt} = ydx\,.\,\frac{r\delta r}{dt} - y\int dx\,.\,d\,.\,\frac{r\delta r}{dt}$; ferner $-y\int x\,d^2\,.\,\frac{r\delta r}{dt} = -y\,x\,.\,d\,.\,\frac{r\delta r}{dt} + y\int dx\,.\,d\,.\,\frac{r\delta r}{dt}$, und die Summe beider Integrale ist $ydx\,.\,\frac{r\delta r}{dt} - yx\,.\,d\,.\,\frac{r\delta r}{dt}$. Verwechselt man x mit y und y mit x, so erhält man

$$x\int d^2y\,.\,\frac{r\delta r}{dt} - x\int y\,d^2\,.\,\frac{r\delta r}{dt} = x\,dy\,.\,\frac{r\delta r}{dt} - xy\,.\,d\,.\,\frac{r\delta r}{dt}.$$

Die Summe aller vier Integrale ist also $ydx\,.\,\frac{r\delta r}{dt} - xdy\,.\,\frac{r\delta r}{dt}$, und die Gleichung (4) verwandelt sich in folgende:

$$\left(\frac{ydx - xdy}{dt}\right).\,r\delta r + x\int Q\,y\,dt - y\int Q\,x\,dt = 0 \;.\;.\;.\; (5).$$

Es kann scheinen, daſs man bey den Integralen der Gleichungen (2) und (3) die beständige Gröſse hinzuzusetzen vergessen hat; da man aber die Integrale $\int Qydt$ und $\int Qxdt$ nur andeuten, und nicht wirklich hat integriren können, so sind die beständigen Gröſsen in ihnen enthalten, und man wird sie dann bestimmen, wenn man sie wirklich integrirt.

$\sqrt{\mu\, a\, (1 - e^2)}$; bemerkt man endlich, dafs nach dem 20sten Satz $\mu = n^2 a^3$ ist, so erhält man

$$\delta r = \frac{\left\{\begin{array}{l} a \,.\, \cos v \,.\int n\,dt \,.\, r \,.\, \sin v \,.\left[2 \,.\int \mathrm{d}R + r \,.\left(\frac{dR}{dr}\right)\right] \\ - a \,.\, \sin v \,.\int n\,dt \,.\, r \,.\, \cos v \,.\left[2 \,.\int \mathrm{d}R + r \,.\left(\frac{dR}{dr}\right)\right] \end{array}\right\}}{\mu \sqrt{1 - e^2}} \quad (X).$$

Integrirt man die Gleichung (T) und vernachlässigt man die Quadrate der anziehenden Kräfte, so erhält man [99])

$$\delta v = \frac{\frac{2r \,.\, d \,.\, \delta r + dr \,.\, \delta r}{a^2\, n\, dt} + \frac{3a}{\mu} \,.\iint n\,dt \,.\, \mathrm{d}R + \frac{2a}{\mu} \,.\int n\,dt \,.\, r \,.\left(\frac{dR}{dr}\right)}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (Y).$$

Die-

99) Wir haben im zweyten Satz des zweyten Buchs $r^2 dv = xdy - ydx$ gefunden, und folglich $r^2\, dv = dt \,.\, \sqrt{\mu\, a\, (1 - e^2)} = ndt \,.\, a^2 \,.\, \sqrt{1 - e^2} = \frac{dt}{n} \,.\, \frac{\mu}{a} \sqrt{1 - e^2}$. Man kann diese Werthe von $r^2 dv$ in die Gleichung T setzen, ob sie schon eigentlich nur in der Ellipse Statt finden. Denn es sey $r^2 dv = p + q$, wo p der elliptische Theil des Werths von $r^2 dv$ und q der von Perturbationen abhängende Theil ist, so ist $(r^2 dv)^{-1} = p^{-1} - p^{-2}\, q + p^{-3}\, q^2 \ldots$ Da nun in der Gleichung T die Gröfse $(r^2 dv)^{-1}$ solche Factoren hat, die schon von Perturbationen abhängen, so kann man vom Werth von $(r^2 dv)^{-1}$ nur das erste Glied p^{-1} brauchen, weil die übrigen Glieder nothwendig wenigstens die Quadrate und Producte der stöhrenden Massen enthalten würden. Die Gleichung T giebt so

$$d\delta v = \frac{d \,.\, \frac{2r \,.\, d\delta r + dr \,.\, \delta r}{a^2\, n\, dt} + \frac{a}{\mu} \,.\, n\,dt \,.\, (3\int \delta \,.\, \mathrm{d}R + 2r \,.\, \delta R' + R' \,.\, \delta r)}{\sqrt{1 - e^2}},$$

und wenn man integrirt

$$\delta v = \frac{\frac{2r \,.\, d\delta r + dr \,.\, \delta r}{a^2\, n\, dt} + \frac{3a}{\mu}\int u\,dt \,.\int \delta \,.\, \mathrm{d}R + \frac{2a}{\mu}\int n\,dt \,.\, r \,.\, \delta R' + \frac{a}{\mu}\int n\,dt\; R'\,\delta r}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Nun ist aber $\delta \,.\, \mathrm{d}R = \mathrm{d} \,.\, \delta R$ und δR, wenn man die Producte und Quadrate der stöhrenden Kräfte vernachlässigt, gleich R; folglich $\int n\,dt \,.\int \delta \,.\, \mathrm{d}R = \int n\,dt \,.\int \mathrm{d}R$, welches doppelte Integral man bekanntlich auch so schreibt: $\iint n\,dt \,.\, \mathrm{d}R$.

Man hat ferner $r \,.\, \delta R' = r R' = r \left(\frac{dR}{dr}\right)$, folglich $\int n\,dt \,.\, r \,.\, \delta R' = \int n\,dt \,.\, r \left(\frac{dR}{dr}\right)$.

Alle Glieder der Gröfse $\int n\,dt\; R'\,\delta r$ enthalten endlich Producte oder Quadrate der stöhrenden Kräfte, weil alle Glieder von R' und von δr in eine der stöhrenden Kräfte multiplicirt sind; man mufs also dies Integral weglassen. Die vorhergehende Gleichung für δv verwandelt sich so in die im Text gegebene Gleichung (Y).

Dieser Ausdruck wird leicht die Stöhrungen der Bewegung des Körpers in Länge geben, wenn die Stöhrungen des Radius vectors bestimmt seyn werden.

Wir haben nur noch die Stöhrungen der Bewegung von m in der Breite zu bestimmen. Hierzu werden wir die dritte der Gleichungen (P) wieder vornehmen. Integrirt man sie, so wie wir die Gleichung (S) integrirt haben, und setzt man $z = r\delta s$, so erhält man [100])

$$\delta s = \frac{a \,.\, \cos v \,.\int n dt \,.\, r \,.\, \sin v \,.\left(\frac{dR}{dz}\right) - a \,.\, \sin v \,.\int n dt \,.\, r \,.\, \cos v \,.\left(\frac{dR}{dz}\right)}{\mu \sqrt{1 - e^2}} \quad (Z);$$

δs ist die Breite von m über die Ebene seiner ursprünglichen Bahn. Will man die Bewegung auf eine sehr wenig gegen diese Bahn geneigte Ebene beziehen,

100) Setzt man in die dritte der Gleichungen (P) z gleich $r\delta s$, so erhält man

$$o = d^2 \,.\, \frac{r\delta s}{dt^2} + \frac{\mu \,.\, r\delta s}{r^3} + \left(\frac{dR}{dz}\right) \,.\,.\,.\, (1).$$

Man multiplicire die erste der Gleichungen (P) mit $r\delta s \,.\, dt$, und die Gleichung (1) mit $-x dt$, so verwandeln sie sich in folgende:

$$o = r\delta s \,.\, \frac{d^2x}{dt} + \frac{\mu \,.\, r\delta s \,.\, x \,.\, dt}{r^3} + \mu' \,.\, r\delta s \,.\, dt \,.\left(\frac{dR}{dz}\right)$$

$$o = -\frac{d^2 \,.\, r\delta s \,.\, x}{dt} - \frac{\mu \,.\, r\delta s \,.\, x \,.\, dt}{r^3} - x \,.\, dt \,.\left(\frac{dR}{dz}\right).$$

Die Summe beider Gleichungen giebt, wenn man das Glied $\mu \,.\, r\delta s \,.\, dt \,.\left(\frac{dR}{dz}\right)$, welches die Quadrate der stöhrenden Kräfte enthält, wegläſst, folgende Gleichung:

$$o = \frac{r\delta s \,.\, d^2x - x \,.\, d^2(r\delta s)}{dt} - x dt \,.\left(\frac{dR}{dz}\right) \,.\,.\,.\, (2).$$

Man erhält eben so, wenn man die zweyte der Gleichungen (P) mit $r\delta s \,.\, dt$, und die Gleichung (1) mit $-y \,.\, dt$ multiplicirt und sie addirt, oder kürzer, wenn man in der Gleichung (2) x mit y, und y mit x verwechselt,

$$o = \frac{r\delta s \,.\, d^2y - y \,.\, d^2(r\delta s)}{dt} - y dt \,.\left(\frac{dR}{dz}\right) \,.\,.\,.\, (3).$$

Die Gleichungen (2) und (3) sind den Gleichungen (2) und (3) in der 98sten Anmerkung völlig ähnlich; das dortige (Q) ist hier $\left(\frac{dR}{dz}\right)$; das dortige $r\delta r$ hier $r\delta s$. Man erhält so aus der Gleichung (5) der 98sten Anmerkung folgende:

$$\left(\frac{ydx - xdy}{dt}\right) r\delta s + x\int y \,.\, dt \,.\left(\frac{dR}{dz}\right) - y\int x \,.\, dt \,.\left(\frac{dR}{dz}\right) = o,$$

aus welcher man die Gleichung (Z) auf eben die Art erhält, durch welche man die Gleichung (X) aus der Gleichung für $r\delta r$ hergeleitet hat.

so sey s seine Breite, in der Voraussetzung, daſs der Körper nicht die Ebene dieser Bahn verläſst; dann wird $s + \delta s$ sehr nahe die Breite von m über der gegebenen Ebene seyn.

47. Die Formeln (X), (Y) und (Z) haben den Vortheil, die Stöhrungen in endlichen Gröſsen auszudrücken. Dies ist in der Theorie der Kometen sehr nützlich, wo man diese Stöhrungen nur durch Quadraturen bestimmen kann. Die geringe Eccentricität und Neigung der Planetenbahnen gegen einander erlaubt aber, diese Stöhrungen in convergirende Reihen von Sinus und Kosinus von Winkeln, welche proportional mit der Zeit wachsen, zu entwickeln, und in Tafeln darzustellen, welche für eine unbestimmte Zeit dienen können. Dann ist es aber bequemer, statt der vorigen Ausdrücke von δr und δs, die Differenzialgleichungen zu brauchen, welche diese veränderlichen Gröſsen bestimmen. Ordnet man diese Gleichungen nach den Potenzen und Producten der Eccentricitäten und der Neigungen der Bahnen, so kann man die Bestimmung der Werthe von δr und δs immer auf die Integration von Gleichungen, deren Form

$$0 = \frac{d^2y}{dt^2} + n^2y + Q$$

ist, zurückführen, von welchen Gleichungen wir die Integrale im 42sten Satz gegeben haben. Man kann aber diese sehr einfache Form den vorhergehenden Differenzialgleichungen unmittelbar durch folgende Methode geben.

Wir nehmen die Gleichung (R) des vorhergehenden Satzes wieder vor, und setzen der Kürze wegen

$$Q = 2 . \int dR + r . \left(\frac{dR}{dr}\right);$$

sie verwandelt sich so in

$$0 = \tfrac{1}{2} . \frac{d^2 . r^2}{dt^2} - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{a} + Q \qquad (R').$$

Im Fall der elliptischen Bewegung, wo $Q = 0$ ist, ist r^2 nach dem 22sten Satz eine Function von $e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi)$, wo ae die Eccentricität der Bahn, und $(nt + \varepsilon - \varpi)$ die mittlere Anomalie des Planeten m ist. Es sey $e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi) = u$, und man setze $r^2 = \Phi(u)$, so erhält man [101])

101) Da nämlich, wie schon mehrmals bemerkt worden ist, $\left(\frac{d^2 . \cos(nt + \varepsilon - \varpi)}{n^2\, dt^2}\right) = - \cos(nt + \varepsilon - \varpi)$ so ist, wenn man mit $n^2 e$ multiplicirt,

$$\left(\frac{d^2 . e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi)}{dt^2}\right) = - n^2 . e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi) \text{ oder } \frac{d^2u}{dt^2} = - n^2 u.$$

$$o = \frac{d^2 u}{dt^2} + n^2 u.$$

Wir werden auch im Fall der gestöhrten Bewegung $r^2 = \Phi(u)$ setzen können; dann wird aber u nicht mehr gleich $e \,.\, \cos(nt + \varepsilon - \varpi)$ seyn, sondern durch die vorhergehende Differenzialgleichung, welche man um ein von den stöhrenden Kräften abhängendes Glied vermehrt hat, gegeben werden. Wir bemerken, um dieses Glied zu bestimmen, dafs man, wenn man $u = \psi(r^2)$ setzt [102],

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + n^2 u = \frac{d^2 \,.\, r^2}{dt^2} \,.\, \psi'(r^2) + \frac{4 r^2 dr^2}{dt^2} \,.\, \psi''(r^2) + n^2 \,.\, \psi(r^2)$$

hat, wo $\psi'(r^2)$ das Differenzial von $\psi(r^2)$, dividirt durch $d.r^2$, und $\psi''(r^2)$ das Differenzial von $\psi'(r^2)$ dividirt durch $d \,.\, r^2$, ist. Die Gleichung (R′) giebt $\frac{d^2 \,.\, r^2}{dt^2}$ gleich einer Function von r, plus einer von den stöhrenden Kräften abhängenden Function. Multiplicirt man diese Gleichung mit $2 r dr$ und integrirt sie hernach, so erhält man $\frac{r^2 dr^2}{dt^2}$ gleich einer Function von r plus einer von der stöhrenden Kraft abhängenden Function. Substituirt man diese Werthe von $\frac{d^2 \,.\, r^2}{dt^2}$ und von $\frac{r^2 dr^2}{dt^2}$ in den vorhergehenden Ausdruck von $\frac{d^2 u}{dt^2} + n^2 u$, so wird die Function von r, welche von der stöhrenden Kraft unabhängig ist, von selbst verschwinden, weil sie identisch gleich Null ist, wenn diese Kraft gleich Null ist; man wird daher den Werth von $\frac{d^2 u}{dt^2} + n^2 u$ erhalten, wenn man in seinen Ausdruck statt $\frac{d^2 \,.\, r^2}{dt^2}$ und statt $\frac{r^2 \,.\, dr^2}{dt^2}$ die Theile ihrer Werthe substituirt, welche von der stöhrenden Kraft abhängen. Nun giebt aber die Gleichung (R′) und ihr Integral

$$\frac{d^2 \,.\, r^2}{dt^2} = -2 Q$$

$$\frac{4 r^2 dr^2}{dt^2} = -8 \,.\, \int Q r dr,$$

102) Es ist nämlich $du = d \,.\, \psi(r^2) = d(r^2) \,.\, \psi'(r^2)$, und wenn man von neuem differenziirt, $d^2 u = d^2(r^2) \,.\, \psi'(r^2) + [d \,.\, r^2]^2 \,.\, \psi''(r^2)$, wo man nur noch statt $d.r^2$ seinen Werth $2 r d r$ substituiren mufs, um den im Text für $d^2 u$ gebrauchten Ausdruck zu erhalten.

folglich

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + n^2 u = -2\,Q\,.\,\psi'(r^2) - 8\,.\,\psi''(r^2)\,.\int Q\,r\,dr;$$

man erhält aber aus der Gleichung $u = \psi(r^2)$; $du = 2\,r\,dr\,.\,\psi'(r^2)$ und aus der Gleichung $r^2 = \phi(u)$; $2\,r\,dr = du\,.\,\phi'(u)$, und folglich

$$\psi'(r^2) = \frac{1}{\phi'(u)};$$

differenziirt man die letztere Gleichung und substituirt man $\phi'(u)$ statt $\frac{2\,r\,dr}{du}$ so erhält man

$$\psi''(r^2) = -\frac{\phi''(u)}{\phi'(u)^3},$$

wo $\phi''(u)$ gleich $\frac{d\,.\,\phi'(u)}{du}$ ist, so wie $\phi'(u)$ gleich $\frac{d\,.\,\phi(u)}{du}$ ist. Dieses vorausgesetzt, setze man

$$u = e\,.\cos(nt + \varepsilon - \varpi) + \delta u,$$

so verwandelt sich die Differenzialgleichung für u in folgende:

$$0 = \frac{d^2\,.\,\delta u}{dt^2} + n^2\,.\,\delta u - \frac{4\,\phi''(u)}{\phi'(u)^3}\,.\int Q\,du\,.\,\phi'(u) + \frac{2\,Q}{\phi'(u)}.$$

Vernachlässigt man die Quadrate der stöhrenden Kraft, so wird man u in den Gliedern, welche von Q abhängen, gleich $e\,.\cos(nt + \varepsilon - \varpi)$ setzen können.

Der im 22sten Satz gefundene Werth von $\frac{r}{a}$ giebt [103])

$$r = a\,.\,[1 + e^2 - u\,(1 - \tfrac{3}{2}\,e^2) - u^2 - \tfrac{3}{2}\,u^3],$$

wenn man die Genauigkeit bis zu den Größen von der Ordnung e^3, inclusive, treibt. Hieraus erhält man

103) Man findet im 22sten Satz $\frac{r}{a} = 1 - e\,.\cos u = 1 - e.\cos nt + e^2.\sin nt^2 + \frac{e^3}{1\,.\,2}\,.\,\frac{d\,.\,\sin nt^3}{n\,dt} + \ldots$

$$= 1 - e\,.\cos nt + e^2.\sin nt^2 + \frac{3\,.\,e^3}{1\,.\,2}\,.\cos nt\,.\sin nt^2 + \ldots$$

$$= 1 + e^2 - (1 - \tfrac{3}{2}\,e^2)\,.\,e\,.\cos nt - e^2\,.\cos nt^2 - \tfrac{3}{2}\,e^3\,.\cos nt^3 + \ldots$$

Der Winkel nt des 22sten Satzes ist dem hier mit $nt + \varepsilon - \varpi$ bezeichneten Winkel gleich, und also $e\,.\cos nt = u$. Substituirt man diesen Werth in die vorhergehende Reihe, so erhält man

$$\frac{r}{a} = 1 + e^2 - (1 - \tfrac{3}{2}\,e^2)\,u - u^2 - \tfrac{3}{2}\,u^3.$$

$$r^2 = a^2 . [1 + 2e^2 - 2u(1 - \tfrac{1}{2}e^2) - u^2 - u^3] = \phi(u).$$

Substituirt man diesen Werth von $\phi(u)$ in die Differenzialgleichung für δu, und restituirt man statt Q seinen Werth $2 . \int dR + r . \left(\frac{dR}{dr}\right)$ und $e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi)$ statt u, so erhält man bis zu den Gröſsen von der Ordnung e^3 [104])

104) Da $\varphi(u) = a^2[1 + 2e^2 - 2u(1 - \frac{1}{2}e^2) - u^2 - u^3]$, so erhält man, wenn man differenziirt, $du . \varphi'(u) = - du . a^2(2 - e^2 + 2u + 3u^2)$. Setzt man $e^2 - 2u - 3u^2$ gleich q, so ist $\varphi'(u) = - a^2[2 - q]$, und folglich vermittelst des binomischen Lehrsatzes

$$[\varphi'(u)]^{-s} = -a^{-2s}\left[2^{-s} + s . 2^{-(s+1)} . q + \frac{s.(s+1)}{1.2} . 2^{-(s+2)} . q^2 + \frac{s.(s+1).(s+2)}{1.2.3} . 2^{-(s+3)} . q^3 \ldots\right].$$

Da man nur die dritten Potenzen von e behält, und die Glieder, welche höhere Potenzen enthalten, wegläſst, so ist $q^2 = 4u^2 - 4e^2u$ und $q^3 = -8u^3$. Setzt man also statt q, q^2, q^3 ihre Werthe, so erhält man

$$[\varphi'(u)]^{-s} = (-a)^{-2s} . 2^{-s}\left[1 + \tfrac{1}{2}se^2 - \left(s + \frac{s.(s+1)}{1.2}e^2\right)u + \frac{s.(s-2)}{1.2}u^2 - \frac{s.(s+1).(s+2)}{1.2.3}u^3 \ldots\right],$$

und folglich $[\varphi'(u)]^{-1} = - a^{-2} . [\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^2 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^2)u - \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}u^3 \ldots]$, und

$[\varphi'(u)]^{-3} = - \frac{a^{-6}}{8} . [1 + \frac{3}{2}e^2 - (3 + 6e^2)u + \frac{3}{2}u^2 - 10u^3 \ldots]$. Differenziirt man $\varphi'(u)$, so erhält man $\varphi''(u) = - 2a^2(1 + 3u)$, und folglich

$$\frac{4\varphi''(u)}{\varphi'(u)^3} = a^{-4}[1 + \tfrac{3}{2}e^2 - \tfrac{3}{2}e^2u - \tfrac{15}{2}u^2 - \tfrac{11}{2}u^3 \ldots].$$

Ferner ist $du = d . [e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi)] = - e . n dt . \sin(nt + \varepsilon - \varpi)$, und $\varphi'(u) = - 2a^2[1 + e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi)]$, wenn man nur die erste Potenz von e in diesem Factor behält. Hieraus folgt

$$\int Q . du . \varphi'(u) = + 2ea^2 \int n dt . [\sin(nt + \varepsilon - \varpi) . [1 + e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi)] . Q].$$

Man muſs dieses Integral noch mit $\frac{4\varphi''(u)}{\varphi'(u)^3}$ multipliciren; man sieht aber sogleich, daſs man von dem Werth dieser Gröſse nur das erste Glied $\frac{1}{a^4}$ brauchen darf, weil die übrigen Glieder die höhern Potenzen von e enthalten. Man erhält so, wenn man noch statt Q seinen Werth setzt,

$$-\frac{4\varphi''(u)}{\varphi'(u)^3}\int Q du . \varphi'(u) = -\frac{2e}{a^2}\int n dt \left[\sin(nt + \varepsilon - \varpi)[1 + e . \cos(nt + e - \varpi)] . \left[2\int dR + r . \left(\frac{dR}{dr}\right)\right]\right].$$

Läſst man endlich im obigen Werth von $[\varphi'(u)]^{-1}$ die Glieder e^2u und u^3 weg, weil sie die dritte Potenz von e enthalten, und setzt man statt u^2 oder statt $e^2 . \cos(nt + \varepsilon - \varpi)^2$ seinen Werth $\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^2 . \cos 2(nt + \varepsilon - \varpi)$, so erhält man

$$\frac{2Q}{\varphi'(u)} = - a^{-2}[1 + \tfrac{1}{4}e^2 - e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi) - \tfrac{1}{4}e^2 . \cos 2(nt + \varepsilon - \varpi)]\left[2\int dR + r . \left(\frac{dR}{dr}\right)\right].$$

Substituirt man diese Werthe von $-\frac{4\varphi''(u)}{\varphi'(u)^3}\int Q du . \varphi'(u)$ und $\frac{2Q}{\varphi'(u)}$ in die Gleichung für δu, so erhält man die im Text gegebene Gleichung (X').

$$0 = \frac{d^2 . \delta u}{dt^2} + n^2 . \delta u$$

$$- \frac{1}{a^2} . [1 + \tfrac{1}{4} e^2 - e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi) - \tfrac{1}{4} e^2 . \cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi)] . \left[2\int dR + r . \left(\frac{dR}{dr}\right) \right]$$

$$- \frac{2e}{a^2} . \int ndt . \left[\sin(nt + \varepsilon - \varpi) . [1 + e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi)] . \left[2\int dR + r . \left(\frac{dR}{dr}\right) \right] \right] \ldots (X');$$

hat man δu vermittelst dieser Differenzialgleichung bestimmt, so wird man δr erhalten, wenn man den Ausdruck von r in Beziehung auf die Karakteristik δ differenziirt; dies giebt [105])

$$\delta r = - a \delta u . [1 + \tfrac{3}{4} e^2 + 2 e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi) + \tfrac{9}{4} e^2 . \cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi)].$$

Dieser Werth von δr wird den Werth von δv vermittelst der Formel (Y) des vorhergehenden Satzes geben.

Es ist nun noch δs zu bestimmen übrig. Vergleicht man die Formeln (X) und (Z) des vorhergehenden Satzes mit einander, so sieht man, daſs δr sich in δs verwandelt, wenn man in seinem Ausdruck $2 . \int dR + r . \left(\frac{dR}{dr}\right)$ in $\left(\frac{dR}{dz}\right)$ verwandelt. Hieraus folgt, daſs es zur Bestimmung von δs hinreichend ist, diese Veränderung in der Differenzialgleichung für δu vorzunehmen, und hernach den Werth von δu, den diese Gleichung giebt, und welchen wir mit $\delta u'$ bezeichnen wollen, in den Ausdruck von δr zu substituiren. Man erhält so

$$0 = \frac{d^2 . \delta u'}{dt^2} + n^2 . \delta u'$$

$$- \frac{1}{a^2} . [1 + \tfrac{1}{4} e^2 - e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi) - \tfrac{1}{4} e^2 . \cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi)] . \left(\frac{dR}{dz}\right)$$

$$- \frac{2e}{a^2} . \int ndt . \left[\sin(nt + \varepsilon - \varpi) . [1 + e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi)] . \left(\frac{dR}{dz}\right) \right] \quad (Z');$$

$$\delta s = - a \delta u' . [1 + \tfrac{3}{4} . e^2 + 2 e . \cos(nt + \varepsilon - \varpi) + \tfrac{9}{4} . e^2 . \cos(2nt + 2\varepsilon - 2\varpi)].$$

Das System der Gleichungen (X'), (Y), (Z') wird auf eine sehr einfache Art die gestöhrte Bewegung von m geben, wenn man nur auf die erste Potenz der

105) Man hat durch die gewöhnlichen Regeln der Differenziation

$$\delta r = - a \delta u (2 - e^2 + 2u + 3u^2),$$

und u^2 ist gleich $\frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} e^2 . \cos 2(nt + \varepsilon - \varpi)$, woraus man sogleich die im Text gegebene Gleichung findet.

stöhrenden Kraft Rücksicht nimmt. Da die Betrachtung der Glieder, welche dieser Potenz zugehören, in der Theorie der Planeten fast hinlänglich ist, so wollen wir daraus Formeln herleiten, welche zur Bestimmung der Bewegung dieser Körper bequem sind.

48. Hierzu ist es nöthig, die Function R in eine Reihe zu entwickeln. Betrachtet man nur die Wirkung von m auf m', so ist nach dem 46sten Satz

$$R = \frac{m' . (xx' + yy' + zz')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Diese Function ist gänzlich von der Lage der Ebene der x und der y unabhängig; denn die Wurzelgröſse $\sqrt{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]}$ drückt die Entfernung des Körpers m von m' aus, und ist also von ihr unabhängig; die Function $x^2 + y^2 + z^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2\,xx' - 2\,yy' - 2\,zz'$ ist also ebenfalls von ihr unabhängig; da nun die Quadrate der Radius vectors, nämlich $x^2 + y^2 + z^2$ und $x'^2 + y'^2 + z'^2$ ebenfalls von dieser Lage unabhängig sind, so ist auch die Gröſse $xx' + yy' + zz'$, und folglich die Function R von ihr unabhängig. Man setze in dieser Function

$$x = r . \cos v; \qquad y = r . \sin v;$$
$$x' = r' . \cos v'; \qquad y' = r' . \sin v';$$

so erhält man

$$R = \frac{m' . [rr' . \cos(v' - v) + zz']}{(r'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m'}{[r^2 - 2\,rr' . \cos(v' - v) + r'^2 + (z' - z)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Da die Planetenbahnen fast kreisförmig und sehr wenig gegen einander geneigt sind, so kann man die Ebene der x und der y so wählen, daſs z und z' sehr klein sind. In diesem Fall werden r und r' sehr wenig von den halben groſsen Axen a und a' der elliptischen Bahnen verschieden seyn; wir werden also

$$r = a . (1 + u_{,}); \qquad r' = a' . (1 + u_{,}')$$

setzen, wo $u_{,}$ und $u_{,}'$ kleine Gröſsen sind. Da die Winkel v und v' wenig von den mittlern Gröſsen $nt + \varepsilon$ und $n't + \varepsilon'$ verschieden sind, so setzen wir

$$v = nt + \varepsilon + v_{,}; \qquad v' = n't + \varepsilon' + v_{,}';$$

wo $v_{,}$ und $v'_{,}$ wenig beträchtliche Winkel sind. Verwandelt man R in eine nach den Potenzen und Producten von $u_{,}$, $v_{,}$, z, $u_{,}'$, $v_{,}'$ und z' geordnete Reihe, so wird diese Reihe sehr convergiren. Es sey

$$\frac{a}{a'^2} \cdot \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - [a^2 - 2aa' \cdot \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{2} A^{(0)} + A^{(1)} \cdot \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + A^{(2)} \cdot \cos 2(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$
$$+ A^{(3)} \cdot \cos 3(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \text{etc.}$$

Man kann dieser Reihe die Form $\frac{1}{2} \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ geben, wo die Karakteristik der endlichen Integrale, Σ, sich auf die Zahl i bezieht, und auf alle ganze Zahlen von $i = -\infty$ bis $i = +\infty$ erstreckt werden muſs, den Werth $i = 0$ nicht ausgenommen; man muſs aber alsdann bemerken, daſs $A^{(-i)} = A^{(i)}$ ist. Diese Form hat den Vortheil, nicht nur die vorhergehende Reihe, sondern auch das Product dieser Reihe durch den Sinus oder Kosinus irgend eines Winkels $ft + \varpi$ auf eine sehr einfache Art auszudrücken; denn man sieht leicht, daſs dieses Product gleich [106])

$$\tfrac{1}{2} \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} \left[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + ft + \varpi \right]$$

ist. Diese Eigenschaft wird uns sehr bequeme Ausdrücke für die Stöhrungen der Bewegung der Planeten verschaffen. Es sey auf eine ähnliche Art

$$[a^2 - 2aa' \,.\, \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2]^{-\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2} \,.\, \Sigma \,.\, B^{(i)} \,.\, \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon),$$

wo

106) Multiplicirt man z. B. die Reihe $\frac{1}{2} \Sigma \,.\cos it'$, wo i jede ganze positive und negative Zahl bedeutet, mit $\sin(ft + \varpi)$, so erhält man

$$\tfrac{1}{4} \Sigma \,.\, 2 \cos it' \,.\, \sin(ft + \varpi) = \tfrac{1}{4} \Sigma \,.\, \sin(ft + \varpi - it') + \tfrac{1}{4} \Sigma \,.\, \sin(ft + \varpi + it').$$

Da aber $ft + \varpi - it'$ sich in $ft + \varpi + it'$ verwandelt, wenn i negativ ist, so sieht man, daſs jedes Glied der Reihe $\Sigma \,.\, \sin(ft + \varpi - it')$ ein gleiches Glied in der Reihe $\Sigma \,.\, \sin(ft + \varpi + it')$ hat, und daſs also beide Reihen einander gleich sind. Man hat folglich

$$\tfrac{1}{2} \sin(ft + \varpi) \,.\, \Sigma \,.\, \cos it' = \tfrac{1}{2} \Sigma \,.\, \sin(ft + \varpi + it').$$

Diese Bemerkung des Herrn Verfassers ist äuſserst wichtig und kann in mehreren Fällen mit groſsem Vortheil gebraucht werden. Setzt man der Kürze wegen $ft + \varpi = B$, so hat man

$$+ \sin B \,.\, \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \cos it' = + \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \sin(it' + B) = - \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \sin(it' - B);$$

$$+ \cos B \,.\, \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \cos it' = + \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \cos(it' + B) = + \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \cos(it' - B).$$

Ist $\varphi(i)$ eine solche Function von i, daſs $\varphi(-i) = \varphi(i)$, z. B. eine gerade Potenz von i oder eine Summe mehrerer geraden Potenzen von i, so ist

$$+ \sin B \,.\, \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \varphi(i) \,.\, \cos it' = + \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \varphi(i) \,.\, \sin(it' + B) = - \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \varphi(i) \,.\, \sin(it' - B);$$

$$+ \cos B \,.\, \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \varphi(i) \,.\, \cos it' = + \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \varphi(i) \,.\, \cos(it' + B) = + \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \varphi(i) \,.\, \cos(it' - B).$$

Diese allgemeinern Formeln lassen sich auf eine Reihe Sinus anwenden. Es sey nämlich $F(i)$ eine solche Function von i, daſs $F(-i) = -F(i)$, so hat man, da $\sin(-it') = -\sin it'$ ist,

$F(i)$

wo $B^{(-i)}$ gleich $B^{(i)}$ ist. Dieses vorausgesetzt, wird man durch die Lehrsätze des 21sten Satzes folgende Gleichung erhalten [107]):

$F(i) \,.\, \sin it' = F(-i) \,.\, \sin(-it')$, und folglich, vermöge der bekannten Formeln für die Producte von Sinus und Kosinus zweyer Winkel

$$+\sin B \,.\, \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, F(i) \,.\, \sin it' = \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, F(i) \,.\, \cos(it' - B) = -\Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, F(i) \,.\, \cos(it' + B)$$

$$+\cos B \,.\, \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, F(i) \,.\, \sin it' = \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, F(i) \,.\, \sin(it' + B) = +\Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, F(i) \,.\, \sin(it' - B).$$

Einer der einfachsten Fälle, wo diese Formeln Anwendung finden, ist, wenn $F(i)$ eine ungerade Potenz von i, oder eine Summe ungerader Potenzen von i ist.

107) Nach dem im 22sten Satz bewiesenen Taylorschen Lehrsatz ist das allgemeine Glied von $\varphi(t + \alpha,\ t' + \alpha',\ t'' + \alpha'', \ldots)$ gleich

$$\frac{\alpha^{n} \,.\, \alpha'^{n'} \,.\, \alpha''^{n''} \ldots}{1.2.3 \ldots n \,.\, 1.2 \ldots n' \,.\, 1.2 \ldots n'' \ldots} \left[\frac{d^{n+n'+n''\ldots} \,.\, \varphi(t, t', t'' \ldots)}{dt^{n} \,.\, dt'^{n'} \,.\, dt''^{n''} \ldots} \right].$$

In dem jetzigen Fall ist $\varphi(t + \alpha,\ t' + \alpha', \ldots)$ gleich R, und $\varphi(t, t', t'' \ldots)$ gleich $\frac{m'}{2} \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \cos i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$, wofür wir der Kürze wegen R'' schreiben wollen. Die Function R enthält, wenn man z und z' anfangs wegläſst, weil man die Glieder, die davon abhängen, durch den binomischen Lehrsatz besonders entwickeln kann, nur drey veränderliche Gröſsen r', r, $(v' - v)$. Man hat also

statt . . . t	α	t'	α'	t''	α''
hier . . . a'	$a' u_{\prime}'$	a	$a u_{\prime}$	$n't - nt + \epsilon' - \epsilon$	$v_{\prime}' - v_{\prime}$

Begnügt man sich nun mit den Quadraten und Producten von α, α' und α'', so hat man

$$R = R'' + a' u_{\prime}' \,.\, \left(\frac{dR''}{da'}\right) + a u_{\prime} \,.\, \left(\frac{dR''}{da}\right) + (v_{\prime}' - v_{\prime}) \,.\, \frac{1}{n' - n} \,.\, \left(\frac{dR''}{dt}\right)$$

$$+ \frac{a'^2 u_{\prime}'^2}{2} \,.\, \left(\frac{d^2 R''}{da'^2}\right) + \frac{a^2 u_{\prime}^2}{2} \,.\, \left(\frac{d^2 R''}{da^2}\right) + (v_{\prime}' - v_{\prime})^2 \,.\, \left(\frac{1}{n' - n}\right)^2 \,.\, \left(\frac{dR''}{dt^2}\right)$$

$$+ a a' u_{\prime}' u_{\prime} \,.\, \left(\frac{d^2 R''}{da \,.\, da'}\right) + \frac{a' \,.\, (v_{\prime}' - v_{\prime}) \,.\, u_{\prime}'}{(n' - n)} \,.\, \left(\frac{d^2 R''}{dt \,.\, da'}\right) + \frac{a \,.\, (v_{\prime}' - v_{\prime}) \,.\, u_{\prime}}{(n' - n)} \,.\, \left(\frac{d^2 R''}{dt \,.\, da}\right).$$

Da nun $R'' = \frac{1}{2} m' \,.\, \Sigma \,.\, A^{(i)} \,.\, \cos i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$, so erhält man das partielle Differenzial von R'' in Beziehung auf a oder a', wenn man $A^{(i)}$ in Beziehung auf a oder a' differenziirt, und $\left(\frac{dR''}{dt}\right)$, wenn man $\cos i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$ in Beziehung auf t differenziirt. Man erhält hieraus ohne Schwierigkeit die zehn ersten Glieder des im Text gegebenen Werths von R.

Die übrigen Glieder hängen von z und z' ab, und man erhält sie leicht vermittelst des binomischen Lehrsatzes. Es ist nämlich, wenn man nur die zweyten Potenzen von z beybehält,

$$\frac{rr' \cos(v' - v) + zz'}{(r'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = rr' \cos(v' - v)\ r'^{-3} - \tfrac{3}{2} r'^{-5} z'^2 rr' \cos(v' - v) + \ldots + \frac{zz'}{(r'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{r}{r'^2} \cos(v' - v) - \frac{3}{2} \frac{r}{r'^4} z'^2 \cos(v' - v) + \ldots + \frac{zz'}{(r'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$R = \frac{m'}{2} \cdot \Sigma \cdot A^{(i)} \cdot \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$+ \frac{m'}{2} \cdot u_{,} \cdot \Sigma \cdot a \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) \cdot \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$+ \frac{m'}{2} \cdot u_{,}' \cdot \Sigma \cdot a' \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da'}\right) \cdot \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- \frac{m'}{2} \cdot (v_{,}' - v_{,}) \cdot \Sigma \cdot i\,A^{(i)} \cdot \sin i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$+ \frac{m'}{4} \cdot u_{,}^2 \cdot \Sigma \cdot a^2 \cdot \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{da^2}\right) \cdot \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$+ \frac{m'}{2} \cdot u_{,}u_{,}' \cdot \Sigma \cdot aa' \cdot \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{da . da'}\right) \cdot \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$+ \frac{m'}{4} \cdot u_{,}'^2 \cdot \Sigma \cdot a'^2 \cdot \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{da'^2}\right) \cdot \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- \frac{m'}{2} \cdot (v_{,}' - v_{,}) \cdot u_{,} \cdot \Sigma \cdot ia \cdot \left(\frac{d\,A^{(i)}}{da}\right) \cdot \sin i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- \frac{m'}{2} \cdot (v_{,}' - v_{,}) \cdot u_{,}' \cdot \Sigma \cdot ia' \cdot \left(\frac{d\,A^{(i)}}{da'}\right) \cdot \sin i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- \frac{m'}{4} \cdot (v_{,}' - v_{,})^2 \cdot \Sigma \cdot i^2 \cdot A^{(i)} \cdot \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$+ \frac{m' . zz'}{a'^3} - \frac{3\,m'\,a\,z'^2}{2\,a'^4} \cdot \cos\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$+ \frac{m' . (z' - z)^2}{4} \cdot \Sigma \cdot B^{(i)} \cdot \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$+$ etc.

im zweyten Gliede dieses Ausdrucks muſs man statt $\frac{r}{r'^4}$ bloſs $\frac{a}{a'^4}$ setzen, weil die übrigen Glieder, die aus der Entwicklung von $\frac{r}{r'^4}$ oder $\frac{a\,(1 + u_{,})}{a'^4 . (1 + u_{,}')^4}$ entspringen würden, sämmtlich in $u_{,}$ oder $u_{,}'$ multiplicirt sind, und da sie noch mit z'^2 multiplicirt werden müssen, von der dritten Ordnung seyn würden. Eben so ist das letzte Glied $\frac{z\,z'}{(r'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\,z'}{(r'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\,z'}{a'^3}$. Substituirt man diese Werthe, so erhält man

Substituirt man in diesem Ausdruck von R statt $u_{,}$, $u_{,}'$, $v_{,}$, $v_{,}'$, z und z' ihre auf die elliptische Bewegung sich beziehenden Werthe, welche Werthe Functionen der Sinus und Kosinus der Winkel $nt + \varepsilon$, $n't + \varepsilon'$ und ihrer Vielfachen sind, so wird er durch eine unendliche Reihe Kosinus von der Form $mk \, . \cos(i'n't - int + A)$ vorgestellt werden, wo i und i' ganze Zahlen sind.

Es ist sichtbar, daſs die Wirkung der Körper m'', m''' u. s. w. auf m im Ausdruck für R Glieder hervorbringen wird, welche denen ähnlich sind, die aus der Wirkung von m' entspringen. Man erhält dieselben, wenn man im vorhergehenden Ausdruck von R alle Gröſsen, welche sich auf m' beziehen, in eben dieselben auf m'', m''' u. s. w. sich beziehende Gröſsen verwandelt.

$$\frac{rr' \cos(v' - v) + zz'}{(r'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r}{r'^2} \cos(v' - v) - \tfrac{3}{2} \frac{a}{a'^4} z' z' \cos(v' - v) + \frac{zz'}{a'^3}.$$

Man hat ferner nach dem binomischen Lehrsatz, wenn man nur die zweyte Potenz von $(z' - z)$ beybehält,

$$[r^2 - 2rr' \cos(v' - v) + r'^2 + (z' - z)^2]^{-\frac{1}{2}} = [r^2 - 2rr' \cos(v' - v) + r'^2]^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(z' - z)^2 [r^2 - 2rr' \cos(v' - v) + r'^2]^{-\frac{3}{2}}.$$

Vereinigt man die Werthe dieser beiden Gröſsen, so erhält man

$$R = \frac{m' r}{r'^2} \cos(v' - v) - m' [r^2 - 2rr' \cos(v' - v) + r'^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \tfrac{3}{2} z'^2 . \frac{a m'}{a'^4} \cos(v' - v) + \frac{m' z z'}{a'^3} + \frac{m'}{2} . (z' - z)^2 [r^2 - 2rr' \cos(v' - v) + r'^2]^{-\frac{3}{2}}.$$

In den Gliedern, die in die Quadrate und Producte von z und z' multiplicirt sind, muſs man die kleinen Gröſsen $u_{,}$, $u_{,}'$ und $v_{,}' - v_{,}$ vernachlässigen, und also statt r bloſs a, statt r' bloſs a', und statt $v' - v$ bloſs $(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ setzen; sie verwandeln sich dadurch in

$$- \tfrac{3}{2} z'^2 . \frac{a m'}{a'^4} . \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \frac{m' zz'}{a'^3} + \frac{m'}{2} (z' - z)^2 [a^2 - 2aa' \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2]^{-\frac{3}{2}},$$

oder in

$$- \tfrac{3}{2} z'^2 . \frac{a m'}{a'^4} . \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \frac{m' zz'}{a'^3} + \frac{m'}{4} (z' - z)^2 \, \Sigma \, . \, B^{(i)} \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon).$$

Man erhält also folgende Gleichung:

$$R = \frac{m' r}{r'^2} \cos(v' - v) - m' [r^2 - 2rr' \cos(v' - v) + r'^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{3m'}{2} . z'^2 . \frac{a}{a'^4} \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \frac{m' zz'}{a'^3} + \frac{m'}{4} (z' - z)^2 . \Sigma . B^{(i)} \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon).$$

Wir haben die beiden ersten Glieder dieses Werths vorher durch den Taylorschen Lehrsatz entwickelt. Setzt man also zu den zehn vorher gefundenen Gliedern von R noch die drey von z und z' abhängenden Glieder, so erhält man den vollständigen Werth von R.

Wir wollen nun irgend ein Glied, $m'k \,.\, \cos(i'n't - int + A)$ des Ausdrucks von R betrachten. Wären die Bahnen kreisförmig und in Einer Ebene, so würde man $i' \doteq i$ haben; i' kann also bloſs vermittelst der Sinus oder der Kosinus der Ausdrücke für $u_,$, $v_,$, z, $u_,'$, $v_,'$, z' die Zahl i übertreffen, oder von ihr übertroffen werden. Aus der Verbindung dieser Sinus und Kosinus mit den Sinus und Kosinus des Winkels $n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon$ und seiner Vielfachen entspringen die Sinus und Kosinus der Winkel, in welchen i' von i verschieden ist.

Betrachtet man die Eccentricitäten und Neigungen der Bahnen als sehr kleine Gröſsen der ersten Ordnung, so erhellet aus den Formeln des 22sten Satzes, daſs in den Ausdrücken von $u_,$, $v_,$, z oder rs, wo s die Tangente der Breite von m ist, der Koefficient des Sinus oder des Kosinus eines Winkels, z. B. $f.(nt + \varepsilon)$ durch eine Reihe ausgedrückt wird, deren erstes Glied von der Ordnung f, das zweyte Glied von der Ordnung $(f + 2)$, das dritte von der Ordnung $(f + 4)$ u. s. w. ist. Dies gilt auch für den Koefficienten des Winkels $f'.(n't + \varepsilon')$ in den Ausdrücken von $u_,'$, $v_,'$, z'. Es folgt hieraus, daſs der Koefficient k des Gliedes $m'k \,.\, \cos(i'n't - int + A)$ von der Ordnung $i' - i$ ist, wenn i' und i positiv und i' gröſser als i angenommen wird, und daſs in der Reihe, welche dies Glied ausdrückt, das erste Glied von der Ordnung $i' - i$, das zweyte von der Ordnung $i' - i + 2$ u. s. w. ist, so daſs diese Reihe stark convergirt. Ist i gröſser als i', so würden die auf einander folgenden Glieder der Reihe von den Ordnungen $i - i'$, $i - i' + 2$ u. s. w. seyn [108]).

Es sey nun ϖ die Länge der Sonnennähe der Bahn von m und θ die Länge ihres Knotens; man nenne eben so ϖ' die Länge der Sonnennähe der Bahn von m' und θ' die Länge ihres Knotens, welche Längen auf einer sehr

108) Es ist nämlich in den Kosinussen des Werths von R hinter dem Summenzeichen Σ, i' beständig gleich i; der Unterschied zwischen beiden kann nur daher kommen, daſs man diese Kosinus mit $\cos(i' - i)(nt + \varepsilon)$, oder $\cos(i' - i)(n't + \varepsilon')$ multiplicirt hat, oder mit $\cos(i - i')(nt + \varepsilon)$ und $\cos(i - i')(n't + \varepsilon')$, wenn i gröſser als i' ist. Nun sind die Summen der Kosinus, welche R enthält, in die Gröſsen $u_,$, $u_,'$, $v_,'$, $v_,$, z und z' multiplicirt; die Factoren $\cos(i' - i)(nt + \varepsilon)$, $\cos(i' - i)(n't + \varepsilon')$ entspringen also aus den Gröſsen $u_,$, $u_,'$ etc. Das erste Glied des Koefficienten des $\cos(i' - i)(nt + \varepsilon)$ ist aber nach dem Vorhergehenden von der Ordnung $(i' - i)$, und folglich ist auch das erste Glied von k von der Ordnung $(i' - i)$, das zweyte von der Ordnung $(i' - i) + 2$ u. s. w. Man sieht sogleich, daſs dieselben Schlüsse gelten, wenn man mit $\sin(i' - i)(nt + \varepsilon)$ multiplicirt hat.

wenig gegen die Bahnen geneigten Ebene gezählt werden. Es erhellet aus den Formeln des 22sten Satzes, daſs der Winkel $nt + \varepsilon$ in den Ausdrücken von $u_{,}$, $v_{,}$ und z beständig mit $-\varpi$ oder mit $-\theta$ verbunden ist, und daſs der Winkel $n't + \varepsilon'$ in den Ausdrücken von $u_{,}'$, $v_{,}'$ und z' beständig mit $-\varpi'$ oder mit $-\theta'$ verbunden ist. Hieraus folgt, daſs das Glied $m'k \,.\, \cos(i'n't - int + A)$ beständig von folgender Form ist:

$$m'k \,.\, \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta - g'''\theta'),$$

wo g, g', g'', g''' ganze positive oder negative Zahlen und so beschaffen sind, daſs

$$0 = i' - i - g - g' - g'' - g'''$$

ist. Dieses erhellet auch noch daraus, daſs der Werth von R und seine verschiedenen Glieder von der Lage der geraden Linie, von welcher man die Längen zählt, unabhängig sind. Ueberdies hat der Koefficient des Sinus und Kosinus des Winkels ϖ in den Formeln des 22sten Satzes beständig die Eccentricität der Bahn von m zum Factor; der Koefficient des Sinus und Kosinus des Winkels 2ϖ hat das Quadrat e^2 dieser Eccentricität zum Factor u. s. w. Eben so hat der Koefficient des Sinus und des Kosinus des Winkels θ zum Factor tang $\frac{1}{2}\phi$, wo ϕ die Neigung der Bahn von m gegen die feste Ebene ist. Der Koefficient des Sinus und des Kosinus des Winkels 2θ hat zum Factor tang $\frac{1}{2}\phi^2$ u. s. w. Es folgt hieraus, daſs der Koefficient k zum Factor $e^g \,.\, e'^{g'} \,.\, \text{tang}\,(\frac{1}{2}\phi)^{g''} \,.\, \text{tang}\,(\frac{1}{2}\phi)^{g'''}$ hat, wo die Zahlen g, g', g'', g''' in den Exponenten dieser Factoren positiv genommen werden müssen. Sind alle diese Zahlen für sich selbst positiv, so wird der Factor vermöge der Gleichung

$$0 = i' - i - g - g' - g'' - g'''$$

von der Ordnung $i' - i$ seyn; ist aber eine von ihnen, z. B. g, negativ und gleich $-g$, so wird dieser Factor von der Ordnung $i' - i + 2g$ seyn. Behält man also unter den Gliedern von R nur diejenigen, welche von dem Winkel $i'n't - int$ abhängen und von der Ordnung $i' - i$ sind, und läſst man alle diejenigen weg, welche von demselben Winkel abhängen, aber von den Ordnungen $i' - i + 2$, $i' - i + 4$ u. s. w. sind, so wird der Ausdruck von R aus Gliedern von folgender Form bestehen:

$$H \,.\, e^g \,.\, e'^{g'} \,.\, \text{tang}\,(\tfrac{1}{2}\phi)^{g''} \,.\, \text{tang}\,(\tfrac{1}{2}\phi')^{g'''}$$
$$.\, \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta - g'''\theta'),$$

wo H ein von den Eccentricitäten und Neigungen der Bahnen unabhängiger Koefficient ist, und wo die Zahlen g, g', g'', g''' alle positiv und so beschaffen sind, daſs ihre Summe gleich $i' - i$ ist.

Substituirt man in R, $a(1 + u_{,})$ statt r, so wird man

$$r \cdot \left(\frac{dR}{dr}\right) = a \cdot \left(\frac{dR}{da}\right)$$

erhalten. Setzt man in dieselbe Function statt $u_{,}$, v, und z ihre durch die Formeln des 22sten Satzes gegebenen Werthe, so erhält man

$$\left(\frac{dR}{dv}\right) = \left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right),$$

wofern man nur in den in Beziehung auf ε genommenen Differenzialen von R, $\varepsilon - \varpi$ und $\varepsilon - \theta$ als beständige Gröſsen ansieht; denn alsdann sind $u_{,}$, v, und z beständige Gröſsen, und da $v = nt + \varepsilon + v_{,}$ ist, so ist klar, daſs die vorhergehende Gleichung Statt hat. Man wird also leicht die Werthe von $r \cdot \left(\frac{dR}{dr}\right)$ und von $\left(\frac{dR}{dv}\right)$, welche sich in den Differenzialgleichungen der vorhergehenden Sätze befinden, erhalten, wenn man den Werth von R in eine Reihe von Kosinus entwickelt hat, deren Winkel proportional mit der Zeit t wachsen. Das Differenzial dR wird ebenfalls sehr leicht sich bestimmen lassen, wenn man Acht hat, in R nur den Winkel nt als veränderlich, $n't$ hingegen als beständig anzusehen; weil dR das Differenzial von R ist und zwar so genommen, daſs man die Koordinaten von m', welche Functionen von $n't$ sind, als beständig annimmt.

49. Die Schwierigkeit der Entwickelung von R in eine Reihe besteht darinn, die Gröſsen $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ und ihre theils in Beziehung auf a, theils in Beziehung auf a' genommenen Differenziale, zu finden. Hierzu wollen wir im Allgemeinen die Function $(a^2 - 2aa' . \cos\theta + a'^2)^{-s}$ betrachten, und sie in eine, nach den Kosinussen des Winkels θ und seiner Vielfachen fortgehende, Reihe entwickeln. Setzt man $\frac{a}{a'} = \alpha$, so verwandelt sie sich in $a'^{-2s} . (1 - \alpha . \cos\theta + \alpha^2)^{-s}$. Es sey also

$(1 - 2\alpha . \cos\theta + \alpha^2)^{-s} = \frac{1}{2} b_s^{(0)} + b_s^{(1)} \cos\theta + b_s^{(2)} \cos 2\theta + b_s^{(3)} \cos 3\theta +$ etc.,

wo $b_s^{(0)}$, $b_s^{(1)}$, $b_s^{(2)}$ u. s. w. Functionen von α und von s sind. Nimmt man

die Differenziale der Logarithmen der beiden Theile dieser Gleichung in Beziehung auf die veränderliche Gröſse θ, so erhält man

$$\frac{-2s\,.\,\alpha\,.\sin\theta}{1-2\alpha\,.\cos\theta+\alpha^2}=\frac{-b_s^{(1)}\,.\sin\theta-2\,b_s^{(2)}\,.\sin 2\,\theta-\,.\,.\,.}{\frac{1}{2}\,b_s^{(0)}+b_s^{(1)}\,.\cos\theta+b_s^{(2)}\,.\cos 2\,\theta+\,.\,.\,.}.$$

Multiplicirt man kreuzweise, und vergleicht man die ähnlichen Kosinus', so erhält man allgemein [109])

$$b_s^{(i)}=\frac{(i-1)\,.\,(1+\alpha^2)\;b_s^{(i-1)}-(i+s-2)\;\alpha\,.\;b_s^{(i-2)}}{(i-s)\;\alpha}\qquad(a).$$

Man wird hierdurch $b_s^{(2)}$, $b_s^{(3)}$ u. s. w. erhalten, so bald man $b_s^{(0)}$ und $b_s^{(1)}$ kennt.

Verwandelt man in dem vorhergehenden Ausdruck von $(1-2\alpha.\cos\theta+\alpha^2)^{-s}$, s in $s+1$, so erhält man

$$(1-2\alpha.\cos\theta+\alpha^2)^{-s-1}=\tfrac{1}{2}b_{s+1}^{(0)}+b_{(s+1)}^{(1)}.\cos\theta+b_{(s+1)}^{(2)}.\cos 2\theta+b_{s+1}^{(3)}.\cos 3\theta+\ldots$$

Multiplicirt man die beiden Theile dieser Gleichung mit $(1-2\,\alpha\,.\,\cos\theta+\alpha^2)$,

109) Da $2\sin y\,.\,\cos z=\sin(y+z)+\sin(y-z)=\sin(y+z)-\sin(z-y)$ ist, so hat man, wenn man bloſs die in $\sin(i-1)\,\theta$ multiplicirten Glieder betrachtet,

erstlich in $-2\,s\,.\,\alpha\,.\sin\theta\,.\,(\frac{1}{2}\,b_s^{(0)}+b_s^{(1)}\cos\theta+b_s^{(2)}\cos 2\,\theta+\,.\,.\,.\,)$:

$-2\,s\,\alpha\,.\sin\theta\,.\cos(i-2)\,\theta\,.\,b_s^{(i-2)}$, welches $-s\,.\,\alpha\,.\,b_s^{(i-2)}\sin(i-1)\,\theta$ giebt, und

$-2\,s\alpha\,.\sin\theta\,.\cos i\,\theta\,.\,b_s^{(i)}$, welches $+s\,\alpha\,.\,b_s^{(i)}\sin(i-1)\,\theta$ giebt:

zweytens in $[(1+\alpha^2)-2\,\alpha\cos\theta]\,(-b_s^{(1)}\,.\sin\theta-2\,b_s^{(2)}\,.\sin 2\,\theta-3\,b_s^{(3)}\,.\sin 3\,\theta\,.\,.\,.\,)$:

$-(1+\alpha^2)\,(i-1)\,b_s^{(i-1)}\sin(i-1)\,\theta$, welches sich nicht verändert,

$+2\alpha\cos\theta\,.\,(i-2)\,b_s^{(i-2)}\,.\sin(i-2)\,\theta$, welches $+\alpha.(i-2)\,b_s^{(i-2)}\sin(i-1)\,\theta$ giebt, und

$+2\alpha\cos\theta\,.\,i\,.\,b_s^{(i)}\,.\sin i\,\theta$, welches $+\alpha\,.\,i\,.\,b_s^{(i)}\sin(i-1)\,\theta$ giebt.

Die beiden Koefficienten von $\sin(i-1)\,\theta$ müssen einander gleich seyn, folglich

$$-s\,\alpha\,b_s^{(i-2)}+s\,.\,\alpha\,b_s^{(i)}=-(1+\alpha^2)\,(i-1)\,b_s^{(i-1)}+\alpha.(i-2)\,b_s^{(i-2)}+\alpha\,i\,.\,b_s^{(i)},$$

oder $(1+\alpha^2)\,(i-1)\,b_s^{(i-1)}-(i+s-2)\,\alpha\,b_s^{(i-2)}=(i-s)\,\alpha\,b_s^{(i)}$.

und substituirt man statt $(1 - 2\alpha . \cos\theta + \alpha^2)^{-s}$ seinen durch die obige Reihe gegebenen Werth, so erhält man

$$\tfrac{1}{2} b_s^{(0)} + b_s^{(1)} . \cos\theta + b_s^{(2)} . \cos 2\theta + \ldots$$

$$= (1 - 2\alpha . \cos\theta + \alpha^2) . [\tfrac{1}{2} b_{s+1}^{(0)} + b_{s+1}^{(1)} . \cos\theta + b_{s+1}^{(2)} . \cos 2\theta + b_{s+1}^{(3)} . \cos 3\theta + \ldots];$$

woraus man, wenn man die ähnlichen Kosinus vergleicht, folgende Gleichung erhält [110]):

$$b_s^{(i)} = (1 + \alpha^2) . b_{s+1}^{(i)} - \alpha\, b_{s+1}^{(i+1)} - \alpha\, b_{s+1}^{(i-1)} .$$

Die Formel (a) giebt aber

$$b_{s+1}^{(i+1)} = \frac{i . (1 + \alpha^2) . b_{s+1}^{(i)} - (i + s) . \alpha\, b_{s+1}^{(i-1)}}{(i - s) . \alpha};$$

dadurch verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck für $b_s^{(i)}$ in folgenden:

$$b_s^{(i)} = \frac{2s . \alpha . b_{s+1}^{(i-1)} - s . (1 + \alpha^2) . b_{s+1}^{(i)}}{i - s}.$$

Verwandelt man in dieser Gleichung i in $i + 1$, so erhält man

$$b_s^{(i+1)} = \frac{2s . \alpha\, b_{s+1}^{(i)} - s . (1 + \alpha^2) . b_{s+1}^{(i+1)}}{i - s + 1},$$

und wenn man statt $b_{s+1}^{(i+1)}$ seinen vorhergehenden Werth substituirt, so erhält man

$$b_s^{(i+1)} = \frac{s . (i + s) . \alpha (1 + \alpha^2) . b_{s+1}^{(i-1)} + s . [2(i - s)\alpha^2 - i(1 + \alpha^2)^2]\, b_{s+1}^{(i)}}{(i - s) . (i - s + 1) . \alpha}.$$

Die-

110) Der zweyte Theil der vorhergehenden Gleichung hat folgende in $\cos i\theta$ multiplicirten Glieder

$(1 + \alpha^2)\, b_{s+1}^{(i)}$,

$- \alpha\, b_{s+1}^{(i+1)}$, welches aus $- 2\alpha . \cos\theta . b_{s+1}^{(i+1)} . \cos(i + 1)\theta$ entspringt, und

$- \alpha\, b_{s+1}^{(i-1)}$, welches aus $- 2\alpha . \cos\theta . b_{s+1}^{(i-1)} . \cos(i - 1)\theta$ entspringt.

Der Koefficient von $\cos i\theta$ im zweyten Theil dieser Gleichung ist also

$$(1 + \alpha^2)\, b_{s+1}^{(i)} - \alpha\, b_{s+1}^{(i+1)} - \alpha\, b_{s+1}^{(i-1)},$$

und er ist dem Koefficienten von $\cos i\theta$ im ersten Theil, nämlich $b_s^{(i)}$, gleich.

Diese zwey Ausdrücke für $b_s^{(i)}$ und $b_s^{(i+1)}$ geben [111])

$$b_{s+1}^{(i)} = \frac{\left(\frac{i+s}{s}\right) . (1+\alpha^2) . b_s^{(i)} - 2 . \left(\frac{i-s+1}{s}\right) . \alpha\, b_s^{(i+1)}}{(1-\alpha^2)^2} \quad \text{(b)};$$

substituirt man statt $b_s^{(i+1)}$ seinen aus der Gleichung (a) gezogenen Werth, so erhält man

$$b_{s+1}^{(i)} = \frac{\left(\frac{s-i}{s}\right) . (1+\alpha^2) . b_s^{(i)} + \frac{2(i+s-1)}{s} . \alpha\, b_s^{(i-1)}}{(1-\alpha^2)^2} \quad \text{(c)};$$

ein Ausdruck, welchen man aus dem vorhergehenden herleiten kann, wenn man in demselben i in $-i$ verwandelt, und bemerkt, dafs $b^{(i)} = b^{(-i)}$ ist. Man wird also vermittelst dieser Formel die Werthe von $b_{s+1}^{(0)}$, $b_{s+1}^{(1)}$, $b_{s+1}^{(2)}$ u. s. w. erhalten, so bald die Werthe von $b_s^{(0)}$, $b_s^{(1)}$, $b_s^{(2)}$ u. s. w. bekannt seyn werden.

Man bezeichne der Kürze wegen die Function $1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2$ durch λ. Differenziirt man die Gleichung

$$\lambda^{-s} = \tfrac{1}{2} b_s^{(0)} + b_s^{(1)} . \cos\theta + b_s^{(2)} . \cos 2\theta + \ldots$$

in Beziehung auf α, so erhält man

$$-2s(\alpha - \cos\theta) . \lambda^{-s-1} = \tfrac{1}{2} \frac{d b_s^{(0)}}{d\alpha} + \frac{d b_s^{(1)}}{d\alpha} . \cos\theta + \frac{d b_s^{(2)}}{d\alpha} . \cos 2\theta + \ldots$$

Nun ist aber

$$-\alpha + \cos\theta = \frac{1 - \alpha^2 - \lambda}{2\alpha},$$

[111]) Diese zwey Gleichungen geben, wenn man die Divisoren wegschafft, folgende zwey:

$$(i-s)\, b_s^{(i)} = 2s\alpha . b_{s+1}^{(i-1)} - s(1+\alpha^2)\, b_{s+1}^{(i)};$$

$$(i-s) . (i-s+1)\, \alpha . b_s^{(i+1)} = s(i+s)\, \alpha\, (1+\alpha^2)\, b_{s+1}^{(i-1)} + s . [2(i-s)\alpha^2 - i(1+\alpha^2)^2]\, b_{s+1}^{(i)}.$$

Man kann $b_{s+1}^{(i-1)}$ eliminiren, wenn man die erste dieser Gleichungen mit $\left(\frac{i+s}{2}\right)(1+\alpha^2)$ multiplicirt und sie dann von der zweyten abzieht; man erhält dann sogleich nach einigen sehr leichten Reductionen die im Text gegebene Gleichung.

folglich

$$\frac{s(1-\alpha^2)}{\alpha}\lambda^{-s-1} - \frac{s\,.\,\lambda^{-s}}{\alpha} = \tfrac{1}{2}\frac{db_s^{(0)}}{d\alpha} + \frac{db_s^{(1)}}{d\alpha}\,.\cos\theta + \ldots$$

woraus man folgende allgemeine Gleichung erhält:

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} = \frac{s\,.\,(1-\alpha^2)}{\alpha}\,.\,b_{s+1}^{(i)} - \frac{s\,.\,b_s^{(i)}}{\alpha};$$

setzt man statt $b_{s+1}^{(i)}$ seinen durch die Formel (b) gegebenen Werth, so erhält man [112])

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} = \left[\frac{i+(i+2s)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\right].\,b_s^{(i)} - \frac{2(i-s+1)}{1-\alpha^2}\,.\,b_s^{(i+1)}.$$

Differenziirt man diese Gleichung, so erhält man [113])

112) Die Gleichung (b) giebt

$$\frac{s}{\alpha}(1-\alpha^2)\,b_{s+1}^{(i)} = \frac{(s+i)\,.\,(1+\alpha^2)}{\alpha(1-\alpha^2)}\,b_s^{(i)} - \frac{2(i-s+1)}{(1-\alpha^2)}\,b_s^{(i+1)};$$

addirt man hierzu $-\frac{s}{\alpha}\,.\,b_s^{(i)}$ oder $-\frac{s(1-\alpha^2)}{\alpha(1-\alpha^2)}\,b_s^{(i)}$, so erhält man für den Koeffizienten von $b_s^{(i)}$

$$\frac{(s+i)(1+\alpha^2) - s(1-\alpha^2)}{\alpha(1-\alpha^2)} = \frac{2s\alpha^2 + i(1+\alpha^2)}{\alpha(1-\alpha^2)} = \frac{(i+2s)\alpha^2+i}{\alpha(1-\alpha^2)},$$

und folglich

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} = \left(\frac{i+(i+2s)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\right)b_s^{(i)} - \frac{2(i-s+1)}{(1-\alpha^2)}\,b_s^{(i+1)}.$$

Braucht man die Gleichung (c), so erhält man

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} = -\left(\frac{i+(i-2s)\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\right)b_s^{(i)} + \frac{2(i+s-1)}{(1-\alpha^2)}\,b_s^{(i-1)}.$$

Man kann diesen Werth von $db_s^{(i)}$ auch aus dem vorhergehenden Werth desselben Differenzials ableiten, wenn man i in $-i$ verwandelt und dabey bemerkt, dafs $b^{(-i)} = b^{(i)}$ ist.

113) Man erhält nämlich, da $i+(i+2s)\alpha^2$ gleich $i(1-\alpha^2)+2(i+s)\alpha^2$ ist,

$$\frac{db_s^{(i)}}{d\alpha} = \left[\frac{i}{\alpha} + \frac{2(i+s)}{(\alpha^{-1}-\alpha)}\right]b_s^{(i)} - \frac{2(i-s+1)}{1-\alpha^2}\,b_s^{(i+1)}.$$

Das Differenzial des Koefficienten von $b_s^{(i)}$ ist $-\frac{i}{\alpha^2}+\frac{2(i+s)(\alpha^{-2}+1)}{(\alpha^{-1}-\alpha)^2}$, oder, wenn man das letzte Glied mit α^2 multiplicirt und dividirt, $-\frac{i}{\alpha^2}+\frac{2(i+s)(1+\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2}$. Man wird nach diesen

$$\frac{d^2 b_s^{(i)}}{d\alpha^2} = \left[\frac{i + (i + 2s)\,\alpha^2}{\alpha\,(1 - \alpha^2)}\right] \cdot \frac{d b_s^{(i)}}{d\alpha} + \left[\frac{2\,(i + s)\,(1 + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^2} - \frac{i}{\alpha^2}\right] \cdot b_s^{(i)}$$

$$- \frac{2 \cdot (i - s + 1)}{(1 - \alpha^2)} \cdot \frac{d b_s^{(i+1)}}{d\alpha} - \frac{4 \cdot (i - s + 1) \cdot \alpha}{(1 - \alpha^2)^2} \cdot b_s^{(i+1)}.$$

Differenziirt man noch einmal, so erhält man [114])

$$\frac{d^3 . b_s^{(i)}}{d\alpha^3} = \left[\frac{i + (i + 2s)\,\alpha^2}{\alpha\,(1 - \alpha^2)}\right] \cdot \frac{d^2 b_s^{(i)}}{d\alpha^2} + 2 \cdot \left[\frac{2\,(i + s)\,(1 + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^2} - \frac{i}{\alpha^2}\right] \cdot \frac{d b_s^{(i)}}{d\alpha}$$

$$+ \left[\frac{4\,(i + s) \cdot \alpha \cdot (3 + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^3} + \frac{2i}{\alpha^3}\right] \cdot b_s^{(i)} - \frac{2\,(i - s + 1)}{1 - \alpha^2} \cdot \frac{d^2 b_s^{(i+1)}}{d\alpha^2}$$

$$- \frac{8\,(i - s + 1)\,\alpha}{(1 - \alpha^2)^2} \cdot \frac{d b_s^{(i+1)}}{d\alpha} - \frac{4 \cdot (i - s + 1)\,(1 + 3\,\alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^3} \cdot b_s^{(i+1)};$$

hieraus erhellet, daſs man nur die Werthe von $b_s^{(0)}$ und $b_s^{(1)}$ zu kennen braucht, um die Werthe von $b_s^{(i)}$ und seiner auf einander folgenden Differenziale zu bestimmen. Man wird diese zwey Gröſsen auf folgende Art bestimmen.

Bemerkungen das Differenzial von $d b_s^{(i)}$ ohne Schwürigkeit finden.

Setzt man i negativ, so erhält man

$$\frac{d^2 b_s^{(i)}}{d\alpha^2} = - \left[\frac{i + (i - 2s)\,\alpha^2}{\alpha\,(1 - \alpha^2)}\right] \cdot \frac{d b_s^{(i)}}{d\alpha} + \left[\frac{i}{\alpha^2} - \frac{2\,(i - s)\,(1 + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^2}\right] \cdot b_s^{(i)}$$

$$+ \frac{2\,(i + s - 1)}{1 - \alpha^2} \cdot \frac{d b_s^{(i-1)}}{d\alpha} + \frac{4\,(i + s - 1)\,\alpha}{(1 - \alpha^2)^2}\, b_s^{(i-1)}.$$

114) Setzt man i negativ, so erhält man folgenden Werth von $d^3 b^{(i)}$:

$$\frac{d^3 . b_s^{(i)}}{d\alpha^3} = - \left[\frac{i + (i - 2s)\,\alpha^2}{\alpha\,(1 - \alpha^2)}\right] \cdot \frac{d^2 b_s^{(i)}}{d\alpha^2} + 2\left[\frac{i}{\alpha^2} - \frac{2\,(i - s)\,(1 + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^2}\right] \cdot \frac{d b_s^{(i)}}{d\alpha}$$

$$- \left[\frac{4\,(i - s)\,\alpha\,(3 + \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^3} + \frac{2i}{\alpha^3}\right] b_s^{(i)} + \frac{2\,(i + s - 1)}{1 - \alpha^2} \cdot \frac{d^2 b_s^{(i-1)}}{d\alpha^2}$$

$$+ \frac{8\,(i + s - 1)\,\alpha}{(1 - \alpha^2)^2} \cdot \frac{d b_s^{(i-1)}}{d\alpha} + \frac{4\,(i + s - 1)\,(1 + 3\alpha^2)}{(1 - \alpha^2)^3} \cdot b_s^{(i-1)}.$$

Nennt man c die Zahl, deren hyperbolischer Logarithme der Einheit gleich ist, so kann man dem Ausdruck von λ^{-s} folgende Form geben:

$$\lambda^{-s} = (1 - \alpha \,.\, c^{\theta.\sqrt{-1}})^{-s} \,.\, (1 - \alpha \,.\, c^{-\theta.\sqrt{-1}})^{-s}.$$

Entwickelt man den zweyten Theil dieser Gleichung nach den Potenzen von $c^{\theta.\sqrt{-1}}$ und $c^{-\theta.\sqrt{-1}}$, so ist klar, daſs die zwey Exponentialgröſsen $c^{i\theta.\sqrt{-1}}$ und $c^{-i\theta.\sqrt{-1}}$ den nämlichen Koefficienten haben werden, welchen wir mit k bezeichnen wollen. Die Summe der beiden Glieder $k \,.\, c^{i\theta.\sqrt{-1}}$ und $k \,.\, c^{-i\theta.\sqrt{-1}}$ ist $2k.\cos i\theta$; dies wird der Werth von $b_s^{(i)}.\cos i\theta$ seyn; man wird also $b_s^{(i)} = 2k$ haben. Nun ist aber der Ausdruck von λ^{-s} dem Product folgender zwey Reihen gleich:

$$1 + s \,.\, \alpha \,.\, c^{\theta.\sqrt{-1}} + \frac{s \,.\, (s+1)}{1 \,.\, 2} \,.\, \alpha^2 \,.\, c^{2\theta.\sqrt{-1}} + \text{u. s. w.}$$

$$1 + s \,.\, \alpha \,.\, c^{-\theta.\sqrt{-1}} + \frac{s \,.\, (s+1)}{1 \,.\, 2} \,.\, \alpha^2 \,.\, c^{-2\theta.\sqrt{-1}} + \text{u. s. w.}$$

Multiplicirt man diese zwey Reihen in einander, so erhält man für den Fall $i = 0$

$$k = 1 + s^2 \,.\, \alpha^2 + \left(\frac{s.(s+1)}{1 \,.\, 2}\right)^2 \,.\, \alpha^4 + \ldots$$

und für den Fall $i = 1$

$$k = \alpha \,.\, \left[s + s \,.\, \frac{s \,.\, (s+1)}{1 \,.\, 2} \,.\, \alpha^2 + \frac{s.(s+1)}{1 \,.\, 2} \,.\, \frac{s \,.\, (s+1) \,.\, (s+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, \alpha^4 + \ldots\right],$$

folglich

$$b_s^{(0)} = 2 \,.\, \left[1 + s^2 \,.\, \alpha^2 + \left(\frac{s.(s+1)}{1 \,.\, 2}\right)^2 \,.\, \alpha^4 + \left(\frac{s.(s+1) \,.\, (s+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\right)^2 \,.\, \alpha^6 + \ldots\right]$$

$$b_s^{(1)} = 2\alpha \,.\, \left[s + s \,.\, \frac{s.(s+1)}{1 \,.\, 2} \,.\, \alpha^2 + \frac{s.(s+1)}{1 \,.\, 2} \,.\, \frac{s.(s+1).(s+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, \alpha^4 + \ldots\right].$$

Sollen diese Reihen convergiren, so muſs α kleiner als die Einheit seyn; dies kann man immer erhalten, wenn man statt α das Verhältniſs der kleinern der beiden Entfernungen a und a' zu der gröſsern nimmt; da wir also $\alpha = \frac{a}{a'}$ gesetzt haben, so werden wir annehmen, daſs a kleiner als a' ist.

In der Theorie der Bewegung der Körper m, m', m'' u. s. w. muſs man die Werthe von $b_s^{(0)}$ und von $b_s^{(1)}$ für die Fälle $s = \frac{1}{2}$ und $s = \frac{3}{2}$ kennen. In

diesen zwey Fällen convergiren diese Werthe wenig, wofern nicht α ein sehr kleiner Bruch ist. Diese Reihen convergiren schneller, wenn $s = -\frac{1}{2}$ ist; man hat alsdann

$$\frac{1}{2} b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 . \alpha^2 + \left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2 . \alpha^4 + \left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2 . \alpha^6 + \left(\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2 . \alpha^8 + \ldots$$

$$b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} = -\alpha \left[1 - \frac{1.1}{2.4} . \alpha^2 - \frac{1}{4} . \frac{1.1.3}{2.4.6} . \alpha^4 - \frac{1.3}{4.6} . \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} . \alpha^6 - \frac{1.3.5}{4.6.8} . \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10} . \alpha^8 \ldots \right].$$

Es ist in der Theorie der Planeten und der Satelliten hinreichend, die Summe der ersten 11 oder 12 Glieder zu nehmen; man kann die folgenden Glieder vernachlässigen, oder genauer, sie wie eine geometrische Progression, deren Exponent $1 - \alpha^2$ ist, summiren. Hat man auf diese Art $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$ und $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$ bestimmt, so erhält man $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$ aus der Formel (b), wenn man in ihr $i = 0$ und $s = -\frac{1}{2}$ setzt:

$$b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = \frac{(1 + \alpha^2) . b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} + 6 \alpha . b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2}.$$

Setzt man in der nämlichen Formel $i = 1$ und $s = -\frac{1}{2}$, so erhält man

$$b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = \frac{10 \alpha . b^{(2)}_{-\frac{1}{2}} - (1 + \alpha^2) b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2};$$

die Formel (a) giebt aber

$$10 \alpha . b^{(2)}_{-\frac{1}{2}} = 2 \alpha . b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} + 4 (1 + \alpha^2) . b^{(1)}_{-\frac{1}{2}};$$

man erhält also

$$b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = \frac{2 \alpha b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} + 3 (1 + \alpha^2) b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2}.$$

Vermittelst dieser Werthe von $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$ und von $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$ erhält man nach den vorhergehenden Formeln die Werthe von $b^{(i)}_{\frac{1}{2}}$ und seiner partiellen Differenziale, für jeden Werth der Zahl i, und man wird daraus die Werthe von $b^{(i)}_{\frac{3}{2}}$ und seiner Differenziale bestimmen. Die Werthe von $b^{(0)}_{\frac{3}{2}}$ und von $b^{(1)}_{\frac{3}{2}}$ können auch auf eine sehr einfache Art durch folgende Formeln bestimmt werden:

$$b^{(0)}_{\frac{3}{2}} = \frac{b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2}; \quad b^{(1)}_{\frac{3}{2}} = -3 \cdot \frac{b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

Wir bemerken ferner, um die Gröſsen $A^{(0)}$, $A^{(1)}$ u. s. w. und ihre Differenziale zu erhalten, daſs nach dem vorhergehenden Satz die Reihe

$$\tfrac{1}{2} A^{(0)} + A^{(1)} \cdot \cos\theta + A^{(2)} \cdot \cos 2\theta + \text{etc.}$$

aus der Entwickelung der Function

$$\frac{a \cdot \cos\theta}{a'^2} - (a^2 - 2aa' \cdot \cos\theta + a'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

in eine Reihe von Kosinus des Winkels θ und seiner Vielfachen entstehet. Setzt man nun $\frac{a}{a'} = \alpha$, so verwandelt sich diese Function in

$$-\frac{1}{2a'} \cdot b^{(0)}_{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a}{a'^2} - \frac{1}{a'} \cdot b^{(1)}_{\frac{1}{2}}\right) \cos\theta - \frac{1}{a'} \cdot b^{(0)}_{\frac{1}{2}} \cdot \cos 2\theta - \ldots$$

Dies giebt im Allgemeinen

$$A^{(i)} = -\frac{1}{a'} \cdot b^{(i)}_{\frac{1}{2}},$$

wenn i gleich Null oder, ohne auf das Zeichen $\pm$ zu sehen, gröſser als Eins ist; im Fall $i = 1$ hat man

$$A^{(1)} = \frac{a}{a'^2} - \frac{1}{a'} \cdot b^{(1)}_{\frac{1}{2}}.$$

Man hat nun ferner

$$\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) = -\frac{1}{a'} \cdot \frac{db^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} \cdot \left(\frac{d\alpha}{da}\right);$$

nun ist aber $\left(\frac{d\alpha}{da}\right) = \frac{1}{a'}$, folglich

$$\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) = -\frac{1}{a'^2} \cdot \frac{db^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha},$$

und für den Fall $i = 1$

$$\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) = \frac{1}{a'^2} \cdot \left[1 - \frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right].$$

Man hat endlich, selbst für den Fall $i = 1$ [115]),

$$\left(\frac{d^2 A^{(i)}}{da^2}\right) = -\frac{1}{a'^3} \cdot \frac{d^2 b^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{da^2};$$

$$\left(\frac{d^3 A^{(i)}}{da^3}\right) = -\frac{1}{a'^4} \cdot \frac{d^3 b^{(i)}_{\frac{1}{2}}}{da^3};$$

u. s. w.

Um nun die Differenziale von $A^{(i)}$ in Beziehung auf a' zu erhalten, muſs man bemerken, daſs, da $A^{(i)}$ eine homogene Function von a und a' von der Ordnung -1 ist, durch die Natur dieser Gattung von Functionen [116])

$$a \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + a' \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da'}\right) = -A^{(i)}$$

ist, woraus man folgende Gleichungen erhält:

$$a' \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da'}\right) = -A^{(i)} - a\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right);$$

$$a' \cdot \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{da . da'}\right) = -2 \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) - a \cdot \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{da^2}\right);$$

$$a'^2 \cdot \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{da'^2}\right) = 2 A^{(i)} + 4 a \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + a^2 \cdot \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{da^2}\right);$$

$$a'^2 \cdot \left(\frac{d^3 A^{(i)}}{da'^2 . da}\right) = 6 \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + 6 a \cdot \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{da^2}\right) + a^2 \cdot \left(\frac{d^3 A^{(i)}}{da^3}\right);$$

$$a'^3 \cdot \left(\frac{d^3 A^{(i)}}{da'^3}\right) = -6 A^{(i)} - 18 a \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) - 9 a^2 \cdot \left(\frac{d^2 A^{(i)}}{da^2}\right) - a^3 \cdot \left(\frac{d^3 A^{(i)}}{da^3}\right);$$

etc. etc.

115) Die Gröſse $\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)$ entfernt sich bloſs durch das Glied $\frac{1}{a'^2}$ vom allgemeinen Gesetz; dies Glied verschwindet aber, wenn man von neuem in Beziehung auf a differenziirt, weil dann $\frac{1}{a'^2}$ als eine beständige Gröſse angesehen werden muſs.

116) Es sey B eine homogene Function von x und y von der Ordnung m und Q eine beständige Gröſse, so ist das allgemeine Glied dieser Function gleich $Qx^n \cdot y^{m-n}$. Betrachtet man also bloſs dies allgemeine Glied, so hat man

Man wird ferner $B^{(i)}$ und seine Differenziale erhalten, wenn man bemerkt, daſs nach dem vorhergehenden Satz die Reihe

$$\tfrac{1}{2} B^{(0)} + B^{(1)} . \cos \theta + B^{(2)} . \cos 2\theta + \ldots$$

die Entwickelung der Function $a'^{-3} . (1 - 2\alpha . \cos\theta + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}}$ in Kosinus des Winkels θ und seiner Vielfachen ist. Nun ist aber diese Function, so entwickelt, der Reihe

$$a'^{-3} . [\tfrac{1}{2} b^{(0)}_{\frac{3}{2}} + b^{(1)}_{\frac{3}{2}} . \cos\theta + b^{(2)}_{\frac{3}{2}} . \cos 2\theta + \ldots]$$

gleich; man hat also allgemein

$$B^{(i)} = \frac{1}{a'^3} . b^{(i)}_{\frac{3}{2}},$$

und hieraus

$$\left(\frac{dB^{(i)}}{d\alpha}\right) = \frac{1}{a'^4} . \frac{db^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha}; \quad \left(\frac{d^2 B^{(i)}}{d\alpha^2}\right) = \frac{1}{a'^5} . \frac{d^2 b^{(i)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} \text{ etc.}$$

Da ferner $B^{(i)}$ eine homogene Function von a und a' von der Ordnung -3 ist, so hat man

$$a . \left(\frac{dB^{(i)}}{da}\right) + a' . \left(\frac{dB^{(i)}}{da'}\right) = -3 B^{(i)},$$

woraus man leicht die in Beziehung auf a' genommenen partiellen Differenziale von $B^{(i)}$ vermittelst seiner in Bezug auf a genommenen Differenziale schlieſsen kann.

In der Theorie der Stöhrungen von m' durch die Wirkung von m sind die Werthe von $A^{(i)}$ und $B^{(i)}$ mit den obigen identisch, $A^{(1)}$ ausgenommen, welches in dieser Theorie $\frac{a'}{a^2} - \frac{1}{a'} . b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$ wird. Die Berechnung der Werthe von $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ und ihrer Differenziale dient also für die Theorie der beiden Körper m und m' zugleich [117]).

50. Wir

$$x\left(\frac{dB}{dx}\right) = n\,Q\,x^n . y^{(m-n)} \text{ und } y\left(\frac{dB}{dy}\right) = (m-n)\,Q\,x^n . y^{(m-n)}.$$

Die Summe beider partiellen Differenziale giebt das m fache des allgemeinen Gliedes, und da dies bey allen Gliedern der Function B statt findet, so ist

$$x\left(\frac{dB}{dx}\right) + y\left(\frac{dB}{dy}\right) = m . B.$$

117) Differenziirt man den Werth, welchen $A^{(1)}$ in dieser Theorie hat, in Beziehung auf a', so erhält man $\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a'^2} . b^{(1)}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{a'}\left(\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{da'}\right)$, und da $\left(\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{da'}\right)$ gleich $-\frac{\alpha}{a'} . \frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}$ ist,

50. Wir wollen nach dieser Ausschweifung über die Entwickelung von R in eine Reihe die Differenzialgleichungen (X'), (Y) und (Z') des 46sten und 47sten Satzes wieder vornehmen, und vermittelst derselben die Werthe von δr, δv und δs bestimmen, wobey wir die Genauigkeit bis zu den Grössen von der Ordnung der Eccentricitäten und der Neigungen der Bahnen treiben werden.

Setzt man in elliptischen Bahnen

$$r = a\,.\,(1 + u_{\prime}); \qquad r' = a'\,.\,(1 + u_{\prime}');$$
$$v = nt + \varepsilon + v_{\prime}; \qquad v' = n't + \varepsilon' + v_{\prime}';$$

so ist nach dem 22sten Satz

$$u_{\prime} = -\,e\,.\cos(nt + \varepsilon - \varpi); \qquad u_{\prime}' = -\,e'\,.\cos(n't + \varepsilon' - \varpi');$$
$$v_{\prime} = 2e\,.\sin(nt + \varepsilon - \varpi); \qquad v_{\prime}' = 2e'\,.\sin(n't + \varepsilon' - \varpi');$$

wo $nt + \varepsilon$, $n't + \varepsilon'$ die mittlern Längen von m und von m', a und a' die halben grossen Axen ihrer Bahnen, e und e' die Verhältnisse der Eccentricitäten zu den halben grossen Axen, endlich ϖ und ϖ' die Längen ihrer Perihelien sind. Man kann alle diese Längen nach Willkühr entweder auf die Ebenen der Bahnen selbst, oder auf eine gegen sie sehr wenig geneigte Bahn beziehen, weil man die Grössen von der Ordnung der Quadrate und der Producte der Eccentricitäten und Neigungen vernachlässigt. Substituirt man die vorhergehenden Werthe im Ausdruck von R des 48sten Satzes, so erhält man [118])

so ist

$$\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a'^2}\left(b^{(1)}_{\frac{1}{2}} + \alpha\,.\,\frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right);$$

Für die höhern in Beziehung auf a' genommenen Differenziale von $A^{(1)}$ gilt auch hier das allgemeine Gesetz, weil das Glied, wodurch sich $A^{(1)}$ vom allgemeinen Gesetz entfernt, nämlich $\frac{a'}{a^2}$ beym zweyten Differenzial verschwindet. Aus den in Beziehung auf a' genommenen Differenzialen erhält man leicht die in Beziehung auf a genommenen Integrale, wenn man in den aus der Natur der homogenen Functionen abgeleiteten Differenzialgleichungen a mit a' und a' mit a verwechselt.

118) Man hat nämlich, wenn i sich auf alle ganze positive und negative Zahlen erstreckt, vermöge des oben (man sehe 106te Anmerk.) gegebenen Lehrsatzes $\frac{m'}{2}\,u_{\prime}\,.\,\Sigma\,.\,a\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ oder

$$-\frac{m'}{2}\,.\,e\,.\cos(nt + \varepsilon - \varpi)\;\Sigma\,.\,a\,.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \text{ gleich}$$

$$-\frac{m'}{2}\,.\,\Sigma\,.\,e\,a\,.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\cos\left[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi\right] \text{ und}$$

$$R = \frac{m'}{2} . \Sigma . A^{(i)} . \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- \frac{m'}{2} . \Sigma . \left[a . \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + 2i . A^{(i)} \right] . e . \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi]$$

$$- \frac{m'}{2} . \Sigma . \left[a' . \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right) - 2(i-1) . A^{(i-1)} \right] . e' . \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'],$$

wo das Zeichen Σ der endlichen Integrale sich auf alle ganze positive und negative Werthe von i, den Werth $i = 0$ mit eingeschlossen, erstreckt. Hieraus erhält man [119])

$+ \frac{m'}{2} v_{,} . \Sigma . i . A^{(i)} \sin i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ gleich $- \frac{m}{2} \Sigma . 2i . A^{(i)}\, e . \cos[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi]$;

beide Glieder geben also $- \frac{m'}{2} . \Sigma . \left[a \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + 2\,i\,A^{(i)} \right] e . \cos[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi]$.

Man hat ferner $\frac{m'}{2} . u_{,}' . \Sigma . a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'}\right) \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ gleich

$$- \frac{m'}{2} . \Sigma . a' \left(\frac{dA^{(i)}}{da'}\right) . e' . \cos[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + n't + \varepsilon' - \varpi'],$$

und $- \frac{m'}{2} . v_{,}' . \Sigma\, i . A^{(i)} . \sin i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ gleich

$$+ \frac{m'}{2} . \Sigma . 2\,i . A^{(i)} . e' . \cos[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + n't + \varepsilon' - \varpi'].$$

Beide Glieder vereinigt geben

$$- \frac{m'}{2} . \Sigma . \left[a' . \left(\frac{dA^{(i)}}{da'}\right) - 2\,i\,A^{(i)} \right] . e' . \cos[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + n't + \varepsilon' - \varpi'].$$

Der Winkel $i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + n't + \varepsilon' - \varpi'$ ist gleich $[(i+1)\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi']$; setzt man dann $i - 1$ statt i, so verwandelt sich der vorhergehende Ausdruck in

$$- \frac{m'}{2} . \Sigma . \left[a' . \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right) - 2\,(i-1) . A^{(i-1)} \right] . e' . \cos[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'].$$

119) Da dR das Differenzial von R in Beziehung auf nt genommen ist, so hat man

$$d . \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) = + i\,n . dt . \sin i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$d . \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi = d . \cos[i\,n't - (i-1)\,nt + i\,\varepsilon' - (i-1)\,\varepsilon - \varpi]$$

$$= (i-1)\,n . dt . \sin[i\,n't - (i-1)\,nt + i\,\varepsilon' - (i-1)\,\varepsilon - \varpi]$$

$$d . \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi = (i-1)\,n . dt . \sin[i\,n't - (i-1)\,nt + i\,\varepsilon' - (i-1)\,\varepsilon - \varpi'];$$

multiplicirt man das erste Differenzial mit $\frac{(n' - n)}{(n' - n)}$, das zweyte und dritte mit $\frac{i\,n' - (i-1)\,n}{i\,n' - (i-1)\,n}$, und integrirt man in Beziehung auf t, so erhält man

$$2\int \mathrm{d}R + r\,.\left(\frac{dR}{dr}\right) =$$

$$2m'.g + \frac{m'}{2}.a.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \frac{m'}{2}.\Sigma.\left[a.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n}{n-n'}.A^{(i)}\right].\cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- \frac{m'}{2}.\left[a^2.\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right) + 3\,a\,.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right].\,e\,.\,\cos\,(nt + \varepsilon - \varpi)$$

$$- \frac{m'}{2}.\left[aa'.\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da.da'}\right) + 2a.\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) + 2a'.\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right) + 4A^{(1)}\right].e'.\cos(nt + \varepsilon - \varpi')$$

$$- \frac{m'}{2}.\Sigma.\left\{\begin{matrix} a^2.\left(\dfrac{d^2A^{(i)}}{da^2}\right) + (2i+1)\,.\,a\,.\left(\dfrac{dA^{(i)}}{da}\right) \\ + \dfrac{2(i-1).n}{i.(n-n')-n}.\left[a\,.\left(\dfrac{dA^{(i)}}{da}\right) + 2.i.A^{(i)}\right]\end{matrix}\right\}.e.\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi]$$

$$- \frac{m'}{2}.\Sigma.\left\{\begin{matrix} aa'.\left(\dfrac{d^2A^{(i-1)}}{da\,.\,da'}\right) - 2(i-1).a.\left(\dfrac{dA^{(i-1)}}{da}\right) \\ + \dfrac{2(i-1).n}{i.(n-n')-n}.\left[a'.\left(\dfrac{dA^{(i-1)}}{da'}\right) - 2(i-1)A^{(i-1)}\right]\end{matrix}\right\}.e'.\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'].$$

Das Integralzeichen Σ erstreckt sich hier, so wie in dem Folgenden, auf alle ganze positive und negative Werthe von i, den einzigen Werth $i = 0$ ausgenommen, weil wir die Glieder, in welchen $i = 0$ ist, außerhalb dieses Zeichens

$$\int.\mathrm{d}\,.\cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) = - \frac{n}{n' - n}\cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon);$$

$$\int.\mathrm{d}\,.\cos[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi] = - \frac{(i-1)\,n}{i\,n' - (i-1)\,n}\,.\cos[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi];$$

$$\int.\mathrm{d}\,.\cos[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'] = - \frac{(i-1)\,n}{i\,n' - (i-1)\,n}\,.\cos[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi').$$

Man wird vermittelst dieser drey Integrale unmittelbar folgenden Werth von $2\int \mathrm{d}\,R$ erhalten:

$$2\int \mathrm{d}R = - \frac{m'}{2}\,.\,\Sigma\,.\,\frac{2n}{n'-n}\,.\,A^{(i)}\,.\,\cos\,i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$+ \frac{m'}{2}\,.\,\Sigma\,.\,\frac{2(i-1)\,n}{in' - (i-1)n}\left[a\,.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + 2i\,A^{(i)}\right].e.\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi]$$

$$+ \frac{m'}{2}.\Sigma.\frac{2(i-1)\,n}{in' - (i-1)n}\left[a'.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right) - 2(i-1)\,A^{(i-1)}\right].e'.\cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'].$$

Da ferner $r\left(\frac{dR}{dr}\right) = a\left(\frac{dR}{da}\right)$ ist, so erhält man, wenn man die Koefficienten der Kosinus des Ausdrucks für R in Beziehung auf a differenziirt und mit a multiplicirt,

gebracht haben; $m'g$ ist eine beständige Gröſse, welche zum Integral $\int dR$ hinzugesetzt werden muſs. Setzt man nun

$$C = \tfrac{1}{2}a^3 \cdot \left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right) + 3a^2 \cdot \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + 6ag;$$

$$D = \tfrac{1}{2}a^2 \cdot a' \cdot \left(\frac{d^2A^{(1)}}{da \,.\, da'}\right) + a^2 \cdot \left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) + aa' \cdot \left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right) + 2aA^{(1)};$$

$$C^{(i)} = \tfrac{1}{2}a^3 \cdot \left(\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\right) + \frac{(2i+1)}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)$$
$$+ \frac{[i(n-n')-3n]}{2.[i.(n-n')-n]} \cdot \left[a^2 \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot aA^{(i)}\right]$$
$$+ \frac{(i-1) \,.\, n}{i.(n-n')-n} \cdot \left[a^2 \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + 2i \,.\, aA^{(i)}\right];$$

$$D^{(i)} = \tfrac{1}{2}a^2a' \cdot \left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{da \,.\, da'}\right) - (i-1) \cdot a^2 \cdot \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)$$
$$+ \frac{(i-1) \,.\, n}{i.(n-n')-n} \cdot \left[aa' \cdot \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right) - 2 \,.\, (i-1)\, aA^{(i-1)}\right].$$

Nimmt man hierauf die Summe der Massen $M+m$ zur Einheit an, und bemerkt man, daſs nach dem 20sten Satz $\frac{M+m}{a^3} = n^2$, so verwandelt sich die Gleichung (X′) in folgende [120]):

$$r\left(\frac{dR}{dr}\right) = \frac{m'}{2}\Sigma \,.\, a\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) . \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$
$$- \frac{m'}{2}\Sigma\left[a^2 . \left(\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\right) + (2i+1) \,.\, a \,.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\right] . \, e . \cos\left[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi\right]$$
$$- \frac{m'}{2}\Sigma\left[aa' . \left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{da \,.\, da'}\right) - 2(i-1) \,.\, a \,.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)\right] . e' . \cos\left[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'\right].$$

Hier ist nur noch zu bemerken, daſs die Gröſse $A^{(0)}$ sich nicht im ersten Gliede des Werths von $2\int dR$ befindet; da nämlich $A^{(0)}$ im ersten Gliede von R in keinen Kosinus multiplicirt ist, so muſs es als eine beständige Gröſse in dR verschwinden, und kann also auch nicht in $\int dR$ vorkommen. Dieser Umstand nöthigt die Glieder, welche aus dem Werth von i, $i = 0$, entspringen, besonders zu betrachten und sie auſserhalb des Summenzeichens Σ zu setzen.

120) Läſst man die Quadrate der Eccentricitäten weg und setzt man statt $\frac{1}{a^2}$ seinen Werth n^2a, so verwandelt sich die Gleichung (X′) in folgende:

$$o = \frac{d^2 . \delta u}{dt^2} + n^2 . \delta u - 2n^2 m' a g - \frac{n^2 m'}{2} . a^2 . \left(\frac{d A^{(0)}}{da}\right)$$

$$- \frac{n^2 m'}{2} . \Sigma . \left[a^2 . \left(\frac{d A^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n}{n-n'} . a A^{(i)}\right] . \cos i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$+ n^2 m' . C . e . \cos (nt + \varepsilon - \varpi) + n^2 m' . D . e' . \cos (nt + \varepsilon - \varpi')$$

$$+ n^2 m' . \Sigma . C^{(i)} . e . \cos [i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi]$$

$$+ n^2 m' . \Sigma . D^{(i)} . e' . \cos [i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'];$$

$$o = \frac{d^2 . \delta u}{dt^2} + n^2 \delta u - n^2 a [1 - e \cos (nt + \varepsilon - \varpi)] \left[2 \int dR + r \left(\frac{dR}{dr}\right)\right]$$

$$- 2 e n^2 a . \int n dt . \sin (nt + \varepsilon - \varpi) : \left[2 \int dR + r \left(\frac{dR}{dr}\right)\right].$$

In denjenigen Gliedern dieser Gleichung, welche schon in e multiplicirt sind, darf man von $2 \int dR + r \left(\frac{dR}{dr}\right)$ nur die Glieder behalten, welche weder in e noch in e' multiplicirt sind, weil diese Glieder die Quadrate und Producte der Eccentricitäten erhalten würden; man erhält so:

$$n^2 a . e . \cos (nt + \varepsilon - \varpi) . \left[2 \int dR + r \left(\frac{dR}{dr}\right)\right] = n^2 a . e . \cos (nt + \varepsilon - \varpi)$$

$$. \left[2 m' g + \frac{m'}{2} a \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \frac{m'}{2} \Sigma . \left[a \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n'}{n-n'} A^{(i)}\right] \cos i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)\right];$$

und wenn man wirklich multiplicirt, so verwandelt sich der zweyte Theil dieser Gleichung in folgenden:

$$\left.\begin{array}{l} n^2 m' . \left[2 g a + \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right] . e . \cos (nt + \varepsilon - \varpi) \\ + n^2 m' . \Sigma . \left[\frac{1}{2} a^2 \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + \frac{n'}{n-n'} a A^{(i)}\right] . e . \cos [i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi] \end{array}\right\} (1).$$

Man hat ferner $- 2 e . n^2 . a . \int n dt . \sin (nt + \varepsilon - \varpi) \left[2 \int dR + r \left(\frac{dR}{dr}\right)\right]$

$$= - 2 e . n^2 . a . \int n dt . \sin (nt + \varepsilon - \varpi) . \frac{m'}{2} \left[4 g + a \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right]$$

$$- 2 e . n^2 . a . \frac{m'}{2} . \int n dt . \Sigma . \left[a \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n'}{n-n'} A^{(i)}\right] \sin [i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi];$$

integrirt man, so verwandelt sich der zweyte Theil in folgenden:

$$\left.\begin{array}{l} + m' . n^2 . \left[4 a g + a^2 . \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right] . e . \cos (nt + \varepsilon - \varpi) \\ + m' . n^2 . \Sigma \left[a^2 . \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n'}{n-n'} a A^{(i)}\right] . \frac{n}{in' - (i-1) n} . e . \cos [i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi] \end{array}\right\} (2).$$

Die Summe von (1) und (2) giebt

und wenn man integrirt [121]),

$$m' . n^2 . \left[6ag + \tfrac{3}{2} a^2 \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right] . e . \cos(nt + \epsilon - \varpi)$$

$$+ m' . n^2 . \Sigma . \left[a^2 . \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n'}{n - n'} a A^{(i)}\right] \frac{i(n - n') - 3n}{2[in' - (i-1)n]} . e . \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \varpi].$$

Substituirt man diese Summe in die Gleichung für δu, und setzt man statt

$- n^2 a . \left[2\int dR + r \left(\frac{dR}{dr}\right)\right]$ seinen Werth, so erhält man die im Text gegebene Gleichung.

121) Die vorhergehende Differenzialgleichung enthält aufser δu blofs das zweyte Differenzial dieser Gröfse; da nun das zweyte Differenzial eines Kosinus auch einen Kosinus giebt, und da die Differenzialgleichung für δu Kosinus des Winkels t enthält, so mufs auch das Integral Kosinus dieses Winkels und folglich δu Glieder von der Form $B . \cos qt$ enthalten, wo B eine beständige Gröfse ist. Betrachtet man nun blofs dies Glied, so hat man

$$0 = n^2 . \delta u - n^2 . B . \cos qt \quad \text{und}$$

$$0 = \frac{d^2 . \delta u}{dt^2} + q^2 . B . \cos qt,$$

und die Summe beider Gleichungen giebt

$$0 = \frac{d^2 . \delta u}{dt^2} + n^2 . \delta u + (q^2 - n^2) . B . \cos qt.$$

Man erhält also den Koefficienten von $\cos qt$ im Integral, wenn man den Koefficienten desselben Kosinus in der gegebenen Differenzialgleichung durch $q^2 - n^2$ dividirt. Vermittelst dieses Satzes erhält man aus den drey Gliedern der Differenzialgleichung, welche das Summenzeichen Σ enthalten, folgende drey Glieder des Integrals, wo im ersten $q = i(n' - n)$, im zweyten und dritten aber $q = i(n' - n) + n$ oder $- q = i(n - n')$ und $- q = i(n - n') - n$ ist;

$$- \frac{m'}{2} . n^2 . \Sigma . \left[\frac{a^2 \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n}{n - n'} . aA^{(i)}}{i^2(n - n')^2 - n^2}\right] . \cos i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$$

$$+ m' . \Sigma . \frac{C^{(i)} n^2}{[i(n - n') - n]^2 - n^2} . e . \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \varpi]$$

$$+ m' . \Sigma . \frac{D^{(i)} n^2}{[i(n - n') - n]^2 - n^2} . e' . \cos[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \varpi'].$$

Die Differenzialgleichung enthält ferner die beständigen Gröfsen

$$- 2n^2 . m' . ag - \tfrac{1}{2} n^2 m' . a^2 . \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right),$$

und man sieht sogleich, dafs man ihnen Genüge thut, wenn man dem Integral die beständige Gröfse

$$2m' . ag + \tfrac{1}{2} m' . a^2 . \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$$

hinzusetzt. Jetzt sind von der gegebenen Differenzialgleichung nur noch die zwey Glieder

$$n^2 m' . C . e . \cos(nt + \epsilon - \varpi) + n^2 m' . D . e' . \cos(nt + \epsilon - \varpi')$$

$$\delta u = 2\,m' a g + \frac{m'}{2} \,.\, a^2 \,.\, \left(\frac{d\,A^{(0)}}{da}\right)$$

$$- \frac{m'}{2} \,.\, n^2 \,.\, \Sigma \,.\, \left[\frac{a^2 \,.\left(\frac{d\,A^{(i)}}{da}\right) + \frac{2\,n}{n - n'} \,.\, a\,A^{(i)}}{i^2 \,.\, (n - n')^2 - n^2}\right] \cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$+ m' \,.\, f_{,} \,.\, e \,.\, \cos\,(nt + \varepsilon - \varpi) + m' \,.\, f_{,}' \,.\, e' \,.\, \cos\,(nt + \varepsilon - \varpi')$$

$$- \frac{m'}{2} \,.\, C \,.\, nt \,.\, e \,.\, \sin(nt + \varepsilon - \varpi) - \frac{m'}{2} \,.\, D \,.\, nt \,.\, e' \,.\, \sin\,(nt + \varepsilon - \varpi')$$

$$+ m' \,.\, \Sigma \,.\, \frac{C^{(i)} \,.\, n^2}{[i\,(n - n') - n]^2 - n^2} \,.\, e \,.\, \cos\,[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi]$$

$$+ m' \,.\, \Sigma \,.\, \frac{D^{(i)} \,.\, n^2}{[i\,(n - n') - n]^2 - n^2} \,.\, e' \,.\, \cos\,[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'],$$

übrig. Man kann sie nicht vermittelst des vorhergehenden Satzes integriren, weil für sie $q = n$ und also $q^2 - n^2$ gleich Null ist. Dieser Umstand zeigt, daſs alle Glieder des Integrals von der Form $B \,.\, \cos\,(nt + \varepsilon - \varpi)$ und $B \,.\, \cos\,(nt + \varepsilon - \varpi')$ in der gegebenen Differenzialgleichung verschwinden. Man bemerkt leicht, daſs das Integral Glieder von der Form $B \,.\, t \,.\, \sin nt$ enthalten muſs, weil dann das zweyte Differenzial ein Glied von der Form $n B \,.\, \cos nt$ enthalten wird, wenn man zuerst bloſs den Factor t differenziirt, und zum zweytenmal $\sin nt$ differenziirt. Betrachtet man also bloſs dies Glied, so ist, da $\frac{d \,.\, \delta u}{dt} = B \,.\, \sin nt + n\,B \,.\, t \,.\, \cos nt$ ist,

$$o = \frac{d^2 \,.\, \delta u}{dt^2} - 2\,n \,.\, B \,.\, \cos nt + n^2\,Bt \,.\, \sin nt, \text{ und}$$

$$o = n^2 \,.\, \delta u - n^2\,Bt \,.\, \sin nt.$$

Die Summe beider Glieder giebt

$$o = \frac{d^2 \,.\, \delta u}{dt^2} + n^2 \,.\, \delta u - 2\,n\,B \,.\, \cos nt.$$

Man muſs also die Koefficienten von $\cos nt$ in der gegebenen Differenzialgleichung durch $-2\,n$ dividiren, um die Koefficienten von $t \sin nt$ im Integral zu erhalten. Die obigen beiden Glieder geben also im Integral folgende zwey:

$$- \frac{m'}{2} \,.\, C \,.\, nt \,.\, e \,.\, \cos\,(nt + \varepsilon - \varpi) - \frac{m'}{2} \,.\, D \,.\, nt \,.\, e' \,.\, \cos\,(nt + \varepsilon - \varpi').$$

Da die gegebene Differenzialgleichung von der zweyten Ordnung ist, so muſs man dem Integral noch zwey willkührliche Gröſsen hinzusetzen, welche so beschaffen sind, daſs sie in der gegebenen Differenzialgleichung verschwinden. Auſser zwey willkührlichen beständigen Gröſsen, haben auch noch die zwey willkührlichen periodischen Gröſsen

$$m' \,.\, f_{,} \,.\, e \,.\, \cos\,(nt + \varepsilon - \varpi) + m' \,.\, f_{,}' \,.\, e' \,.\, \cos\,(nt + \varepsilon - \varpi')$$

diese Eigenschaft, und man muſs aus andern Gründen entscheiden, welcher von beiden Fällen hier Statt findet. Ist nämlich die angenommene Form der willkührlichen Gröſsen unrichtig, so wird man für $f_{,}$ und $f_{,}'$ unmögliche Werthe finden.

wo $f_{,}$ und $f_{,}'$ zwey willkührliche beständige Gröſsen sind. Der für δr und δu im 47sten Satz gefundene Ausdruck wird folgende Gleichung geben [122]):

$$\frac{\delta r}{a} = -2m'.ag - \frac{m'}{2}.a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$$

$$+\frac{m'}{2}.n^2.\Sigma.\left\{\frac{a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+\frac{2n}{n-n'}.aA^{(i)}}{i^2.(n-n')^2-n^2}\right\}.\cos i.(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$

$$-m'.fe.\cos(nt+\varepsilon-\varpi)-m'.f'e'.\cos(nt+\varepsilon-\varpi')$$

$$+\tfrac{1}{2}m'C.nt.e.\sin(nt+\varepsilon-\varpi)+\tfrac{1}{2}m'D.nt.e'.\sin(nt+\varepsilon-\varpi')$$

$$+m'.n^2.\Sigma.\left\{\frac{\left[a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+\frac{2n}{n-n'}.aA^{(i)}\right]}{i^2.(n-n')^2-n^2}-\frac{C^{(i)}}{[i(n-n')-n]^2-n^2}\right\}$$

$$.e.\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]$$

$$-m'.n^2.\Sigma.\frac{D^{(i)}}{[i(n-n')-n]^2-n^2}.e'.\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'],$$

wo f und f' willkührliche Gröſsen sind, welche von $f_{,}$ und von $f_{,}'$ abhängen.

Substituirt man diesen Werth von δr in die Formel (Y) des 46sten Satzes, so wird man δv oder die Stöhrungen des Planeten in Länge erhalten [123]).

Man

122) Man hat nämlich, wenn man die Quadrate von e vernachlässigt,

$$\frac{\delta r}{a} = -\delta u - 2\,\delta u\,.\,e\,.\cos(nt+\varepsilon-\varpi);$$

da das letzte Glied dieses Ausdrucks schon in e multiplicirt ist, so darf man von δu nur die drey ersten Glieder brauchen, welche weder e noch e' enthalten. Man erhält dann

$$-2\delta u.e.\cos(nt+\varepsilon-\varpi) = -m'\left[4ag+a^2\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right].e.\cos(nt+\varepsilon-\varpi)$$

$$+m'.n^2.\Sigma.\left[\frac{a^2\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)+\frac{2n}{n-n'}aA^{(i)}}{i^2.(n-n')^2-n^2}\right].e.\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi].$$

123) Da $(1-e^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}e^2+\ldots$ so kann man den Divisor der Gleichung (Y) weglassen; man erhält also

$$\delta v = \frac{\frac{2r}{a}.d.\frac{\delta r}{a}+d\frac{r}{a}.\frac{\delta r}{a}}{n.dt}+\frac{3a}{\mu}\iint n\,dt\,.\,dR+\frac{2a}{\mu}\int n\,dt\,.\,r\,.\left(\frac{dR}{dr}\right).$$

Man

Man muſs aber bemerken, daſs das der Zeit t proportionale Glied aus dem Ausdruck von δv verschwinden muſs, weil nt die mittlere Bewegung von m ausdrückt. Diese Bedingung bestimmt die beständige Gröſse g, nämlich

Man setze der Kürze wegen

$$\frac{a^2\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot aA^{(i)}}{i^2(n-n')^2 - n^2} = H''^{(i)};$$

$$\frac{C^{(i)}}{[i(n-n')-n]^2 - n^2} = C''^{(i)} \text{ und } \frac{D^{(i)}}{[i(n-n')-n]^2 - n^2} = D''^{(i)},$$

so erhält man

$$\frac{d.\frac{\delta r}{a}}{ndt} = -\frac{m'}{2}.n.\Sigma.i(n'-n).H''^{(i)}.\sin i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$
$$+ m'.f.e.\sin(nt+\varepsilon-\varpi) + m'.f'.e'.\sin(nt+\varepsilon-\varpi')$$
$$+ \tfrac{1}{2}m'.C.e.\sin(nt+\varepsilon-\varpi) + \tfrac{1}{2}m'.D.e'.\sin(nt+\varepsilon-\varpi')$$
$$+ \tfrac{1}{2}m'.C.e.nt.\cos(nt+\varepsilon-\varpi) + \tfrac{1}{2}m'.D.e'.nt.\cos(nt+\varepsilon-\varpi')$$
$$- m'.n.\Sigma.[H''^{(i)} - C''^{(i)}][i(n'-n)+n].e.\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]$$
$$+ m'.n.\Sigma.D''^{(i)}.[i(n'-n)+n].e'.\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'];$$

$$\frac{2r}{a} = 2 - 2e.\cos(nt+\varepsilon-\varpi) \text{ und}$$

$$\frac{\frac{2r}{a}.d.\frac{\delta r}{a}}{ndt} = 2.\frac{d.\frac{\delta r}{a}}{ndt} - 2.\frac{d.\frac{\delta r}{a}}{ndt}.e.\cos(nt+\varepsilon-\varpi).$$

Man darf im letzten Gliede dieser Gleichung vom vorhergehenden Werth von $\frac{d.\frac{\delta r}{a}}{ndt}$ nur das erste Glied brauchen, weil die übrigen Glieder sämmtlich in e oder e' multiplicirt sind, und also die Quadrate dieser Gröſsen erhalten würden. Multiplicirt man wirklich, so erhält man

$$\frac{\frac{2r}{a}.d.\frac{\delta r}{a}}{ndt} = \frac{2.d.\frac{\delta r}{a}}{ndt} + m'.n.\Sigma.i(n'-n)H''^{(i)}.e.\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]\ldots(1).$$

Man hat ferner $\frac{d.\frac{r}{a}}{ndt} = +e.\sin(nt+\varepsilon-\varpi)$ und folglich, da man von $\frac{\delta r}{a}$ nur die von e und e' unabhängigen Glieder brauchen darf,

$$\frac{d\frac{r}{a}.\frac{\delta r}{a}}{ndt} = -m'\left[2ag + \tfrac{1}{2}a^2\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right].e.\sin(nt+\varepsilon-\varpi)$$
$$+ \tfrac{1}{2}m'.n^2.\Sigma.H''^{(i)}.e.\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]\ldots(2)$$

$$g = -\tfrac{1}{3}\,a\,.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right).$$

Wir hätten keine willkührlichen Gröſsen f und f' in den Werth von δr einzu-

Um nun das zweyte Glied von δv, nämlich $\frac{3a}{\mu}\iint n\,dt\,.\,dR$, zu erhalten, bemerke man, daſs

$$\iint ndt.\,d\,.\cos i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) = + \iint .\, i\,.\,n^2\,.\,dt^2\,.\sin i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$$
$$= -\frac{n^2}{i\,(n' - n)^2}\sin i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon);$$

$$\iint ndt.\,d\,.\cos[i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt] = \iint (i-1)\,n^2\,dt^2\,.\sin[i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt]$$
$$= -\frac{(i-1)\,n^2}{[i\,(n'-n) + n]^2}\,.\sin[i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt].$$

Da die Divisoren Quadrate sind, so kann man sie negativ setzen, nämlich $(n - n')^2$ und $[i\,(n - n') - n]^2$. Hierdurch erhält man

$$\iint ndt.dR = -\frac{m'}{2}\,.\,\Sigma\,.\,\frac{n^2}{i\,(n - n')^2}\,.\,A^{(i)}\,.\sin i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$$
$$+ \frac{m'}{2}.\Sigma.\frac{(i-1)\,n^2}{[i(n-n')-n]^2}.\left[a\,.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + 2i\,A^{(i)}\right].e.\sin[i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \varpi]$$
$$+ \frac{m'}{2}.\Sigma.\frac{(i-1)\,n^2}{[i(n-n')-n]^2}.\left[a'.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right) - 2\,(i-1)\,A^{(i-1)}\right].e'.\sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \varpi'].$$

Da man vorher dem Integral $\int dR$ die beständige Gröſse $m'ag$ hinzugesetzt hat, so muſs man auch dem Integral $\int ndt\,.\,dR$ die beständige Gröſse $m'g\,.\,ndt$ und also dem doppelten Integral die beständige Gröſse $m'g\,.\,nt$ hinzusetzen. Man muſs ferner die Glieder, welche aus der Voraussetzung $i = 0$ entspringen, auſserhalb der Summenzeichen Σ setzen, so wie dies bey (1) und (2) geschehen ist; man erhält diese Glieder unmittelbar aus dem allgemeinen Integral, wenn man $i = 0$ setzt, weil das erste Glied desselben die Gröſse $A^{(0)}$ nicht enthält, welche als beständige Gröſse in dR sich nicht befindet. Setzt man endlich in diesem Integral statt $a'.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right)$ seinen Werth $-a\,.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right) - A^{(i-1)}$ und multiplicirt man es mit $\frac{3a}{\mu}$ oder mit $3a$, weil μ, die Summe der Massen, gleich Eins ist, so erhält man

$$\frac{3a}{\mu}.\iint ndt.dR = 3m'ag.nt - m'.\tfrac{3}{2}a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right).e.\sin(nt + \epsilon - \varpi) + \left[\tfrac{3}{2}a^2\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) - \tfrac{3}{2}a.A^{(1)}\right]m'.e'.\sin(nt + \epsilon - \varpi')$$
$$- m'.\Sigma\,.\,\frac{3\,n^2}{2\,i\,(n - n')^2}\,.\,a\,.\,A^{(i)}\,.\sin i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon)$$
$$+ m'.\Sigma\,.\,\frac{(i-1)\,n^2}{[i\,(n - n') - n]^2}\left[\tfrac{3}{2}\,a^2\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + 3\,i\,a\,A^{(i)}\right].e.\sin[i\,(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \varpi]$$
$$- m'.\Sigma\,.\,\frac{(i-1)\,n^2}{[i\,(n - n') - n]^2}\left[\tfrac{3}{2}\,a^2\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right) + \frac{(6i-3)}{2}\,a\,A^{(i-1)}\right]e'.\sin[i(n't - nt + \epsilon' - \epsilon) + nt + \epsilon - \varpi'].$$

führen nöthig gehabt, weil man annehmen kann, dafs sie in den Elementen e und ϖ der elliptischen Bewegung enthalten sind; alsdann würde aber der Ausdruck von δv Glieder enthalten haben, welche von der mittlern Anomalie abhängen, aber nicht unter denen, welche die elliptische Bewegung giebt, enthalten seyn würden. Es ist aber bequemer, diese Glieder aus dem Ausdruck für

Multiplicirt man endlich den in der 119ten Anmerkung gegebenen Werth von $r\left(\frac{dR}{dr}\right)$ mit ndt und integrirt man, so erhält man

$$\int ndt \,.\, r\left(\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{m'}{2}\,\Sigma\,.\,a\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right).\frac{n}{i(n-n')}\,.\sin i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$+\frac{m'}{2}\,\Sigma.\left[a^2.\left(\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\right) + (2i+1)\,a\,.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\right].\left(\frac{n}{i(n-n')-n}\right).e\,.\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]$$

$$+\frac{m'}{2}\,\Sigma.\left[aa'.\left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{da\,.\,da'}\right) - 2(i-1)\,a\,.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)\right].\left(\frac{n}{i(n-n')-n}\right).e'.\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'].$$

Das erste Glied dieses allgemeinen Integrals kann auf den Fall $i = 0$ nicht angewendet werden, da dies Glied $a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$ keinen Sinus enthält; man muſs dies Glied besonders integriren, nämlich $\int ndt\,.\,a\,.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$ gleich $nt\,.\,a\,.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$; die übrigen Glieder des Integrals erstrecken sich auch auf den Fall $i = 0$. Substituirt man in diesem Integral statt $aa'\,.\left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{da\,.\,da'}\right)$ seinen Werth $-a^2\,.\left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2}\right) - 2a\,.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)$ und multiplicirt man es mit $\frac{2a}{\mu}$ oder mit $2a$, weil μ, die Summe der Massen, gleich 1 ist, so erhält man, wenn man noch die Glieder, wo $i = 0$ ist, auſserhalb der Summenzeichen Σ setzt,

$$\frac{2a}{\mu}\int n\,dt\,.\,r\left(\frac{dR}{dr}\right) = m'.a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right).nt - m'.\left[a^3\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right) + a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right].e\,.\sin(nt+\varepsilon-\varpi)$$

$$+\,m'\,.\,a^3\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right).\,e'\,.\sin(nt+\varepsilon-\varpi')$$

$$-\,m'.\,\Sigma.\,a^2\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\left(\frac{n}{i(n-n')}\right).\sin i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$

$$+\,m'.\Sigma.\left[a^3.\left(\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\right) + (2i+1)\,a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\right]\left(\frac{n}{in(-n')-n}\right).e\,.\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]$$

$$-\,m'.\Sigma.\left[a^3.\left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2}\right) + 2i.a.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)\right]\left(\frac{n}{i(n-n')-n}\right).e'.\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi'].$$

die Länge wegzuschaffen und sie in den Ausdruck für den Radius vector einzuführen; wir werden also $f_{,}$ und $f_{,}'$ so bestimmen, daſs diese Bedingung erfüllt wird. Dieses vorausgesetzt erhält man, wenn man statt $a' . \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right)$ seinen Werth $- A^{(i-1)} - a . \left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)$ substituirt, folgende Gleichungen:

Man wird nun ohne Schwierigkeit den Werth von δv erhalten, und es erhellet aus den vom Herrn Verfasser angeführten Gründen, daſs die Summe der beständigen Glieder, welche in nt multiplicirt sind, gleich Null ist; dies bestimmt die beständige Gröſse g. Eben so ist die Summe der in $e \sin(nt + \varepsilon - \varpi)$ und der in $e' \sin(nt + \varepsilon - \varpi')$ multiplicirten Glieder gleich Null, wodurch die beständigen Gröſsen f und f' bestimmt werden. Durch diese Bestimmung der beständigen Gröſsen g, f, f' bleiben von den Gliedern auſserhalb der Summenzeichen nur die folgenden zwey:

$$m' . C . e . nt . \cos(nt + \varepsilon - \varpi) \text{ und } m' . D . e' . nt . \cos(nt + \varepsilon - \varpi')$$

im Werth von δv übrig.

Man hat ferner im Werth von δv folgende drey in $\sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ multiplicirten Glieder:

$$+ m'n \left[\Sigma\, i(n-n') H''^{(i)} - \Sigma \frac{3n}{2i(n-n')^2} . aA^{(i)} - \Sigma \frac{1}{i(n-n')} . a^2 . \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\right],$$ oder da das Summenzeichen sich überall auf i bezieht:

$$m'n\, \Sigma \left[i(n-n') H''^{(i)} - \frac{3n}{2i(n-n')^2} . aA^{(i)} - \frac{1}{i(n-n')} . a^2 . \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\right].$$

Setzt man statt $\frac{3n}{2i(n-n')^2} . aA^{(i)}$ folgende Gröſse: $\frac{4n}{2i(n-n')^2} . aA^{(i)} - \frac{n}{2i(n-n')^2} . aA^{(i)}$,

oder $\frac{\left(\frac{2n}{n-n'}\right) aA^{(i)}}{i(n-n')} - \frac{n}{2i(n-n')^2} . aA^{(i)}$, so erhält man

$$m'.n.\Sigma. \left\{ i(n-n') H''^{(i)} - \frac{\left[\left(\frac{2n}{n-n'}\right) aA^{(i)} + a^2 \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\right]}{i(n-n')} + \frac{n\, a\, A^{(i)}}{2i(n-n')^2} \right\}.$$

Setzt man $\left(\frac{2n}{n-n'}\right) aA^{(i)} + a^2 \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) = H^{(i)}$,

so ist $H''^{(i)} = \frac{1}{i(n-n')^2 - n^2} . H^{(i)}$, und der vorhergehende Koefficient von $\sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ verwandelt sich in

$$m' . n . \Sigma . \left\{ \left[\frac{i(n-n')}{i^2(n-n')^2 - n^2} - \frac{1}{i(n-n')}\right] H^{(i)} + \frac{n\, a\, A^{(i)}}{2i(n-n')^2} \right\},$$

oder in

$$m' . n . \Sigma . \left[\frac{n^2}{i(n-n')\,[i^2(n-n')^2 - n^2]} H^{(i)} + \frac{n\, a\, A^{(i)}}{2i(n-n')^2}\right].$$

$$C = a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2}a^3.\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right);$$

$$D = a\,A^{(1)} - a^2.\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) - \tfrac{1}{2}a^3.\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right);$$

$$D^{(i)} = \frac{(i-1).(2i-1)}{n-i.(n-n')}.a\,A^{(i-1)} + \frac{[i^2.(n-n')-n]}{n-i.(n-n')}.a^2.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}a^3.\left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2}\right);$$

$$f = \tfrac{2}{3}.a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{4}a^3.\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right);$$

$$f' = \tfrac{1}{4}.\left[a.A^{(1)} - a^2.\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) - a^3.\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right)\right].$$

Es sey ferner

$$E^{(i)} = -\frac{3n}{n-n'}.a\,A^{(i)} + \frac{[i^2.(n-n').[n+i.(n-n')]-3n^2]}{i^2.(n-n')^2-n^2}$$
$$\times\left[a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n}{n-n'}.a\,A^{(i)}\right] + \tfrac{1}{2}a^3.\left(\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\right)^{124});$$

Wir werden die Verwandlungen, welche die Koefficienten von $\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi$ und $\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi']$ erfordern, in der 125sten und 126sten Anmerkun geben.

124) Setzt man, wie in der vorhergehenden Anmerkung, $\left(\frac{2n}{n-n'}\right)a\,A^{(i)} + a^2\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) = H^{(i)}$, s erhält man

$$C^{(i)} = \tfrac{1}{2}a^3\left(\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\right) + \frac{2i+1}{2}.H^{(i)} - \frac{(2i+1)n}{n-n'}a\,A^{(i)} + \frac{i(n-n')-3n}{2[i(n-n')-n]}.H^{(i)}$$
$$+\frac{(i-1).n}{i(n-n')-n}.H^{(i)} + \frac{2(i-1).n.\left(i-\frac{n}{n-n'}\right)}{i(n-n')-n}.a\,A^{(i)}.$$

Giebt man dem Koefficienten von $\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]$ den gemeinschaftlichen Divisor $[i(n-n')-n]^2-n^2$, so erhält man die Gröfse, welche der Herr Verfasser mit $E^{(i)}$ bezeichnet, nämlich

$$E^{(i)} = \frac{[i(n-n')-n]^2-n^2}{i^2(n-n')^2-n^2}H^{(i)} - C^{(i)}.$$

Substituirt man statt $C^{(i)}$ den vorhergehenden Werth, vereinigt dann die vier Glieder, welche i $H^{(i)}$, und die zwey Glieder, welche in $a\,A^{(i)}$ multiplicirt sind, so erhält man den im Text gegebene Werth von $E^{(i)}$.

$$F^{(i)} = \frac{(i-1).n}{n-n'} . a A^{(i)} + \frac{\left[\frac{1}{2} in . [n + i(n - n')] - 3n^2\right]}{i^2.(n-n')^2 - n^2} \times \left[a^2 . \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n}{n-n'} . a A^{(i)}\right] - \frac{2n^2 . E^{(i)}}{n^2 - [n - i.(n-n')]^2}$$ [125]);

125) Der Hr. Verfasser hat den Koefficienten von $e . \sin [i(n't - nt + \varepsilon - \varepsilon') + nt + \varepsilon - \varpi]$ in δv durch $\frac{n}{n - i(n - n')} . F^{(i)}$ oder durch $-\frac{n}{i(n-n') - n} . F^{(i)}$ bezeichnet; der in der 123sten Anmerkung gefundene Werth von δv giebt daher

$$F^{(i)} = -2[i(n - n') - n]^2 (H''^{(i)} - C''^{(i)}) + i(n - n')[i.(n - n') - n] H''^{(i)}$$
$$- \frac{n}{2} [i(n - n') - n] H''^{(i)}$$
$$- \frac{(i-1)n}{i(n-n') - n} \left[\frac{3}{2} a^2 \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + 3 i a A^{(i)}\right]$$
$$- a^3 . \left(\frac{d^2A^{(i)}}{da^2}\right) - (2i + 1) a^2 \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right).$$

Nun ist $H''^{(i)} - C''^{(i)}$ der Koefficient von $\cos [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi]$ im Werth von δr, welchen man durch $\frac{-E^{(i)}}{[i(n-n') - n]^2 - n^2}$ bezeichnet hat. Das erste Glied von $F^{(i)}$ ist also gleich $+2E^{(i)} + \frac{2n^2 . E^{(i)}}{[i(n-n') - n]^2 - n^2}$, weil $2[i(n-n') - n]^2 = 2\big[[i(n-n') - n]^2 - n^2\big] + 2n^2$ ist.

Das zweyte und dritte Glied von $F^{(i)}$ giebt $\frac{i}{2}(n - 2n')[i(n-n') - n] H''^{(i)}$, oder $\frac{i(n-2n')[i(n-n') - n]}{2 . i^2(n-n')^2 - n^2} H^{(i)}$. Das vierte Glied von $F^{(i)}$ ist gleich $-\frac{3}{2} \frac{(i-1).n}{i(n-n') - n} . H_1^{(i)} + \frac{3(i-1).n}{[i(n-n') - n]} . \left[\frac{n}{(n-n')} - i\right] a A^{(i)}$, oder gleich $-\frac{3}{2} . \frac{(i-1).n}{i(n-n') - n} . H^{(i)} - \frac{3(i-1)n}{n-n'} a A^{(i)}$. Das fünfte Glied von $F^{(i)}$ hebt sich durch $2E^{(i)}$ auf, und das sechste Glied von $F^{(i)}$ ist gleich $-(2i+1) H^{(i)} + \frac{(4i+2)n}{n-n'} a A^{(i)}$. Setzt man nun statt $2E^{(i)}$ seinen Werth, so erhält man

$$F^{(i)} = \frac{2n^2 E^{(i)}}{[i(n-n') - n]^2} + \frac{n}{n-n'} a A^{(i)} [-6(3i - 3) + 4i + 2]$$
$$+ \frac{2i^2(n-n')[i(n-n') + n] - 6n^2}{i^2(n-n')^2 - n^2} . H_1^{(i)} + \frac{i\left(\frac{n-2n'}{2}\right)[i(n-n') - n]}{i^2.(n-n')^2 - n} . H^{(i)}$$
$$- \frac{3}{2} \frac{(i-1)n}{i(n-n') - n} H^{(i)} - (2i+1) . H^{(i)}.$$

$$G^{(i)} = \frac{(i-1).(2i-1).na.A^{(i-1)} + (i-1).n a^2.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)}{2[n-i(n-n')]}$$

$$- \frac{2n^2.D^{(i)}}{n^2-[n-i.(n-n')]^2}\ ^{125)});$$

so wird man folgende Gleichungen erhalten:

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{m'}{6}.a^2.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)$$

$$+ \frac{m'.n^2}{2}.\Sigma.\frac{\left[a^2.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + \frac{2n}{n-n'}.aA^{(i)}\right]}{i.(n-n')^2-n^2}.\cos i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)$$

$$- m'.f.e.\cos(nt+\varepsilon-\varpi) - m'.f'.e'.\cos(nt+\varepsilon-\varpi')$$

$$+ \tfrac{1}{2}m'.C.nt.e.\sin(nt+\varepsilon-\varpi) + \tfrac{1}{2}m'.D.nt.e'.\sin(nt+\varepsilon-\varpi')$$

$$+ n^2.m'.\Sigma.\left\{\begin{array}{l}\frac{E^{(i)}}{n^2-[n-i.(n-n')]^2}.e.\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi]\\ + \frac{D^{(i)}}{n^2-[n-i.(n-n')]^2}.e'.\cos[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi']\end{array}\right\};$$

Man wird den vier in $H^{(i)}$ multiplicirten Gliedern den gemeinschaftlichen Divisor $i^2(n-n')^2-n^2$ geben, welches beym dritten Gliede dadurch geschieht, daſs man den Zähler und Nenner mit $i(n-n')+n$ multiplicirt. Addirt man dann die vier Koefficienten, so erhält man den im Text gegebenen Ausdruck.

126) Der Koefficient von $e'.\sin[i(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+nt+\varepsilon-\varpi']$ in δv wird durch $\frac{nG^{(i)}}{n-i(n-n')}$, oder durch $-\frac{nG^{(i)}}{i(n-n')-n}$ bezeichnet; der in der 123sten Anmerkung gefundene Werth von δv giebt daher

$$G^{(i)} = +2[i(n-n')-n]^2 D''^{(i)}_{\prime} + \frac{(i-1)n}{i(n-n')-n}\left[\tfrac{3}{2}a^2\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right) + \frac{6i-3}{2}\,a\,A^{(i-1)}\right.$$

$$\left. + a^3.\left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2}\right) + 2i.a.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right)\right].$$

Das erste Glied von $G^{(i)}$ ist gleich $+\frac{2n^2D^{(i)}}{[i(n-n')-n]^2-n^2} + 2D^{(i)}$,

und $2D^{(i)}$ ist gleich $\frac{(2i-1)(2i-1)}{n-i(n-n')}aA^{(i-1)} + \frac{2[i^2(n-n')-n]}{n-i(n-n')}a^2\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da}\right) - a^3\left(\frac{d^2A^{(i-1)}}{da^2}\right)$.

Substituirt man diese Werthe, so erhält man den im Text gegebenen Werth von $G^{(i)}$.

$$\delta v = \frac{m'}{2} \cdot \Sigma \cdot \left\{ \left[\frac{n^2}{i \cdot (n-n')^2} \cdot a A^{(i)} + \frac{2 n^3 \left[a^2 \cdot \left(\frac{d A^{(i)}}{da} \right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot a A^{(i)} \right]}{i (n-n') \left[i^2 (n-n')^2 - n^2 \right]} \right] \right.$$

$$\left. + \sin i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \right\} + m' \cdot C \cdot nt \cdot e \cdot \cos (nt + \varepsilon - \varpi)$$

$$+ m' \cdot D \cdot nt \cdot e' \cdot \cos (nt + \varepsilon - \varpi')$$

$$+ n m' \cdot \Sigma \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{F^{(i)}}{n - i \cdot (n-n')} \cdot e \cdot \sin \left[i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi \right] \\ + \frac{G^{(i)}}{n - i \cdot (n-n')} \cdot e' \cdot \sin \left[i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi' \right] \end{array} \right\}.$$

Das Integralzeichen Σ erstreckt sich in diesen Ausdrücken auf ganze, positive und negative Werthe von i, den einzigen Werth von $i = 0$ ausgenommen.

Man mufs hierzu bemerken, dafs die Ausdrücke von $\frac{\delta r}{a}$ und von δv selbst in dem Fall, wenn die durch $\Sigma \cdot A^{(i)} \cdot \cos i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ sehr wenig convergiren, vermittelst der Divisoren, welche sie erhalten, convergiren. Diese Bemerkung ist um desto wichtiger, weil es ohne diesen Umstand unmöglich gewesen wäre, die gegenseitigen Stöhrungen der Planeten, bey welchen das Verhältnifs der Entfernungen von der Sonne wenig von der Einheit verschieden ist, analytisch auszudrücken.

Man kann diesen Ausdrücken noch die folgende Gestalt geben, welches uns in der Folge nützlich seyn wird. Es sey

$$h = e \cdot \sin \varpi; \qquad h' = e' \cdot \sin \varpi';$$
$$l = e \cdot \cos \varpi; \qquad l' = e' \cdot \cos \varpi';$$

so erhält man

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{m'}{6} \cdot a^2 \cdot \left(\frac{d A^{(0)}}{da} \right)$$

$$+ \frac{m' \cdot n^2}{2} \cdot \Sigma \cdot \left\{ \left[\frac{a^2 \cdot \left(\frac{d A^{(i)}}{da} \right) + \frac{2n}{n-n'} \cdot a A^{(i)}}{i^2 \cdot (n-n')^2 - n^2} \right] \cdot \cos i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \right\}$$

— m'

$$- m' . (hf + h'f') \cos(nt + \varepsilon) - m' . (lf + l'f') \sin(nt + \varepsilon)$$

$$+ \frac{m'}{2} . (lC + l'D) . nt . \sin(nt + \varepsilon) - \frac{m'}{2} . (hC + h'D) . nt . \cos(nt + \varepsilon)$$

$$+ n . m' . \Sigma . \left\{ \begin{array}{l} \frac{hE^{(i)} + h'D^{(i)}}{n^2 - [n - i(n - n')]^2} . \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon] \\ + \frac{lE^{(i)} + l'D^{(i)}}{n^2 - [n - i(n - n')]^2} . \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon] \end{array} \right\};$$

$$\delta v = \frac{m'}{2} . \Sigma . \left\{ \left[\frac{n^2}{i(n - n')^2} . aA^{(i)} \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2n^3 . \frac{\left[a^2 . \left(\frac{dA^{(i)}}{da} \right) + \frac{2n}{n - n'} . aA^{(i)} \right]}{i . (n - n') . [i^2 . (n - n')^2 - n^2]} \right] . \sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \right\}$$

$$+ m' . [h . C + h' . D] . nt . \sin(nt + \varepsilon) + m' . [l . C + l' . D] . nt . \cos(nt + \varepsilon)$$

$$+ n . m' . \Sigma . \left\{ \begin{array}{l} \frac{(l . F^{(i)} + l' . G^{(i)})}{n - i(n - n')} . \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon] \\ - \frac{(h . F^{(i)} + h' . G^{(i)})}{n - i(n - n')} . \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon] \end{array} \right\}.$$

Setzt man diese Ausdrücke von δr und δv zu den Werthen, welche r und v in Beziehung auf die elliptische Bewegung haben, so wird man die vollständigen Werthe des Radius vectors von m und seiner Bewegung in Länge haben.

51. Wir wollen nun die Bewegung von m in der Breite betrachten. Hierzu wollen wir die Formel Z' des 47sten Satzes wieder vornehmen. Vernachlässigt man das Product der Neigungen durch die Eccentricitäten der Bahnen, so verwandelt sie sich in

$$0 = \frac{d^2 \delta u'}{dt^2} + n^2 . \delta u' - \frac{1}{a^2} . \left(\frac{dR}{dz} \right).$$

Nimmt man für die feste Ebene die ursprüngliche Bahn von m an, so giebt der Ausdruck von R im 48sten Satze

$$\left(\frac{dR}{dz} \right) = \frac{m'z'}{a'^3} - \frac{m'z'}{2} . \Sigma . B^{(i)} . \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon).$$

Der Werth von i erstreckt sich hier auf alle ganze, positive und negative Zahlen, den Werth $i = 0$ mit inbegriffen. Es sey γ die Tangente der Neigung der

Bahn von m' gegen die ursprüngliche Bahn von m, und Π die Länge des aufsteigenden Knotens der ersten dieser Bahnen auf der zweyten, so wird man sehr nahe folgende Gleichung haben:

$$z' = a' \cdot \gamma \cdot \sin(n't + \varepsilon' - \Pi);$$

dieses giebt

$$\left(\frac{dR}{dz}\right) = \frac{m'}{a'^2} \cdot \gamma \cdot \sin(n't + \varepsilon' - \Pi) - \frac{m'}{2} \cdot a' B^{(1)} \cdot \gamma \cdot \sin(nt + \varepsilon - \Pi)$$

$$- \frac{m'}{2} \cdot a' \cdot \Sigma \cdot B^{(i-1)} \cdot \gamma \cdot \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \Pi].$$

Der Werth von i erstreckt sich hier, so wie in dem Folgenden, auf alle ganze, positive und negative Zahlen, bloſs den Werth $i = 0$ ausgenommen. Multiplicirt man den Werth von $\left(\frac{dR}{dz}\right)$ mit $n^2 a^3$, welches der Einheit gleich ist, so verwandelt sich die Differenzialgleichung für $\delta u'$ in folgende:

$$0 = \frac{d^2 \cdot \delta u'}{dt^2} + n^2 \cdot \delta u' - m' \cdot n^2 \cdot \frac{a}{a'^2} \gamma \cdot \sin(n't + \varepsilon' - \Pi)$$

$$+ \frac{m' \cdot n^2}{2} \cdot a a' \cdot B^{(1)} \cdot \gamma \cdot \sin(nt + \varepsilon - \Pi)$$

$$+ \frac{m' \cdot n^2}{2} \cdot a a' \cdot \Sigma \cdot B^{(i-1)} \cdot \gamma \cdot \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \Pi].$$

Integrirt man und bemerkt man, daſs nach dem 47sten Satz $\delta s = - a \cdot \delta u'$ ist, so erhält man

$$\delta s = - \frac{m' \cdot n^2}{n^2 - n'^2} \cdot \frac{a^2}{a'^2} \cdot \gamma \cdot \sin(n't + \varepsilon' - \Pi)$$

$$- \frac{m' \cdot a^2 a'}{2} \cdot B^{(1)} \cdot nt \cdot \gamma \cdot \cos(nt + \varepsilon - \Pi)$$

$$+ \frac{m' \cdot a^2 a'}{2} \cdot \Sigma \left[\frac{n^2 \cdot B^{(i-1)}}{n^2 - [n - i(n - n')]^2} . \gamma . \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \Pi] \right].$$

Um die Breite von m über eine feste Ebene, welche wenig gegen die ursprüngliche Bahn geneigt ist, zu erhalten, nenne man ϕ die Neigung dieser Bahn gegen die feste Ebene, und θ die Länge seines aufsteigenden Knotens gegen dieselbe Ebene. Dann wird es hinreichend seyn, zu δs die Gröſse $\tang \phi . \sin(v - \theta)$ oder $\tang \phi \cdot \sin(nt + \varepsilon - \theta)$, wenn man die Eccentricität der Bahn vernach-

lässigt, hinzuzusetzen. Man nenne ϕ' und θ' das, was ϕ und θ in Beziehung auf m' werden. Wenn m sich auf der ursprünglichen Bahn von m' bewegte, so würde die Tangente seiner Breite tang $\phi' \,.\, \sin(nt + \varepsilon - \theta')$ seyn; sie würde tang $\phi \,.\, \sin(nt + \varepsilon - \theta)$ seyn, wenn m sich auf seiner ursprünglichen Bahn zu bewegen fortführe. Der Unterschied dieser zwey Tangenten ist sehr nahe die Tangente der Breite von m über die Ebene seiner ursprünglichen Bahn, wenn man annimmt, dafs er sich auf der Ebene der ursprünglichen Bahn von m' bewegt; man hat also

$$\text{tang}\,\phi' \,.\, \sin(nt + \varepsilon - \theta') - \text{tang}\,\phi \,.\, \sin(nt + \varepsilon - \theta) = \gamma \,.\, \sin(nt + \varepsilon - \Pi).$$

Es sey

$$\text{tang}\,\phi \,.\, \sin\theta = p; \qquad \text{tang}\,\phi' \,.\, \sin\theta' = p';$$
$$\text{tang}\,\phi \,.\, \cos\theta = q; \qquad \text{tang}\,\phi' \,.\, \cos\theta' = q';$$

so erhält man

$$\gamma \sin \Pi = p' - p; \qquad \gamma \cos \Pi = q' - q;$$

wenn also s die Breite von m über die feste Ebene bezeichnet, so hat man

$$\begin{aligned} s = {} & q \,.\, \sin(nt + \varepsilon) - p \,.\, \cos(nt + \varepsilon) \\ & - \frac{m' \,.\, a^2 a'}{4} \,.\, (p' - p) \,.\, B^{(1)} \,.\, nt \,.\, \sin(nt + \varepsilon) \\ & - \frac{m' \,.\, a^2 a'}{4} \,.\, (q' - q) \,.\, B^{(1)} \,.\, nt \,.\, \cos(nt + \varepsilon) \\ & - \frac{m' \,.\, n^2}{n^2 - n'^2} \,.\, \frac{a^2}{a'^2} \,.\, [(q' - q) \,.\, \sin(n't + \varepsilon') - (p' - p) \,.\, \cos(nt + \varepsilon)] \\ & + \frac{m' \,.\, n^2 \,.\, a^2 a'}{2} \,.\, \Sigma \,.\, \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(q' - q)\, B^{(i-1)}}{n^2 - [n - i(n - n')]^2} \,.\, \sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon] \\ \dfrac{-(p' - p) \,.\, B^{(i-1)}}{n^2 - [n - i(n - n')]^2} \,.\, \cos[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon] \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

52. Wir wollen nun die gefundenen Formeln zusammen stellen. Nennt man die Theile des Radius vectors und der Länge v auf der Bahn, welche von der elliptischen Bewegung abhangen, (r) und (v), so hat man

$$r = (r) + \delta r; \qquad v = (v) + \delta v.$$

Der vorhergehende Werth von s wird die Breite von m über die feste Ebene seyn; es wird aber genauer seyn, statt seiner zwey ersten Glieder, welche von m' unabhängig sind, den Werth der Breite zu brauchen, welche in dem Fall

Statt haben würde, wenn m die Ebene seiner ursprünglichen Bahn nicht verließe. Diese Ausdrücke enthalten die ganze Theorie der Planeten, wenn man die Quadrate und Producte der Eccentricitäten und Neigungen der Bahnen vernachlässigt, welches oft erlaubt ist. Sie haben übrigens den Vortheil, eine sehr einfache Form zu haben, wodurch man leicht das Gesetz ihrer verschiedenen Glieder gewahr werden kann.

Man muſs zuweilen die Glieder anwenden, welche von den Quadraten und Producten der Eccentricitäten und der Neigungen und selbst von höhern Potenzen und Producten abhangen. Man wird diese Glieder durch die vorhergehende Analysis bestimmen können; die Betrachtung, welche sie nöthig macht, wird immer ihre Bestimmung erleichtern. Die Näherungen, in welchen man auf sie Rücksicht nehmen würde, würden neue Glieder einführen, welche von neuen Argumenten abhangen würden. Sie würden noch die Argumente hervorbringen, welche die vorhergehenden Näherungen geben, aber mit immer kleinern und kleinern Koefficienten nach dem folgenden Gesetz, welches man leicht aus der im 48sten Satze gegebenen Entwickelung von R in eine Reihe herleiten kann: ein Argument, welches in den auf einander folgenden allmähligen Annäherungen sich zum erstenmal unter Gröſsen von irgend einer Ordnung r befindet, kann nur durch Gröſsen von der Ordnung $r + 2$, $r + 4$ etc. wieder hervorgebracht werden.

Es folgt hieraus, daſs die Koefficienten der Glieder von der Form $t \cdot {\sin \atop \cos} (nt + \varepsilon)$, welche in den Ausdrücken von r, v und s sich befinden, bis zu Gröſsen der dritten Ordnung genähert sind, d. h. daſs die Näherung, in welcher man auf die Quadrate und Producte der Eccentricitäten und der Neigungen der Bahnen Rücksicht nähme, ihren Werthen nichts hinzusetzen würde. Sie haben also alle Genauigkeit, welche man verlangen kann; eine Bemerkung, welche um desto wichtiger ist, da von diesen Koefficienten die Sekularänderungen der Bahnen abhängen.

Die verschiedenen Glieder der Perturbationen von r, v, s sind in der Form

$$k \cdot {\sin \atop \cos} \left[i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + rnt + r\varepsilon \right]$$

enthalten, wo r eine ganze positive Zahl oder gleich Null ist, und wo k eine Function der Eccentricitäten und der Neigungen der Bahnen von der Ordnung r oder von einer höhern Ordnung ist; man kann hieraus beurtheilen, von welcher Ordnung ein von einem gegebenen Winkel abhangendes Glied ist.

Es ist klar, daſs die Wirkung der Körper m'', m''' u. s. w. den vorhergehenden Werthen von r, v und s nur solche Glieder hinzusetzen kann, welche denjenigen ähnlich sind, die aus der Wirkung von m' entspringen, und daſs die Summe aller dieser Glieder die gänzlichen Werthe von r, v und s geben wird, wenn man das Quadrat der stöhrenden Kraft vernachlässigt. Dieses folgt aus der Natur der Formeln (X'), (Y), (Z'), welche linearisch in Beziehung auf die Gröſsen sind, welche von der stöhrenden Kraft abhangen.

Man wird endlich die Stöhrungen von m', welche aus der Wirkung von m entstehen, erhalten, wenn man in den vorhergehenden Formeln a, n, h, l, ε, ϖ, p, q und m', in a', n', h', l', ε', ϖ', p', q' und m, und umgekehrt, verwandelt.

Siebentes Kapitel.

Von den Sekularungleichheiten der himmlischen Bewegungen.

53. Die Kräfte, welche die elliptische Bewegung stöhren, bringen in die Ausdrücke von r, $\frac{dv}{dt}$ und s des vorhergehenden Kapitels die Zeit t auſserhalb der Zeichen Sinus und Kosinus, oder unter die Gestalt von Kreisbogen, welche unbegränzt wachsen, und dadurch endlich die vorhergehenden Ausdrücke fehlerhaft machen müssen. Es ist also wesentlich, diese Bogen wegzuschaffen, und die Function zu erhalten, aus deren Entwickelung in Reihen sie entstehen. Wir haben zu diesem Zweck im 5ten Kapitel eine allgemeine Methode gegeben, aus welcher erhellet, daſs diese Bogen aus den Aenderungen der elliptischen Bewegungen, welche dann Functionen der Zeit sind, entspringen. Da diese Aenderungen sehr langsam geschehen, so bezeichnet man sie durch den Namen Sekulargleichungen. Ihre Theorie ist einer der interessantesten Punkte des Weltsystems; wir wollen sie daher mit der Ausführlichkeit geben, welche ihre Wichtigkeit erfordert.

Man hat nach dem vorigen Kapitel

$$r = a \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 - h \,.\, \sin(nt + \varepsilon) - l \,.\, \cos(nt + \varepsilon) - \text{etc.} \\ + \frac{m'}{2} \,.\, (l \,.\, C + l' \,.\, D) \,.\, nt \,.\, \sin(nt + \varepsilon) \\ - \frac{m'}{2} \,.\, (h \,.\, C + h' \,.\, D) \,.\, nt \,.\, \cos(nt + \varepsilon) + m' S \end{array} \right\};$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = n &+ 2nh \,.\, \sin(nt + \varepsilon) + 2nl \,.\, \cos(nt + \varepsilon) + \text{etc.} \\ &- m' \,.\, (l \,.\, C + l' \,.\, D) \,.\, n^2 t \,.\, \sin(nt + \varepsilon) \\ &+ m' \,.\, (h \,.\, C + h' \,.\, D) \,.\, n^2 t \,.\, \cos(nt + \varepsilon) + m' T; \end{aligned}$$

$s = q \,.\, \sin(nt + \varepsilon) - p \,.\, \cos(nt + \varepsilon) + \text{etc.}$

$$- \frac{m'}{4} \,.\, a^2 a' \,.\, (p' - p) \,.\, B^{(1)} \,.\, nt \,.\, \sin(nt + \varepsilon)$$

$$- \frac{m'}{4} \,.\, a^2 a' \,.\, (q' - q) \,.\, B^{(1)} \,.\, nt \,.\, \cos(nt + \varepsilon) + m' \,.\, z;$$

wo S, T, z periodische Functionen der Zeit t sind. Wir wollen zuerst den Ausdruck von $\frac{dv}{dt}$ betrachten, und ihn mit dem Ausdruck von y im 43sten Satz vergleichen. Da der Bogen t unter den periodischen Zeichen in dem Ausdruck von $\frac{dv}{dt}$ mit der willkührlichen Gröſse n multiplicirt ist, so muſs man die folgenden im 43sten Satze gefundenen Gleichungen gebrauchen:

$$0 = X' + \theta \,.\, X'' - Y;$$
$$0 = Y' + \theta \,.\, Y'' + X'' - 2Z;$$
etc. etc.

Wir wollen nun sehen, was X, X', X'', Y etc. hier für Werthe haben. Vergleicht man den Ausdruck von $\frac{dv}{dt}$ mit dem von y im angeführten Satz, so erhält man

$X = n + 2nh \,.\, \sin(nt + \varepsilon) + 2nl \,.\, \cos(nt + \varepsilon) + m' \,.\, T;$

$Y = m' \,.\, n^2 \,.\, (h \,.\, C + h' \,.\, D) \,.\, \cos(nt + \varepsilon) - m' \,.\, n^2 \,.\, (l \,.\, C + l' \,.\, D) \,.\, \sin(nt + \varepsilon).$

Vernachlässigt man die Producte der partiellen Differenziale der beständigen Gröſsen mit den stöhrenden Massen, welches erlaubt ist, weil diese Differenziale von der Ordnung dieser Massen sind, so erhält man nach dem 43sten Satz

$$X' = \left(\frac{dn}{d\theta}\right) \,.\, [1 + 2h \,.\, \sin(nt + \varepsilon) + 2l \,.\, \cos(nt + \varepsilon)]$$
$$+ 2n \,.\, \left(\frac{d\varepsilon}{d\theta}\right) \,.\, [h \,.\, \cos(nt + \varepsilon) - l \,.\, \sin(nt + \varepsilon)]$$
$$+ 2n \,.\, \left(\frac{dh}{d\theta}\right) \,.\, \sin(nt + \varepsilon) + 2n \,.\, \left(\frac{dl}{d\theta}\right) \,.\, \cos(nt + \varepsilon);$$

$$X'' = 2n \,.\, \left(\frac{dn}{d\theta}\right) \,.\, [h \,.\, \cos(nt + \varepsilon) - l \,.\, \sin(nt + \varepsilon)];$$

dadurch verwandelt sich die Gleichung $0 = X' + \theta \,.\, X'' - Y$ in folgende:

$$0 = \left(\frac{dn}{d\theta}\right) . [1 + 2h . \sin(nt + \varepsilon) + 2l . \cos(nt + \varepsilon)]$$
$$+ 2n . \left(\frac{dh}{d\theta}\right) . \sin(nt + \varepsilon) + 2n . \left(\frac{dl}{d\theta}\right) . \cos(nt + \varepsilon)$$
$$+ 2n . \left[\theta . \left(\frac{dn}{d\theta}\right) + \left(\frac{d\varepsilon}{d\theta}\right)\right] . [h . \cos(nt + \varepsilon) - l . \sin(nt + \varepsilon)]$$
$$- m'.n^2 . (h . C + h'.D) . \cos(nt + \varepsilon) + m'.n^2 . (l.C + l'.D) . \sin(nt + \varepsilon).$$

Setzt man die Koefficienten der ähnlichen Sinus und Kosinus einzeln gleich Null, so erhält man

$$0 = \left(\frac{dn}{d\theta}\right);$$
$$0 = \left(\frac{dh}{d\theta}\right) - l . \left(\frac{d\varepsilon}{d\theta}\right) + \frac{m' . n}{2} . (l . C + l' . D);$$
$$0 = \left(\frac{dl}{d\theta}\right) + h . \left(\frac{d\varepsilon}{d\theta}\right) - \frac{m' . n}{2} . (h . C + h' . D].$$

Integrirt man diese Gleichungen und verwandelt man in ihren Integralen θ in t, so erhält man nach dem 43sten Satz die Werthe der willkührlichen Gröſsen in Functionen von t, und man wird die Kreisbogen in den Ausdrücken von $\frac{dv}{dt}$ und von r weglassen können. Man kann aber statt dieser Veränderung sogleich θ in t in diesen Differenzialgleichungen verwandeln. Die erste dieser Gleichungen zeigt uns, daſs n beständig ist; und da die willkührliche Gröſse a im Ausdruck von r davon abhängt, vermöge der Gleichung $n^2 = \frac{1}{a^3}$, so ist a ebenfalls beständig. Die beiden übrigen Gleichungen reichen nicht zu, um h, l, ε zu bestimmen. Man wird eine neue Gleichung erhalten, wenn man bemerkt, daſs der Ausdruck von $\frac{dv}{dt}$ durch Integriren für den Werth der mittlern Länge von m die Gröſse $\int n\,dt$ giebt; nun haben wir aber diese Länge gleich $nt + \varepsilon$ gesetzt, man hat also $nt + \varepsilon = \int n\,dt$; dieses giebt

$$t . \frac{dn}{dt} + \frac{d\varepsilon}{dt} = 0,$$

und da man $\frac{dn}{dt} = 0$ hat, so wird man ebenfalls $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$ haben. Die zwey

will-

willkührlichen Grösen nt und ε sind folglich beständig; die willkührlichen Grösen h und l werden so durch die folgenden Differenzialgleichungen bestimmt:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{m' \,.\, n}{2} \,.\, (l \,.\, C + l' \,.\, D) \quad (1);$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{m' \,.\, n}{2} \,.\, (h \,.\, C + h' \,.\, D) \quad (2).$$

Da die Betrachtung des Ausdrucks von $\frac{dv}{dt}$ zur Bestimmung der Werthe von n, a, h, l und ε hingereicht hat, so sieht man a priori, dafs die aus dem Ausdruck von r entstehenden Differenzialgleichungen zwischen denselben Grösen, mit den vorhergehenden übereinstimmen müssen. Man kann sich hiervon leicht a posteriori versichern, wenn man auf diesen Ausdruck die Methode des 43sten Satzes anwendet.

Wir wollen nun den Ausdruck von s betrachten. Vergleicht man ihn mit dem von y im angeführten Satz, so erhält man

$$X = q \,.\, \sin(nt + \varepsilon) - p \,.\, \cos(nt + \varepsilon) + m' \,.\, z;$$

$$Y = \frac{m' \,.\, n}{4} \,.\, a^2 \,.\, a' \,.\, B^{(1)} \,.\, (p - p') \,.\, \sin(nt + \varepsilon)$$

$$+ \frac{m' \,.\, n}{4} \,.\, a^2 \,.\, a' \,.\, B^{(1)} \,.\, (q - q') \,.\, \cos(nt + \varepsilon),$$

wo n und ε nach dem Vorhergehenden beständig sind; man hat vermöge des 43sten Satzes

$$X' = \left(\frac{dq}{d\theta}\right) \,.\, \sin(nt + \varepsilon) - \left(\frac{dp}{d\theta}\right) \,.\, \cos(nt + \varepsilon)$$

$$X'' = 0.$$

Die Gleichung $0 = X' + \theta \,.\, X'' - Y$ verwandelt sich so in folgende:

$$0 = \left(\frac{dq}{d\theta}\right) \,.\, \sin(nt + \varepsilon) - \left(\frac{dp}{d\theta}\right) \,.\, \cos(nt + \varepsilon)$$

$$- \frac{m' \,.\, n}{4} \,.\, a^2 \,.\, a' \,.\, B^{(1)} \,.\, (p - p') \,.\, \sin(nt + \varepsilon)$$

$$- \frac{m' \,.\, n}{4} \,.\, a^2 \,.\, a' \,.\, B^{(1)} \,.\, (q - q') \,.\, \cos(nt + \varepsilon).$$

Hieraus erhält man, wenn man die Koefficienten der ähnlichen Sinus und Kosinus vergleicht und θ in t verwandelt, um unmittelbar p und q in Functionen

von t zu erhalten, folgende Gleichungen:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{m'.n}{4}.a^2.a'.B^{(1)}.(q-q') \quad (3);$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{m'.n}{4}.a^2.a'.B^{(1)}.(p-p') \quad (4).$$

Hat man durch diese Gleichungen p und q bestimmt, so wird man sie in den vorhergehenden Ausdruck von s substituiren, und dabey die Glieder weglassen, welche Kreisbogen enthalten; man erhält so

$$s = q . \sin(nt+\varepsilon) - p . \cos(nt+\varepsilon) + m'.z.$$

54. Die Gleichung $\frac{dn}{dt} = 0$, welche wir so eben gefunden haben, ist von grofsem Gewicht in der Theorie des Weltsystems, weil sie uns zeigt, dafs die mittlern Bewegungen der himmlischen Körper und ihre grofsen Axen unveränderlich sind; diese Gleichung ist aber nur bis zu den Gröfsen $m'.h$ inclusive genähert.

Wenn die Gröfsen von der Ordnung $m'.h^2$ und von den folgenden Ordnungen in $\frac{dv}{dt}$ ein Glied von der Form $2kt$ hervorbrächten, wo k eine Function der Elemente der Bahnen von m und m' ist, so würde daraus im Ausdruck von v das Glied kt^2 entstehen, welches in der Folge der Zeiten äufserst beträchtlich werden würde, weil es die Länge von m im Verhältnifs der Quadrate der Zeiten ändert. Man würde alsdann nicht mehr $\frac{dn}{dt} = 0$ haben, sondern statt dieser Gleichung vermöge des vorhergehenden Satzes $\frac{dn}{dt} = 2k$; es ist also sehr wichtig zu wissen, ob im Ausdruck von v Glieder von der Form $k.t^2$ vorhanden sind. Wir wollen beweisen, dafs der vorhergehende Ausdruck von v keine ähnlichen Glieder enthalten wird, wenn man nur auf die ersten Potenzen der anziehenden Kräfte Rücksicht nimmt, wie weit man auch übrigens die Annäherungen in Beziehung auf die Potenzen der Eccentricitäten und Neigungen der Bahnen treiben mag.

Wir wollen hierzu die Formel (X) des 46sten Satzes vornehmen:

$$\delta r = \frac{a.\cos v.\int n dt.r.\sin v.\left[2\int dR + r.\left(\frac{dR}{dr}\right)\right] - a.\sin v.\int n dt.r.\cos v.\left[2\int dR + r.\left(\frac{dR}{dr}\right)\right]}{\mu.\sqrt{1-e^2}}.$$

Wir wollen den Theil von δr betrachten, welcher die in t^2 multiplicirten Glieder enthält, oder, um mehrerer Allgemeinheit willen, die Glieder, welche in den Sinus oder Kosinus eines Winkels $\alpha t + \beta$ multiplicirt und zu gleicher Zeit durch α^2 dividirt sind, wo α sehr klein ist. Es ist klar, daſs, wenn man $\alpha = 0$ setzt, daraus ein Glied entstehen wird, welches in t^2 multiplicirt ist, so daſs dieser zweyte Fall den ersten enthält. Die Glieder, welche α^2 zum Divisor haben, können augenscheinlich nur aus einer doppelten Integration entstehen; sie können also nur aus dem Theil von δr, welcher das doppelte Integralzeichen $\int$ enthält, hervorgebracht werden. Wir wollen zuerst das Glied

$$\frac{2a \cdot \cos v \cdot \int n dt \cdot (r \cdot \sin v \cdot \int \mathrm{d}R)}{\mu \cdot \sqrt{1 - e^2}}$$

untersuchen. Nimmt man für den Anfangspunkt des Winkels v die Sonnennähe an, so hat man in der elliptischen Bahn nach dem 20sten Satz

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos v},$$

und folglich

$$\cos v = \frac{a \cdot (1 - e^2) - r}{er}.$$

Hieraus erhält man durch Differenziiren

$$r^2 \cdot dv \cdot \sin v = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{e} \cdot dr.$$

Man hat aber nach dem 19ten Satz

$$r^2 \cdot dv = dt \cdot \sqrt{\mu a (1 - e^2)} = a^2 \cdot n dt \cdot \sqrt{1 - e^2};$$

folglich

$$\frac{a n dt \cdot r \cdot \sin v}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{r dr}{e}.$$

Das Glied $\dfrac{2a \cdot \cos v \cdot \int n dt \cdot (r \cdot \sin v \cdot \int \mathrm{d}R)}{\mu \cdot \sqrt{1 - e^2}}$ verwandelt sich so in

$$\frac{2 \cdot \cos v}{\mu \cdot e} \cdot \int (r dr \cdot \int \mathrm{d}R) \text{ oder } \frac{\cos v}{\mu \cdot e} \cdot (r^2 \cdot \int \mathrm{d}R - \int r^2 \cdot \mathrm{d}R).$$

Da diese letztere Function kein doppeltes Integralzeichen mehr enthält, so ist klar, daſs daraus kein Glied, welches α^2 zum Divisor hat, entstehen kann.

Wir wollen nun im Ausdruck von δr das Glied

$$-\frac{2a \,.\, \sin v \,.\, \int n\,dt \,.\, (r \,.\, \cos v \,.\, \int \mathrm{d}R)}{\mu \,.\, \sqrt{1-e^2}}$$

betrachten. Setzt man statt cos v seinen vorhergehenden durch r ausgedrückten Werth, so verwandelt sich dies Glied in

$$\frac{2 \,.\, \sin v \,.\, \int n\,dt \,.\, [r - a \,.\, (1-e^2)] \,.\, \int \mathrm{d}R}{\mu\, e \,.\, \sqrt{1-e^2}}.$$

Nach dem 22sten Satz ist

$$r = a \,.\, (1 + \tfrac{1}{2} e^2 + e \,.\, z'),$$

wo z' eine unendliche Reihe von Kosinus des Winkels $nt + \varepsilon$ und seiner Vielfachen ist; man hat also

$$\frac{\int n\,dt}{e} \,.\, [r - a(1-e^2)] \,.\, \int \mathrm{d}R = a \,.\, \int n\,dt \,.\, (\tfrac{3}{2} e + z') \,.\, \int \mathrm{d}R.$$

Man bezeichne das Integral $\int z' \,.\, n\,dt$ mit z'', so erhält man

$$a \,.\, \int n\,dt \,.\, (\tfrac{3}{2} e + z') \,.\, \int \mathrm{d}R = \tfrac{3}{2} a\, e \,.\, \int n\,dt \,.\, \int \mathrm{d}R + a\, z'' \,.\, \int \mathrm{d}R - a \int z'' \,.\, \mathrm{d}R.$$

Da die beiden letzten Glieder kein doppeltes Integralzeichen enthalten, so kann daraus kein Glied entstehen, welches α^2 zum Theiler hat; nimmt man also nur auf diese Glieder Rücksicht, so erhält man

$$-\frac{2a \,.\, \sin v \,.\, \int n dt \,.\, (r \,.\, \cos v \,.\, \int \mathrm{d}R)}{\mu \,.\, \sqrt{1-e^2}} = \frac{3a^2 e \,.\, \sin v \,.\, \int n dt \,.\, \int \mathrm{d}R}{\mu \,.\, \sqrt{1-e^2}} = \frac{dr}{n dt} \,.\, \frac{3a}{\mu} \,.\, \int n dt \,.\, \int \mathrm{d}R,$$

und der Radius vector r verwandelt sich in

$$(r) + \left(\frac{dr}{n\,dt}\right) \,.\, \frac{3a}{\mu} \,.\, \int n\,dt \,.\, \int \mathrm{d}R,$$

wo (r) und $\left(\frac{dr}{n\,dt}\right)$ die Ausdrücke von r und $\frac{dr}{n\,dt}$ in Beziehung auf die elliptische Bewegung sind. Will man also im Ausdruck des Radius vectors auf den Theil der Stöhrungen, welcher durch α^2 dividirt ist, Rücksicht nehmen, so braucht man nur im Ausdruck desselben, welcher aus der elliptischen Bewegung folgt, die mittlere Länge $nt + \varepsilon$ um die Gröſse $3a \,.\, \int n dt \,.\, \int \mathrm{d}R$ zu vermehren.

Wir wollen nun sehen, auf welche Art man auf diesen Theil der Stöhrungen im Ausdruck der Länge v Rücksicht nehmen muſs. Die Formel (Y) des 46sten Satzes giebt, wenn man in ihr $\frac{3a}{\mu} \,.\, \frac{dr}{n\,dt} \,.\, \int n\,dt \,.\, \int \mathrm{d}R$ statt δr setzt, und wenn man nur auf die durch α^2 dividirten Glieder Rücksicht nimmt,

$$\delta v = \frac{\left(\frac{2r\,.\,d^2r + dr^2}{a^2n^2\,.\,dt^2} + 1\right)}{\sqrt{1 - e^2}} \,.\, \frac{3a}{\mu} \,.\int ndt \,.\int \mathrm{d}R;$$

man hat aber nach dem Vorhergehenden

$$dr = \frac{ae\,.\,ndt\,.\,\sin v}{\sqrt{1 - e^2}}\,; \qquad r^2 dv = a^2 ndt\,.\,\sqrt{1 - e^2},$$

woraus man leicht, wenn man statt $\cos v$ seinen vorher durch r gegebenen Werth setzt, schliefsen kann

$$\frac{\frac{2r\,.\,d^2r + dr^2}{a^2n^2\,.\,dt^2} + 1}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{dv}{ndt}.$$

Nimmt man also nur auf den Theil der Stöhrungen Rücksicht, welcher a^2 zum Divisor hat, so verwandelt sich die Länge v in

$$(v) + \left(\frac{dv}{ndt}\right) \,.\, \frac{3a}{\mu} \,.\int ndt \,.\int \mathrm{d}R,$$

wo (v) und $\left(\frac{dv}{ndt}\right)$ die Theile von v und von $\frac{dv}{ndt}$ sind, welche sich auf die elliptische Bewegung beziehen. Man muſs also, um auf diesen Theil der Stöhrungen im Ausdruck der Länge von m Rücksicht zu nehmen, dieselbe Regel befolgen, welche wir gegeben haben, um darauf im Ausdruck des Radius vectors Rücksicht zu nehmen; man muſs nämlich im elliptischen Ausdruck der wahren Länge die mittlere Länge $nt + \varepsilon$ um die Gröſse $\frac{3a}{\mu} \,.\int ndt \,.\int \mathrm{d}R$ vermehren.

Entwickelt man den Ausdruck von $\left(\frac{dv}{ndt}\right)$ in eine Reihe von Kosinus des Winkels $nt + \varepsilon$ und seiner Vielfachen, so ist der beständige Theil der Einheit gleich, wie man im 22sten Satz gesehen hat; daraus entspringt im Ausdruck der Länge das Glied $\frac{3a}{\mu} \,.\int ndt \,.\int \mathrm{d}R$. Enthielte $\mathrm{d}R$ ein beständiges Glied $km' \,.\, ndt$, so würde dies Glied im Ausdruck der Länge v das Glied $\frac{3}{2} \,.\, \frac{am'}{\mu} \,.\, kn^2t^2$ hervorbringen. Man muſs also, um über das Daseyn ähnlicher Glieder in diesem Ausdruck zu entscheiden, zusehen, ob $\mathrm{d}R$ ein beständiges Glied enthält.

Wenn die Bahnen wenig eccentrisch und wenig gegen einander geneigt sind, so kann man R, wie man im 48sten Satz gesehen, immer durch eine unendliche Reihe von Sinus und Kosinus von Winkeln, welche im Verhältniſs der Zeit wachsen, ausdrücken. Man kann sie im Allgemeinen durch das Glied $km' . \cos (i'n't + int + A)$ vorstellen, wo i' und i ganze positive oder negative Zahlen, oder gleich Null sind. Nimmt man das Differenzial dieses Gliedes bloſs in Beziehung auf die mittlere Bewegung von m, so erhält man $- ik . m' . ndt . \sin (i'n't + int + A)$. Dieses ist der Theil von dR, wenn man bloſs dies einzelne Glied betrachtet; er kann nur dann beständig seyn, wenn $0 = i'n' + in$ ist; dieses erfordert, daſs die mittlern Bewegungen der Körper m und m' gegen einander commensurabel sind, und da dies im Sonnensystem nicht statt findet, so muſs man daraus schlieſsen, daſs der Werth von dR keine beständigen Glieder enthält, und daſs also die mittlern Bewegungen der himmlischen Körper beständig sind, oder, welches eben so viel ist, daſs $\frac{dn}{dt} = 0$ ist, wenn man nur die ersten Potenzen der stöhrenden Massen betrachtet. Da der Werth von a vermittelst der Gleichung $n^2 = \frac{\mu}{a^3}$ mit dem Werth von n zusammenhängt, so folgt hieraus, daſs die groſsen Axen der Bahnen beständig sind, wenn man die periodischen Gröſsen vernachlässigt.

Wenn die mittlern Bewegungen der Körper m und m' zwar nicht genau commensurabel, aber es doch sehr nahe sind, so werden in der Theorie ihrer Bewegungen Ungleichheiten von einer langen Periode vorhanden seyn, welche wegen der Kleinheit des Divisors α^2 sehr beträchtlich werden können. Wir werden in der Folge sehen, daſs dies der Fall bey Jupiter und Saturn ist. Die vorhergehende Analysis wird auf eine sehr einfache Art den Theil der Stöhrungen geben, welcher von diesem Divisor abhängt. Es erhellet aus ihr, daſs es dann zureicht, die mittlere Länge $nt + \varepsilon$ oder $\int ndt$ um die Gröſse $\frac{3a}{\mu} . \int ndt . \int dR$ zu ändern, welches eben so viel ist, als n im Integral $\int ndt$ um die Gröſse $\frac{3an}{\mu} . \int dR$ zu vermehren. Betrachtet man die Bahn von m als eine veränderliche Ellipse, so hat man $n^2 = \frac{\mu}{a^3}$; die vorhergehende Aenderung von n verur-

sacht also in der halben großen Axe a der Bahn die Aenderung
$-\frac{2a^2 \cdot \int dR}{\mu}$.

Treibt man im Werthe von $\frac{dv}{dt}$ die Genauigkeit bis zu den Größen von der Ordnung der Quadrate der stöhrenden Massen, so wird man Glieder finden, welche der Zeit proportional sind; betrachtet man aber aufmerksam die Differenzialgleichungen der Bewegung der Körper m, m' etc., so wird man sich leicht versichern, daß diese Glieder zu gleicher Zeit von der Ordnung der Quadrate und der Producte der Eccentricitäten und der Neigungen der Bahnen sind. Da aber alles, was die mittlere Bewegung afficirt, in der Länge sehr beträchtlich werden kann, so werden wir in der Folge Rücksicht auf diese Glieder nehmen, und wir werden sehen, daß sie die Sekulargleichungen hervorbringen, welche man in den Bewegungen des Monds beobachtet hat.

55. Wir wollen nun die Gleichungen (1) und (2) des 53sten Satzes wieder vornehmen, und

$$(0, 1) = -\frac{m' \cdot n \cdot C}{2}; \quad \boxed{0, 1} = \frac{m' \cdot n \cdot D}{2}$$

setzen; sie verwandeln sich dadurch in

$$\frac{dh}{dt} = (0, 1) \cdot l - \boxed{0, 1} \cdot l';$$

$$\frac{dl}{dt} = -(0, 1) \cdot h + \boxed{0, 1} \cdot h'.$$

Man kann die Ausdrücke von (0, 1) und von $\boxed{0, 1}$ sehr einfach auf folgende Art bestimmen. Substituirt man statt C und D ihre im 50sten Satz gegebenen Werthe, so erhält man

$$(0, 1) = -\frac{m' \cdot n}{2} \cdot \left[a^2 \cdot \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2} a^3 \cdot \left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)\right];$$

$$\boxed{0, 1} = \frac{m' \cdot n}{2} \cdot \left[a A^{(1)} - a^2 \cdot \left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) - \tfrac{1}{2} a^3 \cdot \left(\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right)\right].$$

Man hat nach dem 49sten Satz

$$a^2 \cdot \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2} a^3 \cdot \left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right) = -a^2 \cdot \frac{db_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{da} - \tfrac{1}{2} a^3 \cdot \frac{d^2b_{\frac{1}{2}}^{(0)}}{da^2};$$

man wird leicht nach dem nämlichen Satz $\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}$ und $\frac{d^2b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}$ in Functionen von $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$ und $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$ erhalten, und diese Gröſsen sind durch Linearfunctionen von $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$ und $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$ gegeben; man findet so [127]):

α^2

127) Aus der im 49sten Satz für $db^{(i)}_s$ gegebenen Formel erhält man, wenn man $s = \frac{1}{2}$ und $i = 0$ setzt,

$$\frac{db^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = \frac{\alpha b^{(0)}_{\frac{1}{2}} - b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)}.$$

Substituirt man hier die am Ende des 49sten Satzes gefundenen Werthe von $b^{(0)}_{\frac{1}{2}}$ und $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, so erhält man

$$\alpha b^{(0)}_{\frac{1}{2}} = \frac{\alpha(1+\alpha^2)\, b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} + 6\,\alpha^2\, b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2}$$

und

$$-b^{(1)}_{\frac{1}{2}} = \frac{-2\,\alpha\, b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} - 3\,(1+\alpha^2)\, b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

Dividirt man die Summe beider Gröſsen durch $(1-\alpha^2)$, so findet man

$$\frac{d\,b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = \frac{-\alpha\, b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} - 3\, b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2} \text{ oder } = -\alpha\, b^{(0)}_{\frac{3}{2}} + b^{(1)}_{\frac{3}{2}},$$

weil, wie am Ende des 49sten Satzes gezeigt worden, $b^{(0)}_{\frac{3}{2}} = \frac{b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2}$ und $b^{(1)}_{\frac{3}{2}} = \frac{-3\cdot b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2}$ ist. Differenziirt man diesen Ausdruck von $\frac{d\,b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}$ in Beziehung auf α, so erhält man

$$\frac{d^2 b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = -b^{(0)}_{\frac{3}{2}} - \alpha\cdot\frac{d\,b^{(0)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} + 3\cdot\frac{d\,b^{(1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha}.$$

Nun ist vermöge der Formel für $d\,b^{(i)}_s$ des 49sten Satzes

$$-\alpha\cdot\frac{d\,b^{(0)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} = -\frac{3\alpha^2}{1-\alpha^2}\, b^{(0)}_{\frac{3}{2}} - \frac{\alpha^2}{\alpha(1-\alpha^2)}\, b^{(1)}_{\frac{3}{2}},$$

und vermöge der eben daselbst in der Anmerkung gegebenen Formel für $\frac{d\,b^{(i)}_s}{d\alpha}$,

+ 3

$$a^2 \cdot \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2}\, a^3 \cdot \left(\frac{d^2 A^{(0)}}{da^2}\right) = \frac{3\, \alpha^2 \cdot b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{2\,(1 - \alpha^2)^2},$$

folglich

$$(0, 1) = -\frac{3\, m' \cdot n \cdot \alpha^2 \cdot b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{4\,(1 - \alpha^2)^2}.$$

Es sey

$$(a^2 - 2\, a a' \cdot \cos\theta + a'^2)^{\frac{1}{2}} = (a, a') + (a, a')' \cdot \cos\theta + (a, a')'' \cdot \cos 2\theta + \text{etc.},$$

so hat man nach Satz 49

$$(a, a') = \tfrac{1}{2}\, a' \cdot b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}; \quad (a, a')' = a' \cdot b^{(1)}_{-\frac{1}{2}},$$

folglich

$$(0, 1) = -\frac{3\, m' \cdot n\, a^2 a' \cdot (a, a')'}{4\,(a'^2 - a^2)^2}.$$

Man hat ferner nach Satz 49

$$a\, A^{(1)} - a^2 \cdot \left(\frac{d\, A^{(1)}}{da}\right) - \tfrac{1}{2} a^3 \cdot \left(\frac{d^2 A^{(1)}}{da^2}\right) = -\alpha \cdot \left[b^{(1)}_{\frac{1}{2}} - \alpha \cdot \frac{db^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{da} - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \cdot \frac{d^2 b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{da^2} \right].$$

$$+ 3 \cdot \frac{d\, b^{(1)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} = -\frac{1 - 2\,\alpha^2}{\alpha\,(1 - \alpha^2)}\, b^{(1)}_{\frac{3}{2}} + \frac{3}{1 - \alpha^2}\, b^{(0)}_{\frac{3}{2}}.$$

Substituirt man diese Werthe, so findet man

$$\frac{d^2 b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = + 2\, b^{(0)}_{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\alpha}\, b^{(1)}_{\frac{3}{2}}.$$

Man hat also

$$-\alpha^2 \cdot \frac{d\, b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha} = + \alpha^3 \cdot b^{(0)}_{\frac{3}{2}} - \alpha^2 \cdot b^{(1)}_{\frac{3}{2}},$$

$$\text{und } -\tfrac{1}{2}\,\alpha^3 \cdot \frac{d^2 b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2} = -\alpha^3 b^{(0)}_{\frac{3}{2}} + \frac{\alpha^2}{2} \cdot b^{(1)}_{\frac{3}{2}}.$$

Die Summe beider Größen ist $-\frac{1}{2}\,\alpha^2 b^{(1)}_{\frac{3}{2}}$ oder $+\dfrac{\frac{3}{2}\,\alpha^2 \cdot b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2}$, weil, wie schon oben bemerkt worden, $b^{(1)}_{\frac{3}{2}} = -\dfrac{3 \cdot b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2}$ ist.

Setzt man statt $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$ und statt seiner Differenziale ihre Werthe in $b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}$ und $b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}$, so findet man die vorhergehende Function gleich [128])

$$-\frac{3\alpha\,.\,[(1+\alpha^2)\,b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\,\alpha\,.\,b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}]}{(1-\alpha^2)^2},$$

128) Da $\alpha\,\frac{d\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}+\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{d^2 b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}$ gleich $d\,.\left(\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{d\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right)$ ist, so suche man zuerst $\frac{d\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}$ vermittelst der in einer der Anmerkungen zum 49sten Satz gegebenen Formel für $\frac{d\,b^{(i)}_{s}}{d\alpha}$; man erhält so

$$\tfrac{1}{2}\,\alpha^2\,.\,\frac{d\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}=\frac{\alpha^2\,b^{(0)}_{\frac{1}{2}}-\alpha\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{2\,(1-\alpha^2)}.$$

Wir haben in der vorhergehenden Anmerkung $\frac{\alpha\,b^{(0)}_{\frac{1}{2}}-b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)}=\frac{d\,b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}$ gefunden; aus beiden Gleichungen findet man

$$\tfrac{1}{2}\,\alpha^2\,.\,\frac{d\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}=\tfrac{1}{2}\,\alpha\,.\,\frac{d\,b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha},$$

folglich, wenn man differenziirt,

$$d\,.\left(\frac{\alpha^2}{2}\,.\,\frac{d\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right)=\tfrac{1}{2}\,.\,\frac{d\,b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}+\tfrac{1}{2}\,\alpha\,.\,\frac{d^2 b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}.$$

Nun ist vermöge der in der vorhergehenden Anmerkung gefundenen Werthe

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{d\,b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}=-\tfrac{1}{2}\,\alpha\,b^{(0)}_{\frac{3}{2}}+\tfrac{1}{2}\,b^{(1)}_{\frac{3}{2}}\text{ und}$$

$$\tfrac{1}{2}\,\alpha\,\frac{d^2 b^{(0)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha^2}=+\,\alpha\,b^{(0)}_{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{2}\,b^{(1)}_{\frac{3}{2}}.$$

Beider Gleichungen Summe giebt

$$d\,.\left(\frac{\alpha^2}{2}\,.\,\frac{d\,b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right)=\tfrac{1}{2}\,\alpha\,b^{(0)}_{\frac{3}{2}}.$$

Man ziehe diese Gleichung von der folgenden: $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}=2\,\alpha\,b^{(0)}_{\frac{3}{2}}-(1+\alpha^2)\,b^{(1)}_{\frac{3}{2}}$ ab, welche Gleichung man aus den in der vorhergehenden Anmerkung citirten Werthen von $b^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, $b^{(0)}_{\frac{3}{2}}$ und $b^{(1)}_{\frac{3}{2}}$ erhält, so findet man

folglich

$$\boxed{0,1} = -\frac{3\alpha . m'n . [(1+\alpha^2)\, b^{(1)}_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\alpha . b^{(0)}_{-\frac{1}{2}}]}{2(1-\alpha^2)^2},$$

oder

$$\boxed{0,1} = -\frac{3m' . an . [(a^2 + a'^2) . (a, a')' + aa' . (a, a')]}{2(a'^2 - a^2)^2}.$$

Man erhält so sehr einfache Ausdrücke von (o, 1) und von $\boxed{0,1}$, und man kann sich leicht durch die Reihenwerthe von $b^{(0)}_{\frac{3}{2}}$ und von $b^{(1)}_{\frac{3}{2}}$, welche wir im 49sten Satz gegeben haben, versichern, dafs diese Ausdrücke positiv sind, wenn n positiv ist, und negativ, wenn n negativ ist.

Man nenne (o, 2) und $\boxed{0,2}$ das, was (o, 1) und $\boxed{0,1}$ werden, wenn man in ihnen a' und m' in a'' und m'' verwandelt. Man nenne eben so (o, 3) und $\boxed{0,3}$ das, was diese Gröfsen werden, wenn man in ihnen a' und m' in a''' und m''' verwandelt u. s. w. Man bezeichne ferner mit h'', l''; h''', l''' u. s. w. die Werthe von h und l in Beziehung auf die Körper m'', m''' u. s. w., so erhält man durch die vereinigten Wirkungen der verschiedenen Körper m', m'', m''' u. s. w. auf m folgende Gleichungen:

$$\frac{dh}{dt} = [(0,1) + (0,2) + (0,3) + \text{etc.}] . l - \boxed{0,1} . l' - \boxed{0,2} . l'' - \text{etc.};$$

$$\frac{dl}{dt} = -[(0,1) + (0,2) + (0,3) + \text{etc.}] . h + \boxed{0,1} . h' + \boxed{0,2} . h'' + \text{etc.}$$

Es ist klar, dafs $\frac{dh'}{dt}$, $\frac{dl'}{dt}$; $\frac{dh''}{dt}$, $\frac{dl''}{dt}$ u. s. w. durch Ausdrücke, welche denen von $\frac{dh}{dt}$ und $\frac{dl}{dt}$ ähnlich sind, werden bestimmt werden, und welche man

$$b^{(1)}_{\frac{1}{2}} - d . \left(\frac{\alpha^2}{2} . \frac{d\, b^{(1)}_{\frac{1}{2}}}{d\alpha}\right) = \tfrac{3}{2}\alpha\, b^{(0)}_{\frac{3}{2}} - (1+\alpha^2)\, b^{(1)}_{\frac{3}{2}},$$

$$\text{oder} = \frac{\frac{3}{2}\alpha\, b^{(0)}_{-\frac{1}{2}} + 3(1+\alpha^2)\, b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1-\alpha^2)^2}.$$

leicht aus diesen wird herleiten können, wenn man in ihnen allmählig die Gröſsen, welche sich auf m beziehen, in diejenigen verwandelt, welche sich auf m', m'' u. s. w. beziehen, und umgekehrt. Es sey also

$$(1, 0), \quad \boxed{1, 0}; \qquad (1, 2), \quad \boxed{1, 2};$$

das, was

$$(0, 1), \quad \boxed{0, 1}; \qquad (0, 2), \quad \boxed{0, 2}$$

werden, wenn man in ihnen die Gröſsen, welche sich auf m beziehen, in diejenigen verwandelt, welche sich auf m' beziehen und umgekehrt. Es sey ferner

$$(2, 0), \quad \boxed{2, 0}; \qquad (2, 1), \quad \boxed{2, 1};$$

das, was

$$(0, 2), \quad \boxed{0, 2}; \qquad (0, 1), \quad \boxed{0, 1}$$

werden, wenn man in ihnen die Gröſsen, welche sich auf m beziehen, in diejenigen verwandelt, welche sich auf m'' beziehen und umgekehrt; und so ferner. Bezieht man die vorhergehenden Differenzialgleichungen nach und nach auf die Körper m, m', m'' etc., so werden sie zur Bestimmung von h, l, h', l', h'', l'' etc. das folgende System von Gleichungen geben:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dh}{dt} = \quad [(0,1)+(0,2)+(0,3)+\text{etc.}].l - \boxed{0,1}.l' - \boxed{0,2}.l'' - \boxed{0,3}.l''' - \text{etc.} \\
\frac{dl}{dt} = -[(0,1)+(0,2)+(0,3)+\text{etc.}].h + \boxed{0,1}.h' + \boxed{0,2}.h'' + \boxed{0,3}.h''' + \text{etc.} \\
\frac{dh'}{dt} = \quad [(1,0)+(1,2)+(1,3)+\text{etc.}].l' - \boxed{1,0}.l - \boxed{1,2}.l'' - \boxed{1,3}.l''' - \text{etc.} \\
\frac{dl'}{dt} = -[(1,0)+(1,2)+(1,3)+\text{etc.}].h' + \boxed{1,0}.h + \boxed{1,2}.h'' + \boxed{1,3}.h''' + \text{etc.} \\
\frac{dh''}{dt} = \quad [(2,0)+(2,1)+(2,3)+\text{etc.}].l'' - \boxed{2,0}.l - \boxed{2,1}.l' - \boxed{2,3}.l''' - \text{etc.} \\
\frac{dl''}{dt} = -[(2,0)+(2,1)+(2,3)+\text{etc.}].h'' + \boxed{2,0}.h + \boxed{2,1}.h' + \boxed{2,3}.h''' + \text{etc.} \\
\text{etc.}
\end{array}\right\} \quad (A).$$

Die Gröſsen $(0, 1)$ und $(1, 0)$, $\boxed{0, 1}$ und $\boxed{1, 0}$ haben merkwürdige Verhältnisse gegen einander, welche ihre Berechnung erleichtern können, und welche uns in der Folge nützlich seyn werden. Man hat nach dem Vorhergehenden

$$(0, 1) = - \frac{3\, m' \,.\, n a^2 \,.\, a' \,.\, (a, a')'}{4\, (a'^2 - a^2)^2}.$$

Verwandelt man in diesem Ausdruck von (0, 1) die Gröſsen m', n, a in m, n', a' und umgekehrt, so erhält man den Ausdruck von (1, 0), welcher also folgender seyn wird:

$$(1, 0) = - \frac{3\, m \,.\, n' a'^2 \,.\, a \,.\, (a', a)'}{4\, (a'^2 - a^2)^2}.$$

Nun ist aber $(a, a')' = (a', a)'$, weil beide Gröſsen aus der Entwickelung der Function $(a^2 - 2\, a a' \,.\, \cos \theta + a'^2)^{\frac{1}{2}}$ in eine, nach den Kosinus des Winkels θ und seiner Vielfachen geordnete, Reihe entstehen; man hat also

$$(0, 1) \,.\, m \,.\, n' a' = (1, 0) \,.\, m' \,.\, n a.$$

Nun ist ferner, wenn man die Massen m, m' u. s. w. in Vergleichung mit M vernachlässigt,

$$n^2 = \frac{M}{a^3}; \quad n'^2 = \frac{M}{a'^3}; \quad \text{etc.}$$

folglich

$$(0, 1) \,.\, m \,.\, \sqrt{a} = (1, 0) \,.\, m' \,.\, \sqrt{a'};$$

eine Gleichung, durch welche man leicht (1, 0) erhält, wenn man (0, 1) bestimmt hat. Man findet auf eben diese Art

$$\boxed{0, 1} \,.\, m \,.\, \sqrt{a} = \boxed{1, 0} \,.\, m' \,.\, \sqrt{a'}.$$

Diese beiden Gleichungen würden selbst in dem Fall Statt finden, wenn n und n' entgegengesetzte Zeichen hätten, d. h., wenn die zwey Körper m und m' sich in entgegengesetzter Richtung bewegten; dann müſste man aber das Zeichen von n der Wurzelgröſse $\sqrt{a}$, und das Zeichen von n' der Wurzelgröſse $\sqrt{a'}$ geben.

Aus den zwey vorhergehenden Gleichungen entspringen offenbar folgende:

$$(0, 2) \,.\, m \,.\, \sqrt{a} = (2, 0) \,.\, m'' \,.\, \sqrt{a''}; \quad \boxed{0, 2} \,.\, m \,.\, \sqrt{a} = \boxed{2, 0} \,.\, m'' \,.\, \sqrt{a''}; \quad \text{etc.}$$

$$(1, 2) \,.\, m' \,.\, \sqrt{a'} = (2, 1) \,.\, m'' \,.\, \sqrt{a''}; \quad \boxed{1, 2} \,.\, m' \,.\, \sqrt{a'} = \boxed{2, 1} \,.\, m'' \,.\, \sqrt{a''}; \quad \text{etc.}$$

56. Man setze nun, um die Gleichungen (A) des vorhergehenden Satzes zu integriren,

$$h = N \,.\, \sin (g t + \beta); \qquad l = N \,.\, \cos (g t + \beta);$$
$$h' = N' \,.\, \sin (g t + \beta); \qquad l' = N' \,.\, \cos (g t + \beta);$$
etc.

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (A), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} Ng &= [(0,1)+(0,2)+\text{etc.}]\,.\,N - \boxed{0,1}\,.\,N' - \boxed{0,2}\,.\,N'' - \text{etc.}\\ N'g &= [(1,0)+(1,2)+\text{etc.}]\,.\,N' - \boxed{1,0}\,.\,N - \boxed{1,2}\,.\,N'' - \text{etc.}\\ N''g &= [(2,0)+(2,1)+\text{etc.}]\,.\,N'' - \boxed{2,0}\,.\,N - \boxed{2,1}\,.\,N' - \text{etc.}\\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\}\ (B).$$

Nimmt man an, daſs die Anzahl der Körper m, m', m'' etc. gleich i ist, so wird die Anzahl dieser Gleichungen gleich i seyn, und man wird durch die Elimination der beständigen Gröſsen N, N' u. s. w. eine Finalgleichung für g vom Grad i erhalten, welche man leicht auf folgende Art finden wird.

Es sey Φ die Function

$$\begin{aligned} &N^2\,.\,m\,.\,\sqrt{a}\,.\,[g-(0,1)-(0,2)-\text{etc.}]\\ &+N'^2\,.\,m'\,.\,\sqrt{a'}\,.\,[g-(1,0)-(1,2)-\text{etc.}]\\ &+\text{etc.}\\ &+2N\,.\,m\,.\,\sqrt{a}\,.\,[\boxed{0,1}\,.\,N'+\boxed{0,2}\,.\,N''+\text{etc.}]\\ &+2N'\,.\,m'\,.\,\sqrt{a'}\,.\,[\boxed{1,2}\,.\,N''+\boxed{1,3}\,.\,N'''+\text{etc.}]\\ &+2N''\,.\,m''\,.\,\sqrt{a''}\,.\,[\boxed{2,3}\,.\,N'''+\text{etc.}]\\ &+\text{etc.} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (B) werden vermittelst der im vorhergehenden Satz gegebenen Verhältnisse in folgende verwandelt:

$$\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)=0;\quad \left(\frac{d\Phi}{dN'}\right)=0;\quad \left(\frac{d\Phi}{dN''}\right)=0;\quad \text{etc.}$$

Betrachtet man also N, N', N'' u. s. w. als eben so viel veränderliche Gröſsen, so wird Φ ein maximum seyn. Da überdies Φ eine homogene Function dieser veränderlichen Gröſsen von zwey Abmessungen ist, so hat man

$$N\,.\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)+N'\,.\left(\frac{d\Phi}{dN'}\right)+\text{etc.}=2\,\Phi;$$

man hat also $\Phi=0$, vermöge der vorhergehenden Gleichungen.

Jetzt kann man das Maximum der Function Φ auf folgende Art bestimmen. Man differenziire zuerst diese Function in Beziehung auf N, und man substituire in Φ statt N seinen aus der Gleichung $\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)=0$ hergeleiteten Werth, welcher Werth eine linearische Function der Gröſsen N', N'' u. s. w.

seyn wird. Man wird so eine rationale, ganze und homogene Function, von zwey Dimensionen, der Grösen N', N'' u. s. w. erhalten. Es sey diese Function $\phi^{(1)}$. Man differenziire nun $\phi^{(1)}$ in Beziehung auf N', und man substituire in $\phi^{(1)}$ statt N' seinen aus der Gleichung $\left(\frac{d\phi^{(1)}}{dN'}\right) = 0$ hergeleiteten Werth; man erhält so eine homogene Function von der zweyten Abmessung, der Grösen N'', N''' u. s. w. Es sey diese Function $\phi^{(2)}$. Fährt man so fort, so kömmt man auf eine Function $\phi^{(i-1)}$ der Grösse $N^{(i-1)}$ von zwey Abmessungen, welche folglich von der Form $(N^{(i-1)})^2 . k$ seyn wird, wo k eine Function von g und von beständigen Grösen ist. Setzt man das in Beziehung auf $N^{(i-1)}$ genommene Differenzial von $\phi^{(i-1)}$ gleich Null, so erhält man $k = 0$; dieses giebt eine Gleichung für g vom Grad i, deren verschiedene Wurzeln eben so viel verschiedene Systeme für die unbestimmten Grösen N, N', N'' u. s. w. geben werden. Die unbestimmte Gröfse $N^{(i-1)}$ wird die willkührliche Gröfse jedes Systems seyn, und man wird sogleich vermittelst der vorhergehenden in umgekehrter Ordnung genommenen Gleichungen das Verhältnifs der übrigen unbestimmten Grösen N, N' u. s. w. zu dieser unbestimmten Gröfse erhalten, nämlich

$$\left(\frac{d\phi^{(i-2)}}{dN^{(i-2)}}\right) = 0; \qquad \left(\frac{d\phi^{(i-3)}}{dN^{(i-3)}}\right) = 0; \qquad \text{etc.}$$

Es sollen g, g_1, g_2 u. s. w. die i Wurzeln der Gleichung für g seyn; es sey N, N', N'' u. s. w. das System der unbestimmten Grösen in Beziehung auf die Wurzel g; es sey N_1, N'_1, N''_1 u. s. w. das System der unbestimmten Grösen in Beziehung auf die Wurzel g_1, und so ferner, so erhält man durch die bekannte Theorie der linearischen Differenzialgleichungen [129]):

129) Es seyen P und Q Functionen von x, so dafs $dy + Py . dx = Q . dx$ eine allgemeine linearische Differenzialgleichung ist; es seyen ferner α, β, γ . . . Werthe von y, welche der gegebenen Differenzialgleichung Genüge thun, so dafs man

$$d\alpha + P . dx . \alpha = Q . dx$$
$$d\beta + P . dx . \beta = Q . dx$$
$$d\gamma + P . dx . \gamma = Q . dx$$
$$\text{etc.}$$

hat, so erhält man, wenn man diese Gleichungen, deren Anzahl i sey, addirt,

$$d . (\alpha + \beta + \gamma \ldots) + P . dx . (\alpha + \beta + \gamma \ldots) = i . Q . dx,$$

oder $d . \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma \ldots}{i}\right) + P . dx . \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma \ldots}{i}\right) = Q . dx,$

$$h = N \, . \sin(gt + \beta) + N_1 \, . \sin(g_1 t + \beta_1) + N_2 \, . \sin(g_2 t + \beta_2) + \text{etc.};$$
$$h' = N' \, . \sin(gt + \beta) + N'_1 \, . \sin(g_1 t + \beta_1) + N'_2 \, . \sin(g_2 t + \beta_2) + \text{etc.};$$
$$h'' = N'' \, . \sin(gt + \beta) + N''_1 \, . \sin(g_1 t + \beta_1) + N''_2 \, . \sin(g_2 t + \beta_2) + \text{etc.};$$
etc.

wo β, β_1, β_2 u. s. w. willkührliche beständige Gröſsen sind. Verwandelt man in diesen Werthen von h, h', h'' u. s. w. die Sinus in Kosinus, so erhält man die Werthe von l, l', l'' u. s. w. Diese verschiedenen Werthe enthalten zweymal so viel willkührliche Gröſsen, als man Wurzeln g, g_1, g_2 u. s. w. hat; denn jedes System der unbestimmten Gröſsen enthält eine willkührliche Gröſse, und auſserdem giebt es i willkührliche Gröſsen β, β_1, β_2 u. s. w.; diese Werthe sind folglich die vollständigen Integrale der Gleichungen (A) des vorhergehenden Satzes.

Wir haben jetzt nur noch die beständigen Gröſsen N, N_1 u. s. w.; N', N'_1, u. s. w.; β, β_1, β_2 u. s. w. zu bestimmen. Die Beobachtungen geben diese beständigen Gröſsen nicht unmittelbar; man erkennt aber aus ihnen für eine gegebene Epoche die Eccentricitäten der Bahnen e, e', u. s. w., und die Längen ihrer Sonnennähen ϖ, ϖ' u. s. w. und folglich die Werthe von h, h' u. s. w., l, l' u. s. w., aus welchen man die Werthe der vorhergehenden beständigen Gröſsen auf folgende Art erhalten wird. Hierzu bemerken wir, daſs man, wenn man die erste, dritte, fünfte u. s. w. der Differenzialgleichungen (A) des vorhergehenden Satzes respective mit $N \, . \, m \sqrt{a}$, $N' \, . \, m' \sqrt{a'}$ u. s. w. multiplicirt, vermöge der Gleichungen (B) und vermöge der im vorhergehenden Satz zwischen (0, 1) und (1, 0), (0, 2) und (2, 0) u. s. w. gefundenen Verhältnisse folgende Gleichung erhält [130]):

$$N . \frac{dh}{dt} . m . \sqrt{a} + N' . \frac{dh'}{dt} . m' . \sqrt{a'} + N'' . \frac{dh''}{dt} . m'' . \sqrt{a''} + \text{etc.}$$
$$= g . [N . l . m . \sqrt{a} + N' . l' . m' . \sqrt{a'} + N'' . l'' . m'' . \sqrt{a''} + \text{etc.}]$$

Setzt

woraus folgt, daſs der vollständige Werth von y gleich $\frac{\alpha + \beta + \gamma \, . \, . \, .}{i}$ ist. Enthält nun jede der Gröſsen α, β, γ . . . eine beständige Gröſse, so kann man annehmen, daſs der Divisor i in dieser beständigen Gröſse begriffen ist; der vollständige Werth von y ist dann die Summe aller einzelnen Werthe α, β, γ . . .

130) Die erste der Gleichungen (A) mit $N . m . \sqrt{a}$ multiplicirt, giebt

$$N . m . \sqrt{a} . \frac{dh}{dt} = [(0,1) + (0,2) + (0,3) \ldots] \, N . l . m . \sqrt{a} - \boxed{0,1} \, N . l' . m . \sqrt{a} - \boxed{0,2} \, N . l'' . m \sqrt{a} - \ldots$$

Die erste der Gleichungen (B) giebt aber

[(0, 1)

Setzt man in dieser Gleichung statt h, h' u. s. w. l, l' u. s. w., ihre vorhergehenden Werthe, so erhält man, wenn man die Koefficienten der nämlichen Kosinus vergleicht [131]),

$$o = N \cdot N_1 \cdot m \cdot \sqrt{a} + N' \cdot N_1' \cdot m' \cdot \sqrt{a'} + N'' \cdot N_1'' \cdot m'' \cdot \sqrt{a''} + \text{etc.};$$
$$o = N \cdot N_2 \cdot m \cdot \sqrt{a'} + N' \cdot N_2' \cdot m' \cdot \sqrt{a'} + N'' \cdot N_2'' \cdot m'' \cdot \sqrt{a''} + \text{etc.};$$

etc. etc.

Multiplicirt man die vorhergehenden Werthe von h, h' u. s. w. respective mit $N \cdot m \cdot \sqrt{a}$, $N' \cdot m' \cdot \sqrt{a'}$ u. s. w., so erhält man vermöge dieser letztern Gleichungen

$$N \cdot mh \cdot \sqrt{a} + N' \cdot m'h' \cdot \sqrt{a'} + N'' \cdot m''h'' \cdot \sqrt{a''} + \text{etc.}$$
$$= [N^2 \cdot m \cdot \sqrt{a} + N'^2 \cdot m' \cdot \sqrt{a'} + N''^2 \cdot m'' \cdot \sqrt{a''} + \text{etc.}] \cdot \sin(gt + \beta).$$

Man erhält eben so

$$[(0,1) + (0,2) + \ldots] N = Ng + \boxed{0,1}\, N' + \boxed{0,2}\, N'' + \boxed{0,3}\, N''' \ldots$$

Substituirt man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung, so erhält man

$$N.m.\sqrt{a} \cdot \frac{dh}{dt} = g.N.l.m.\sqrt{a} + \boxed{0,1}\, m.\sqrt{a}(N'l - Nl') + \boxed{0,2}\, m.\sqrt{a}(N''l - Nl'') + \ldots (1).$$

Man erhält eben so aus der dritten und fünften der Gleichungen (A) folgende:

$$N'.m'.\sqrt{a'}.\frac{dh'}{dt} = g.N'.l'.m'.\sqrt{a'} + \boxed{1,0}\, m'.\sqrt{a'}(Nl' - N'l) + \boxed{1,2}\, m'\sqrt{a'}(N''l' - N'l'') + \ldots (2)$$

$$N''.m''.\sqrt{a''}.\frac{dh''}{dt} = g.N''.l''.m''.\sqrt{a''} + \boxed{2,0}\, m''.\sqrt{a''}(Nl'' - N''l) + \boxed{2,1}\, m''\sqrt{a''}(N'l'' - N''l') + \ldots (3).$$

Da nun $\boxed{0,1}\, m.\sqrt{a} = \boxed{1,0}\, m'.\sqrt{a'}$ ist, so heben sich in der Summe der drey Gleichungen (1), (2), (3) die beiden in $\boxed{0,1}$ und in $\boxed{1,0}$ multiplicirten Glieder auf; eben so heben sich die beiden in $\boxed{0,2}$ und $\boxed{2,0}$ und die beiden in $\boxed{1,2}$ und $\boxed{2,1}$ multiplicirten Glieder auf. Man findet so für die Summe der drey Gleichungen

$$N.m.\sqrt{a}.\frac{dh}{dt} + N'.m'.\sqrt{a'}.\frac{dh'}{dt} + N''.m''.\sqrt{a''}.\frac{dh''}{dt} = g(N.l.m.\sqrt{a} + N'.l'.m'.\sqrt{a'} + N''.l''.m''.\sqrt{a''}),$$

und man sieht leicht, daſs sich dieser Beweis auf jede Anzahl Gleichungen erstreckt.

131) Der Koefficient von $\cos(g_1 t + \beta_1)$ im ersten Theil der gegebenen Gleichung ist

$$[N.N_1 . m . \sqrt{a} + N'.N_1' . m' . \sqrt{a'} + N'' . N_1'' . m'' . \sqrt{a''} \ldots] . g_1.$$

Der Koefficient desselben Kosinus im zweyten Theil ist gleich

$$[N.N_1 . m . \sqrt{a} + N'.N_1' . m' . \sqrt{a'} + N'' . N_1'' . m'' . \sqrt{a''} \ldots] . g.$$

Die Differenz beider Koefficienten ist gleich Null, folglich

$$[N.N_1 . m . \sqrt{a} + N'.N_1' . m' . \sqrt{a'} + N'' . N_1'' . m'' . \sqrt{a''} \ldots] . (g_1 - g) = o,$$

woraus man, wenn man mit $(g_1 - g)$ dividirt, die erste der im Text gegebenen Gleichungen erhält.

$$N \,.\, ml \,.\, \sqrt{a} + N' \,.\, m'l' \,.\, \sqrt{a'} + N'' \,.\, m''l'' \,.\, \sqrt{a''} + \text{etc.}$$
$$= [N^2 \,.\, m \,.\, \sqrt{a} + N'^2 \,.\, m' \,.\, \sqrt{a'} + N''^2 \,.\, m'' \,.\, \sqrt{a''}] \,.\, \cos\,(gt + \beta).$$

Nimmt man für den Anfang der Zeit t die Epoche an, für welche man die Werthe von h, l, h', l' u. s. w. als bekannt annimmt, so werden die beiden vorhergehenden Gleichungen folgende geben:

$$\text{tang}\,\beta = \frac{N \,.\, hm \,.\, \sqrt{a} + N' \,.\, h'm' \,.\, \sqrt{a'} + N'' \,.\, h''m'' \,.\, \sqrt{a''} + \text{etc.}}{N \,.\, lm \,.\, \sqrt{a} + N' \,.\, l'm' \,.\, \sqrt{a'} + N'' \,.\, l''m'' \,.\, \sqrt{a''} + \text{etc.}}.$$

Dieser Ausdruck von tang β enthält keine unbestimmte Gröſse; denn obgleich die beständigen Gröſsen N, N', N'' u. s. w. von der unbestimmten Gröſse $N^{(i-1)}$ abhängen, so verschwindet sie doch aus dem Ausdruck von tang β, weil ihre Verhältnisse zu dieser unbestimmten Gröſse nach dem Vorhergehenden gegeben sind. Hat man so β bestimmt, so erhält man $N^{(i-1)}$ vermittelst einer der beiden Gleichungen, welche tang β geben, und man wird daraus das System der unbestimmten Gröſsen N, N', N'' u. s. w. in Beziehung auf die Wurzel g herleiten. Verwandelt man in den vorhergehenden Ausdrücken diese Wurzel successive in g_1, g_2, g_3 u. s. w., so erhält man die Werthe der willkührlichen Gröſsen für jede dieser Wurzeln.

Setzt man diese Werthe in die Ausdrücke von h, l, h', l' u. s. w, so erhält man daraus die Werthe der Eccentricitäten der Bahnen e, e' u. s. w., und die Längen der Sonnennähen ϖ, ϖ' u. s. w. vermittelst der Gleichungen

$$e^2 = h^2 + l^2; \qquad e'^2 = h'^2 + l'^2; \qquad \text{etc.}$$
$$\text{tang}\,\varpi = \frac{h}{l}; \qquad \text{tang}\,\varpi' = \frac{h'}{l'}; \;\text{etc.};$$

man hat also

$$e^2 = N^2 + N_1^2 + N_2^2 + \text{etc.} + 2\,N.N_1 \,.\, \cos\,[(g_1 - g) \,.\, t + \beta_1 - \beta]$$
$$+ 2\,N.N_2 \,.\, \cos\,[(g_2 - g)\,t + \beta_2 - \beta] + 2\,N_1 \,.\, N_2 \,.\, \cos\,[(g_2 - g_1)\,t + \beta_2 - \beta_1] + \text{etc.}$$

Diese Gröſse ist beständig kleiner als $(N + N_1 + N_2 + \text{etc.})^2$, wenn die Wurzeln g, g_1, g_2 u. s. w. sämmtlich reell und ungleich sind, wo man aber die Gröſsen N, N_1 u. s. w. positiv nehmen muſs. Man erhält eben so

$$\text{tang}\,\varpi = \frac{N \,.\, \sin\,(gt + \beta) + N_1 \,.\, \sin\,(g_1 t + \beta_1) + N_2 \,.\, \sin\,(g_2 t + \beta_2) + \text{etc.}}{N \,.\, \cos\,(gt + \beta) + N_1 \,.\, \cos\,(g_1 t + \beta_1) + N_2 \,.\, \cos\,(g_2 t + \beta_2) + \text{etc.}};$$

hieraus findet man leicht [132])

132) Da tang $\varpi = \frac{h}{l}$, so ist $\frac{1}{\sqrt{1 + \text{tang}\,\varpi^2}}$ oder $\cos\varpi = \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}}$ und folglich tang ϖ . cos ϖ

$$\operatorname{tang}(\varpi - gt - \beta) = \frac{N_1 . \sin[(g_1 - g)t + \beta_1 - \beta] + N_2 . \sin[(g_2 - g)t + \beta_2 - \beta] + \text{etc.}}{N + N_1 . \cos[(g_1 - g)t + \beta_1 - \beta] + N_2 . \cos[(g_2 - g)t + \beta_2 - \beta] + \text{etc.}}.$$

Wenn die Summe $N_1 + N_2 +$ etc. der Koefficienten der Kosinus dieses Zählers, sämmtlich positiv genommen, kleiner als N ist, so kann $\operatorname{tang}(\varpi - gt - \beta)$ nie unendlich groſs werden: der Winkel $\varpi - gt - \beta$ kann also nie den Viertelkreis erreichen, so daſs die wahre mittlere Bewegung der Sonnenferne in diesem Fall gleich gt ist.

57. Es folgt aus dem Vorhergehenden, daſs die Eccentricitäten der Bahnen und die Lage ihrer groſsen Axen beträchtlichen Aenderungen unterworfen sind, welche nach langen Zeiten die Natur dieser Bahnen ändern können, und deren Perioden bey den Planeten eine groſse Anzahl Jahrhunderte umfassen, weil sie von den Wurzeln g, g_1, g_2 u. s. w. abhängen. Man kann also die Eccentricitäten als veränderliche Ellipticitäten, und die Bewegungen der Sonnennähen als ungleichförmig ansehen. Diese Aenderungen sind in den Satelliten Jupiters sehr beträchtlich, und wir werden in der Folge sehen, daſs sie die sonderbaren Ungleichheiten erklären, welche man in der Bewegung des dritten Satelliten beobachtet hat. Haben aber die Aenderungen der Eccentricitäten Gränzen, und sind die Bahnen beständig wenig vom Kreise verschieden? Die Untersuchung dieser Frage ist wichtig. Wir haben so eben gesehen, daſs die Eccentricität e der Bahn von m immer kleiner ist als die Summe $N + N_1 + N_2 +$ etc. der Koefficienten der Sinus des Ausdrucks von h, sämmtlich positiv

oder $\sin \varpi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + l^2}}$. Man hat ferner

$$\operatorname{tang}(\varpi - gt - \beta) = \frac{\sin \varpi . \cos(gt + \beta) - \sin(gt + \beta) . \cos \varpi}{\cos \varpi . \cos(gt + \beta) + \sin \varpi . \sin(gt + \beta)},$$ oder wenn man statt $\sin \varpi$ und $\cos \varpi$ ihre Werthe setzt und Zähler und Nenner mit $\sqrt{h^2 + l^2}$ multiplicirt,

$$\operatorname{tang}(\varpi - gt - \beta) = \frac{h . \cos(gt + \beta) - l . \sin(gt + \beta)}{l . \cos(gt + \beta) + h . \sin(gt + \beta)}.$$

Das allgemeine Glied von h ist $N_r . \sin(g_r t + \beta_r)$ und von l ist es gleich $N_r . \cos(g_r t + \beta_r)$; substituirt man diese Werthe, so erhält man das allgemeine Glied des Zählers von $\operatorname{tang}(\varpi - gt - \beta)$ gleich

$$N_r [\sin(g_r t + \beta_r) \cos(gt + \beta) - \cos(g_r t + \beta_r) \sin(gt + \beta)],$$

oder $N_r . \sin[(g_r - g)t + \beta_r - \beta]$.

Man findet eben so das allgemeine Glied des Nenners gleich $N_r . \cos[(g_r - g)t + \beta_r - \beta]$.

genommen, wenn die Wurzeln der Gleichung für g alle reell und ungleich sind; und da man angenommen hat, daſs diese Koefficienten sehr kleine Gröſsen sind, so wird der Werth von e immer wenig beträchtlich seyn. Man sieht also, daſs die Bahnen der Körper m, m', m'' u. s. w., wenn man nur auf die Sekulargleichungen Rücksicht nimmt, sich nur mehr oder weniger abplatten, aber sich immer wenig von der Kreisgestalt entfernen werden. Die Lagen ihrer groſsen Axen werden beträchtliche Aenderungen erfahren. Diese Axen werden immer die nämliche Gröſse haben, und die mittlern Bewegungen, welche davon abhängen, werden immer gleichförmig seyn, wie man im 54sten Satz gesehen hat. Die vorhergehenden Resultate, welche sich auf die geringe Eccentricität der Bahnen gründen, werden also ohne Aufhören Statt finden, und können auf alle vergangene und zukünftige Jahrhunderte erstreckt werden, so daſs man behaupten kann, daſs die Planeten- und Satelliten-Bahnen nie beträchtlich eccentrisch gewesen sind und es nie seyn werden, wenigstens wenn man nur auf ihre gegenseitige Wirkung Rücksicht nimmt. Dies würde nicht der Fall seyn, wenn einige der Wurzeln g, g_1, g_2 u. s. w. gleich oder unmöglich wären; die diesen Wurzeln entsprechenden Sinus und Kosinus der Ausdrücke von h, l, h', l', u. s. w. würden sich dann in Kreisbogen oder in Exponentialgröſsen verwandeln, und da diese Gröſsen unbegränzt mit der Zeit wachsen, so würden die Bahnen endlich sehr eccentrisch werden; die Beständigkeit des Planetensystems würde alsdann aufgehoben seyn, und die von uns gefundenen Resultate würden nicht mehr Statt finden. Es ist also sehr wichtig, sich zu versichern, daſs die Wurzeln g, g_1, g_2 u. s. w. alle reell und ungleich sind. Dieses kann man für den Fall der Natur, wo sich die Körper m, m', m'' u. s. w. sämmtlich in derselben Richtung bewegen, auf eine sehr einfache Art beweisen.

Wir wollen die Gleichungen (A) des 55sten Satzes wieder vornehmen. Multiplicirt man die erste mit $m \,.\, \sqrt{a} \,.\, h$, die zweyte mit $m \,.\, \sqrt{a} \,.\, l$, die dritte mit $m' \,.\, \sqrt{a'} \,.\, h'$, die vierte mit $m' \,.\, \sqrt{a'} \,.\, l'$ u. s. w., und addirt man sie, so werden die Koefficienten von hl, $h'l'$, $h''l''$ u. s. w. in dieser Summe gleich Null seyn; der Koefficient von $h'l - hl'$ wird

$\boxed{0,1} \,.\, m \,.\, \sqrt{a} - \boxed{1,0} \,.\, m' \,.\, \sqrt{a'}$ und vermöge der im 55sten Satz gefundenen Gleichung, $\boxed{0,1} \,.\, m \,.\, \sqrt{a} = \boxed{1,0} \,.\, m' \,.\, \sqrt{a'}$, gleich Null seyn. Die Koefficienten von $h''l - hl''$, $h''l' - h'l''$ u. s. w., sind aus dem nämlichen Grunde

gleich Null; die Summe der so vorbereiteten Gleichungen (A) wird daher auf folgende Gleichung reducirt:

$$\left(\frac{hdh + ldl}{dt}\right) . m . \sqrt{a} + \left(\frac{h'dh' + l'dl'}{dt}\right) . m' . \sqrt{a'} + \text{etc.} = 0,$$

und folglich auf folgende:

$$0 = ede . m . \sqrt{a} + e'de' . m' . \sqrt{a'} + \text{etc.}$$

Integrirt man diese Gleichung und bemerkt man, dafs nach dem 54sten Satz die halben grofsen Axen a, a' u. s. w. beständig sind, so erhält man

$$e^2 . m . \sqrt{a} + e'^2 . m' . \sqrt{a'} + e''^2 . m'' . \sqrt{a''} + \text{etc.} = \text{beständige Gröfse (u)}.$$

Da man nun annimmt, dafs sich die Körper m, m', m'' u. s. w. in der nämlichen Richtung bewegen, so müssen die Wurzelgröfsen $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{a''}$ in der vorhergehenden Gleichung positiv genommen werden, wie wir im 55sten Satz gesehen haben; alle Glieder des ersten Theils dieser Gleichung sind also positiv und folglich ist jedes von ihnen kleiner als die beständige Gröfse des zweyten Theils. Nimmt man nun an, dafs die Eccentricitäten zu einer gegebenen Epoche sehr klein sind, so wird diese beständige Gröfse sehr klein seyn; alle Glieder der vorhergehenden Gleichungen werden also immer sehr klein bleiben, und sie können nicht unbegränzt wachsen; die Bahnen werden daher immer sehr nahe kreisförmig bleiben. Der Fall, welchen wir betrachtet haben, findet bey den Planeten und Satelliten des Sonnensystems Statt, weil alle diese Körper in der nämlichen Richtung umlaufen und weil zu der Epoche, wo wir uns befinden, ihre Bahnen wenig eccentrisch sind. Wir bemerken noch, um keinen Zweifel über dieses wichtige Resultat übrig zu lassen, dafs einige der Sinus und Kosinus der Ausdrücke von h, l; h', l' u. s. w. sich in Exponentialgröfsen verwandeln würden, wenn die Gleichung, welche y bestimmt, unmögliche Wurzeln enthielte; der Ausdruck von h würde dann eine endliche Anzahl Glieder von der Form $P . c^{ft}$ enthalten, wo c die Zahl ist, deren hyperbolischer Logarithme gleich Eins ist, und wo P eine reelle Gröfse ist, weil h oder $e . \sin \varpi$ eine reelle Gröfse ist. Es sollen $Q . c^{ft}$, $P' . c^{ft}$, $Q' . c^{ft}$, $P'' . c^{ft}$ u. s. w. die einander entsprechenden Glieder von l, h', l', h'' u. s. w. seyn, wo Q, P', Q', P'' u. s. w. ebenfalls reelle Gröfsen sind; der Ausdruck von e^2 wird das Glied $(P^2 + Q^2) . c^{2ft}$ enthalten; der Ausdruck von e'^2 wird das Glied $(P'^2 + Q'^2) . c^{2ft}$ enthalten und so ferner; der erste Theil der Gleichung (u) wird also folgendes Glied enthalten:

$[(P^2 + Q^2) . m . \sqrt{a} + (P'^2 + Q'^2) . m' . \sqrt{a'} + (P''^2 + Q''^2) . m'' . \sqrt{a''} + \text{etc.}] . c^{2ft}$.
Nimmt man an, daſs c^{ft} die gröſste der Exponentialgröſsen ist, welche h, l, h', l' u. s. w. enthalten, das heiſst diejenige, wo f am beträchtlichsten ist, so wird c^{2ft} die gröſste der Exponentialgröſsen seyn, welche das erste Glied der vorhergehenden Gleichung enthält. Das vorhergehende Glied kann also durch kein anderes Glied dieses ersten Theils aufgehoben werden; der Koefficient von c^{2ft} muſs folglich gleich Null seyn, damit dieser Theil einer beständigen Gröſse gleich seyn kann; dieses giebt

$$o = (P^2 + Q^2) . m . \sqrt{a} + (P'^2 + Q'^2) . m' . \sqrt{a'} + (P''^2 + Q''^2) . m'' . \sqrt{a''} + \text{etc.}$$

Wenn $\sqrt{a}$, $\sqrt{a'}$, $\sqrt{a''}$ u. s. w. dasselbe Zeichen haben, oder, welches dasselbe ist, wenn die Körper m, m', m'' u. s. w. in der nämlichen Richtung umlaufen, so ist diese Gleichung unmöglich, wofern man nicht $P = o$, $Q = o$, $P' = o$ u. s. w. setzt. Hieraus folgt, daſs die Gröſsen h, l, h', l' u. s. w. keine Exponentialgröſsen enthalten, und daſs folglich die Gleichung für g keine unmögliche Wurzeln hat.

Wenn diese Gleichung gleiche Wurzeln hätte, so würden die Ausdrücke von h, l, h', l' u. s. w. bekanntlich Kreisbogen enthalten, und man würde im Ausdruck von h eine endliche Anzahl Glieder von der Form $P . t^r$ haben. Es sollen $Q . t^r$, $P' . t^r$, $Q' . t^r$ u. s. w. die entsprechenden Glieder von l, h', l' u. s. w. seyn, wo P, Q, P', Q' u. s. w. reelle Gröſsen sind, so wird der erste Theil der Gleichung (u) das Glied

$$[(P^2 + Q^2) . m . \sqrt{a} + (P'^2 + Q'^2) . m' . \sqrt{a'} + (P''^2 + Q''^2) . m'' . \sqrt{a''} + \text{etc.}] . t^{2r}$$

enthalten. Wenn t^r die höchste Potenz von t ist, welche die Werthe von h, l, h', l' u. s. w. enthalten, so wird t^{2r} die höchste Potenz von t im ersten Theil der Gleichung (u) seyn; man muſs also, damit dieser Theil einer beständigen Gröſse gleich seyn kann,

$$o = (P^2 + Q^2) . m . \sqrt{a} + (P'^2 + Q'^2) . m' . \sqrt{a'} + \text{etc.}$$

haben; dies giebt $P = o$, $Q = o$, $P' = o$, $Q' = o$ u. s. w. Die Ausdrücke von h, l, h', l' u. s. w. enthalten also weder Exponentialgröſsen noch Kreisbogen, und folglich sind alle Wurzeln der Gleichung für g reell und ungleich.

Das System der Bahnen von m, m', m'' u. s. w. ist also in Rücksicht auf ihre Eccentricitäten vollkommen beständig; diese Bahnen oscilliren nur um einen mittlern Zustand der Ellipticität, wovon sie sich, mit Beybehaltung

ihrer grofsen Axen nur wenig entfernen. Ihre Eccentricitäten sind beständig folgendem Gesetz unterworfen: die Summe ihrer Quadrate, jedes mit der Masse des Körpers und mit der Quadratwurzel der grofsen Axe multiplicirt, ist immer dieselbe Gröfse.

58. Hat man nach dem Vorhergehenden die Werthe von e und von ϖ bestimmt, so substituire man sie in alle Glieder der in den vorhergehenden Sätzen gegebenen Ausdrücke von r, $\frac{dv}{dt}$ und s, wobey man die Glieder, welche die Zeit t aufserhalb der Zeichen Sinus und Kosinus enthalten, wegläfst. Der elliptische Theil dieser Ausdrücke wird eben derselbe seyn, welcher im Fall der nicht gestöhrten Bahn Statt findet, mit dem einzigen Unterschiede, dafs die Eccentricität und die Lage der Sonnennähe veränderlich sind. Da aber die Perioden dieser Aenderungen wegen der Kleinheit der Massen m, m', m'' u. s. w. in Vergleichung mit M sehr lang sind, so wird man diese Aenderungen während eines grofsen Zeitraums der Zeit proportional setzen können, welcher Zeitraum für die Planeten auf mehrere Jahrhunderte vor und nach der zum Anfang der Zeit angenommenen Epoche erstreckt werden kann. Es ist zum astronomischen Gebrauch nützlich, die Sekularänderungen der Eccentricitäten und der Sonnennähen der Bahnen in dieser Gestalt zu haben. Man kann sie leicht aus den vorhergehenden Formeln schliefsen. Die Gleichung $e^2 = h^2 + l^2$ giebt nämlich $ede = hdh + ldl$; nun ist aber, wenn man nur auf die Wirkung von m' Rücksicht nimmt, vermöge des 55sten Satzes

$$\frac{dh}{dt} = (0, 1) \,.\, l - \boxed{0, 1} \,.\, l';$$

$$\frac{dl}{dt} = -(0, 1) . h + \boxed{0, 1} \,.\, h',$$

folglich

$$\frac{ede}{dt} = \boxed{0, 1} \,.\, (h'l - hl');$$

man hat aber $h'l - hl' = ee' \sin(\varpi' - \varpi)$, folglich

$$\frac{de}{dt} = \boxed{0, 1} \,.\, e' \,.\, \sin(\varpi' - \varpi).$$

Nimmt man also nur auf die gegenseitige Wirkung der verschiedenen Körper m', m'' u. s. w. Rücksicht, so hat man

$$\frac{de}{dt} = \boxed{0,1} \,.\, e' \,.\, \sin(\varpi' - \varpi) + \boxed{0,2} \,.\, e'' \,.\, \sin(\varpi'' - \varpi) + \text{etc.};$$

$$\frac{de'}{dt} = \boxed{1,0} \,.\, e \,.\, \sin(\varpi - \varpi') + \boxed{1,2} \,.\, e'' \,.\, \sin(\varpi'' - \varpi') + \text{etc.};$$

$$\frac{de''}{dt} = \boxed{2,0} \,.\, e \,.\, \sin(\varpi - \varpi'') + \boxed{2,1} \,.\, e' \,.\, \sin(\varpi' - \varpi'') + \text{etc.};$$

etc.

Differenziirt man die Gleichung tang $\varpi = \frac{h}{l}$, so erhält man

$$e^2 \,.\, d\varpi = l \,.\, dh - h \,.\, dl.$$

Betrachtet man nur die Wirkung von m' und substituirt man statt dh und dl ihre Werthe, so erhält man

$$e^2 \,.\, \frac{d\varpi}{dt} = (0,1) \,.\, (h^2 + l^2) - \boxed{0,1} \,.\, (hh' + ll');$$

dieses giebt

$$\frac{d\varpi}{dt} = (0,1) - \boxed{0,1} \,.\, \frac{e'}{e} \,.\, \cos(\varpi' - \varpi).$$

Man erhält also vermöge der gegenseitigen Wirkungen der Körper m, m', m'' u. s. w.

$$\frac{d\varpi}{dt} = (0,1) + (0,2) + \text{etc.} - \boxed{0,1} \,.\, \frac{e'}{e} \,.\, \cos(\varpi' - \varpi) - \boxed{0,2} \,.\, \frac{e''}{e} \,.\, \cos(\varpi'' - \varpi) - \text{etc.}$$

$$\frac{d\varpi'}{dt} = (1,0) + (1,2) + \text{etc.} - \boxed{1,0} \,.\, \frac{e}{e'} \,.\, \cos(\varpi - \varpi') - \boxed{1,2} \,.\, \frac{e''}{e'} \,.\, \cos(\varpi'' - \varpi') - \text{etc.}$$

$$\frac{d\varpi''}{dt} = (2,0) + (2,1) + \text{etc.} - \boxed{2,0} \,.\, \frac{e}{e''} \,.\, \cos(\varpi - \varpi'') - \boxed{2,1} \,.\, \frac{e'}{e''} \,.\, \cos(\varpi' - \varpi'') - \text{etc.}$$

etc.

Multiplicirt man diese Werthe von $\frac{de}{dt}$, $\frac{de'}{dt}$ u. s. w. $\frac{d\varpi}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$ u. s. w. mit der Zeit t, so erhält man die Differenzialausdrücke der Sekularänderungen der Eccentricitäten und der Sonnennähen, und obgleich diese Ausdrücke nur dann streng genau sind, wenn t unendlich klein ist, so können sie doch für die Planeten während eines langen Zeitraums gebraucht werden. Ihre Vergleichung mit genauen und von einander entfernten Beobachtungen ist das genaueste Mittel, die Massen der Planeten, welche keine Satelliten haben, zu bestimmen.

men. Für irgend eine Zeit t ist die Eccentricität e gleich $e + t \cdot \frac{de}{dt} + \frac{t^2}{1.2} \cdot \frac{d^2e}{dt^2} + \text{etc.}$, wo e, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d^2e}{dt^2}$ etc. sich auf den Anfang der Zeit oder auf die Epoche beziehen. Differenziirt man den vorhergehenden Werth von $\frac{de}{dt}$, und bemerkt man, daſs a, a' u. s. w. beständig sind, so erhält man die Werthe von $\frac{d^2e}{dt^2}$, $\frac{d^3e}{dt^3}$ etc.; man kann also die vorhergehende Reihe und durch das nämliche Verfahren die Reihe für ϖ so weit fortsetzen, als man will; es wird aber für die Planeten hinreichend seyn, selbst bey Vergleichung der ältesten Beobachtungen, die auf uns gekommen sind, auf das Quadrat der Zeiten in den Reihenausdrücken von e, e' u. s. w. ϖ, ϖ' u. s. w. Rücksicht zu nehmen.

59. Wir wollen nun die Gleichungen für die Lage der Bahnen betrachten. Hierzu werden wir die Gleichungen (3) und (4) des 53sten Satzes wieder vornehmen:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{m' \cdot n}{4} \cdot a^2 \cdot a' \cdot B^{(1)} \cdot (q - q');$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{m' \cdot n}{4} \cdot a^2 \cdot a' \cdot B^{(1)} \cdot (p - p').$$

Man hat nach dem 49sten Satz

$$a^2 \cdot a' \cdot B^{(1)} = \alpha^2 \cdot b^{(1)}_{\frac{3}{2}};$$

man hat ferner nach dem nämlichen Satz

$$b^{(1)}_{\frac{3}{2}} = -\frac{3 \cdot b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{(1 - \alpha^2)^2};$$

folglich

$$\frac{m' \cdot n}{4} \cdot a^2 \cdot a' \cdot B^{(1)} = -\frac{3m' \cdot n \cdot \alpha^2 \cdot b^{(1)}_{-\frac{1}{2}}}{4 \cdot (1 - \alpha^2)^2}.$$

Den zweyten Theil dieser Gleichung haben wir im 55sten Satz mit (0, 1) bezeichnet; folglich ist

$$\frac{dp}{dt} = (0, 1) \cdot (q' - q);$$

$$\frac{dq}{dt} = (0, 1) \cdot (p - p');$$

hieraus kann man leicht schliefsen, dafs die Werthe von q, p, q', p' u. s. w. durch das folgende System von Differenzialgleichungen bestimmt werden:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{dq}{dt} = [(0,1) + (0,2) + \text{etc.}] \cdot p - (0,1) \cdot p' - (0,2) \cdot p'' - \text{etc.} \\
\frac{dp}{dt} = -[(0,1) + (0,2) + \text{etc.}] \cdot q + (0,1) \cdot q' + (0,2) \cdot q'' + \text{etc.} \\
\frac{dq'}{dt} = [(1,0) + (1,2) + \text{etc.}] \cdot p' - (1,0) \cdot p - (1,2) \cdot p'' - \text{etc.} \\
\frac{dp'}{dt} = -[(1,0) + (1,2) + \text{etc.}] \cdot q' + (1,0) \cdot q + (1,2) \cdot q'' + \text{etc.} \\
\frac{dq''}{dt} = [(2,0) + (2,1) + \text{etc.}] \cdot p'' - (2,0) \cdot p - (2,1) \cdot p' - \text{etc.} \\
\frac{dp''}{dt} = -[(2,0) + (2,1) + \text{etc.}] \cdot q'' + (2,0) \cdot q + (2,1) \cdot q' + \text{etc.} \\
\text{etc. etc.}
\end{array}\right\} (C).$$

Dieses System von Gleichungen ist dem der Gleichungen (A) im 55sten Satze ähnlich; es würde gänzlich mit ihm übereinstimmen, wenn man in den Gleichungen (A) h, l, h', l' u. s. w. in q, p, q', p' u. s. w. verwandelte, und wenn man $\boxed{0,1} = (0, 1)$; $\boxed{1,0} = (1, 0)$ setzte. Die Analysis, deren wir uns im 56sten Satze bedient haben, um die Gleichungen (A) zu integriren, kann also auf die Gleichungen (C) angewendet werden. Man setze daher

$$\begin{array}{l}
q = N \cdot \cos(gt + \beta) + N_1 \cdot \cos(g_1 t + \beta_1) + N_2 \cdot \cos(g_2 t + \beta_2) + \text{etc.}; \\
p = N \cdot \sin(gt + \beta) + N_1 \cdot \sin(g_1 t + \beta_1) + N_2 \cdot \sin(g_2 t + \beta_2) + \text{etc.}; \\
q' = N' \cdot \cos(gt + \beta) + N'_1 \cdot \cos(g_1 t + \beta_1) + N'_2 \cdot \cos(g_2 t + \beta_2) + \text{etc.}; \\
p' = N' \cdot \sin(gt + \beta) + N'_1 \cdot \sin(g_1 t + \beta_1) + N'_2 \cdot \sin(g_2 t + \beta_2) + \text{etc.}; \\
\text{etc. etc.,}
\end{array}$$

so erhält man, nach Satz 56., eine Gleichung für g vom Grade i, deren verschiedene Wurzeln g, g_1, g_2 u. s. w. sind. Man sieht leicht, dafs eine dieser Wurzeln gleich Null ist; denn es ist klar, dafs man den Gleichungen (C) Genüge thut, wenn man in ihnen p, p', p'' u. s. w., so wie auch q, q', q'' u. s. w. einander gleich und beständig setzt. Dieses erfordert, dafs eine der Wurzeln der Gleichung für g gleich Null ist, wodurch sie bis zum Grad $i - 1$ erniedrigt wird. Die willkührlichen Gröfsen N, N_1, N' u. s. w., β, β_1 u. s. w. werden

sich durch die im 56sten Satze erklärte Methode bestimmen lassen. Man findet endlich durch die Analysis des 57sten Satzes

$$\text{beständige Größe} = (p^2 + q^2) \cdot m \cdot \sqrt{a} + (p'^2 + q'^2) \cdot m' \cdot \sqrt{a'} + \text{etc.},$$

woraus man, wie im angeführten Satze, schliessen wird, dass die Ausdrücke von p, q, p', q' u. s. w. weder Kreisbogen noch Exponentialgrössen enthalten, wenn die Körper m, m', m'' u. s. w. in der nämlichen Richtung umlaufen, und dass also alle Wurzeln der Gleichung für g reell und ungleich sind.

Man kann noch zwey andere Integrale der Gleichungen (C) erhalten. Denn wenn man die erste dieser Gleichungen mit $m \cdot \sqrt{a}$, die dritte mit $m' \cdot \sqrt{a'}$, die fünfte mit $m'' \cdot \sqrt{a''}$, u. s. w. multiplicirt, so erhält man vermittelst der im 55sten Satz gefundenen Verhältnisse

$$0 = \frac{dq}{dt} \cdot m \cdot \sqrt{a} + \frac{dq'}{dt} \cdot m' \cdot \sqrt{a'} + \text{etc.};$$

dieses giebt, wenn man integrirt,

$$\text{beständige Größe} = q \cdot m \cdot \sqrt{a} + q' \cdot m' \cdot \sqrt{a'} + \text{etc.} \quad (1).$$

Auf eben die Art findet man

$$\text{beständige Größe} = p \cdot m \cdot \sqrt{a} + p' \cdot m' \cdot \sqrt{a'} + \text{etc.} \quad (2).$$

Man nenne ϕ die Neigung der Bahn von m gegen die feste Ebene, und θ die Länge des aufsteigenden Knotens dieser Bahn auf derselben Ebene; die Breite von m wird sehr nahe $\text{tang}\,\phi \cdot \sin(nt + \varepsilon - \theta)$ seyn. Vergleicht man diesen Werth mit dem folgenden: $q \cdot \sin(nt + \varepsilon) - p \cdot \cos(nt + \varepsilon)$, so erhält man

$$p = \text{tang}\,\phi \cdot \sin\theta; \qquad q = \text{tang}\,\phi \cdot \cos\theta;$$

hieraus erhält man

$$\text{tang}\,\phi = \sqrt{p^2 + q^2}; \qquad \text{tang}\,\theta = \frac{p}{q}.$$

Man wird also die Neigung der Bahn von m und die Lage seines Knotens vermittelst der Werthe von p und von q erhalten. Bemerkt man successive mit einem Strich, mit zwey Strichen u. s. w. die Werthe von $\text{tang}\,\phi$ und $\text{tang}\,\theta$ für die Körper m', m'' u. s. w., so erhält man die Neigungen der Bahnen von m', m'' u. s. w., und die Lage ihrer Knoten vermittelst der Grössen p', q', p'', q'' u. s. w.

Die Grösse $\sqrt{p^2 + q^2}$ ist kleiner, als die Summe $N + N_1 + N_2 +$ etc. der Koefficienten der Sinus des Ausdrucks von q. Da nun diese Koefficienten sehr klein sind, weil die Bahn wenig gegen die feste Ebene geneigt ist, so wird

ihre Neigung gegen diese Ebene beständig wenig beträchtlich seyn. Hieraus folgt, daſs das System der Bahnen in Beziehung auf ihre Neigungen eben so beständig ist, als in Beziehung auf ihre Eccentricitäten. Man kann also die Neigungen der Bahnen als veränderliche, zwischen bestimmten Gränzen eingeschlossene, Gröſsen, und die Bewegungen der Knoten als ungleichförmig ansehen. Diese Aenderungen sind in den Satelliten Jupiters sehr beträchtlich, und wir werden in der Folge sehen, daſs sie die sonderbaren Erscheinungen erklären, welche man in der Neigung der Bahn des vierten Satelliten beobachtet hat.

Aus den vorhergehenden Ausdrücken von p und q' flieſst folgender Lehrsatz:

Man stelle sich einen Kreis vor, dessen Neigung gegen die feste Ebene, N, und wovon $gt + \beta$ die Länge des aufsteigenden Knotens sey; auf diesem ersten Kreis stelle man sich einen zweyten Kreis vor, welcher gegen ihn um N_1 geneigt sey, und wovon $g_1 t + \beta_1$ die Länge seines Durchschnitts mit dem ersten Kreise sey; auf diesem zweyten Kreis bilde man sich einen dritten Kreis ein, welcher gegen ihn um N_2 geneigt, und wovon $g_2 t + \beta_2$ die Länge seines Durchschnitts mit dem zweyten Kreis sey und so ferner; dann wird die Lage des letzten Kreises die Lage der Bahn von m seyn.

Wendet man dieselbe Construction auf die Ausdrücke von h und von l im 56sten Satze an, so sieht man, daſs die Tangente der Neigung des letzten Kreises gegen die feste Ebene, der Eccentricität der Bahn von m gleich ist, und daſs die Länge des Durchschnitts dieses Kreises mit derselben Ebene der Länge der Sonnennähe der Bahn von m gleich ist.

60. Es ist zum astronomischen Gebrauch nützlich, die Differenzialänderungen der Knoten und der Neigungen der Bahnen zu haben. Hierzu wollen wir die Gleichungen des vorhergehenden Satzes wieder vornehmen:

$$\text{tang}\,\phi = \sqrt{p^2 + q^2}\,; \qquad \text{tang}\,\theta = \frac{p}{q}.$$

Differenziirt man sie, so erhält man [133])

133) Nach Satz 51. ist $p = \text{tang}\,\varphi\,.\,\sin\theta$, und $q = \text{tang}\,\varphi\,.\,\cos\theta$; differenziirt man, so erhält man

$$dp = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}\,.\,\sin\theta + d\theta\,.\,\cos\theta\,.\,\text{tang}\,\varphi\,;$$

$$dq = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2}\,.\,\cos\theta - d\theta\,.\,\sin\theta\,.\,\text{tang}\,\varphi\,;$$

$$d\phi = dp \,.\, \sin\theta + dq \,.\, \cos\theta;$$

$$d\theta = \frac{dp \,.\, \cos\theta - dq \,.\, \sin\theta}{\text{tang}\,\phi}.$$

Substituirt man statt dp und dq ihre durch die Gleichungen (C) des vorigen Satzes gegebenen Werthe, so erhält man

$$\frac{d\phi}{dt} = (0,1) \,.\, \text{tang}\,\phi' \,.\, \sin(\theta - \theta') + (0,2) \,.\, \text{tang}\,\phi'' \,.\, \sin(\theta - \theta'') + \text{etc.};$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -[(0,1) + (0,2) + \text{etc.}] + (0,1) \,.\, \frac{\text{tang}\,\phi'}{\text{tang}\,\phi} \,.\, \cos(\theta - \theta')$$

$$+ (0,2) \,.\, \frac{\text{tang}\,\phi''}{\text{tang}\,\phi} \,.\, \cos(\theta - \theta'') + \text{etc.};$$

man erhält auf die nämliche Art

$$\frac{d\phi'}{dt} = (1,0) \,.\, \text{tang}\,\phi \,.\, \sin(\theta' - \theta) + (1,2) \,.\, \text{tang}\,\phi'' \,.\, \sin(\theta'' - \theta') + \text{etc.};$$

$$\frac{d\theta'}{dt} = -[(1,0) + (1,2) + \text{etc.}] + (1,0) \,.\, \frac{\text{tang}\,\phi}{\text{tang}\,\phi'} \,.\, \cos(\theta' - \theta)$$

$$+ (1,2) \,.\, \frac{\text{tang}\,\phi''}{\text{tang}\,\phi'} \,.\, \cos(\theta' - \theta'') + \text{etc.};$$

etc.

Die Astronomen beziehen die himmlischen Bewegungen auf die bewegliche Bahn der Erde; wir beobachten sie in der That von der Ebene dieser Bahn aus, und es ist also wichtig, die Aenderungen der Knoten und Neigungen der Bahnen in Beziehung auf die Ekliptik zu wissen. Wir wollen daher annehmen, daſs man die Differenzialänderungen der Knoten und der Neigungen der Bahnen in Beziehung auf die Bahn eines der Körper m, m', m'' u. s. w., z. B. auf die Bahn von m, bestimmen will. Es ist klar, daſs $q \,.\, \sin(n't + \varepsilon') - p \,.\, \cos(n't + \varepsilon')$ die Breite von m' über der festen Ebene seyn würde,

multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $\sin\theta$, die zweyte mit $\cos\theta$, so giebt ihre Summe

$$dp \,.\, \sin\theta + dq \,.\, \cos\theta = \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2};$$

multiplicirt man ferner die erste mit $\cos\theta$, die zweyte mit $-\sin\theta$ und addirt sie, so erhält man

$$dp \,.\, \cos\theta - dq \,.\, \sin\theta = d\theta \,.\, \text{tang}\,\varphi.$$

Man kann in der ersten Gleichung den Divisor $\cos\varphi^2$ weglassen, da er von der Einheit bloſs um Gröſsen von der Ordnung der Quadrate der Neigung verschieden ist.

wenn er sich auf der Bahn von m bewegte. Seine Breite über dieselbe Ebene ist $q' \,.\, \sin(n't + \varepsilon') - p' \,.\, \cos(n't + \varepsilon')$. Nun ist aber der Unterschied dieser zwey Breiten sehr nahe die Breite von m' über die Bahn von m. Nennt man also $\Phi_{,}'$ die Neigung und $\theta_{,}'$ die Länge des Knotens der Bahn von m' auf der Bahn von m, so erhält man vermöge des Vorhergehenden

$$\text{tang}\, \Phi_{,}' = \sqrt{(p' - p)^2 + (q' - q)^2}\,; \qquad \text{tang}\, \theta_{,}' = \frac{p' - p}{q' - q}.$$

Nimmt man die Ebene der Bahn von m zu einer gegebenen Epoche als feste Ebene an, so wird man für diese Epoche $p = 0$, $q = 0$ haben; die Differenziale dp und dq werden aber nicht gleich Null seyn; man erhält also

$$d\Phi_{,}' = (dp' - dp) \,.\, \sin\theta' + (dq' - dq) \,.\, \cos\theta';$$

$$d\theta_{,}' = \frac{(dp' - dp) \,.\, \cos\theta' - (dq' - dq) \,.\, \sin\theta'}{\text{tang}\, \Phi'}.$$

Substituirt man statt dp, dq, dp', dq' u. s. w. ihre durch die Gleichungen (C) des vorhergehenden Satzes gegebenen Werthe, so erhält man

$$\frac{d\Phi_{,}'}{dt} = [(1,2) - (0,2)] \,.\, \text{tang}\, \Phi'' \,.\, \sin(\theta' - \theta'')$$
$$+ [(1,3) - (0,3)] \,.\, \text{tang}\, \Phi''' \,.\, \sin(\theta' - \theta''') + \text{etc.};$$

$$\frac{d\theta_{,}'}{dt} = -[(1,0) + (1,2) + (1,3) + \text{etc.}] - (0,1)$$
$$+ [(1,2) - (0,2)] \,.\, \frac{\text{tang}\, \Phi''}{\text{tang}\, \Phi'} \,.\, \cos(\theta' - \theta'')$$
$$+ [(1,3) - (0,3)] \,.\, \frac{\text{tang}\, \Phi'''}{\text{tang}\, \Phi'} \,.\, \cos(\theta' - \theta''') + \text{etc.}$$

Aus diesen Ausdrücken kann man leicht die Aenderungen der Knoten und der Neigungen der Bahnen der übrigen Körper m'', m''' u. s. w. gegen die bewegliche Bahn von m herleiten.

61. Die vorher gefundenen Integrale der Differenzialgleichungen, welche die Aenderungen der Elemente der Bahnen bestimmen, sind nur genähert, und die Verhältnisse, welche sie zwischen allen diesen Elementen geben, haben nur in der Voraussetzung Statt, daſs die Eccentricitäten der Bahnen und ihre Neigungen sehr klein sind. Die Integrale (4), (5), (6) und (7), auf welche wir im 9ten Satz gekommen sind, geben aber dieselben Verhältnisse, was auch immer die Eccentricitäten und die Neigungen seyn mögen. Hierzu bemerken wir, daſs

$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}$ die doppelte Fläche ist, welche die Projection des Radius vectors des Planeten m auf der Ebene der x und der y beschreibt. Vernachlässigt man aber in der elliptischen Bewegung die Masse der Planeten in Vergleichung mit der Masse der Sonne, welche als Einheit angenommen wird, so hat man nach dem 19ten und 20sten Satz für die Ebene der Bahn von m

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = \sqrt{a.(1-e^2)}.$$

Um die Fläche in der Bahn auf die feste Ebene zu beziehen, muſs man sie mit dem Kosinus der Neigung ϕ dieser Bahn gegen diese Ebene multipliciren; man hat also in Beziehung auf diese Ebene

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = \cos\phi\,.\sqrt{a.(1-e^2)} = \sqrt{\frac{a.(1-e^2)}{1+\text{tang}\,\phi^2}}.$$

Man erhält auf dieselbe Art

$$\frac{x'dy' - y'dx'}{dt} = \sqrt{\frac{a'.(1-e'^2)}{1+\text{tang}\,\phi'^2}};$$

etc.

Man kann diese Werthe von $x dy - y dx$, $x'dy' - y'dx'$ u. s. w. gebrauchen, wenn man die Ungleichheiten oder Stöhrungen der Bewegung der Planeten auſser Acht läſst, wofern man die Elemente e, e' u. s. w. ϕ, ϕ' u. s. w. als veränderlich vermöge der Sekulargleichungen ansieht. Die Gleichung (4) des 9ten Satzes giebt alsdann

$$c = m\,.\sqrt{\frac{a.(1-e^2)}{1+\text{tang}\,\phi^2}} + m'\,.\sqrt{\frac{a'.(1-e'^2)}{1+\text{tang}\,\phi'^2}} + \text{etc.}$$

$$+ \Sigma\,.\,m\,.\,m'\,.\left[\frac{(x'-x).(dy'-dy) - (y'-y).(dx'-dx)}{dt}\right].$$

Vernachlässigt man das letzte Glied, welches immer von der Ordnung mm' ist, so erhält man

$$c = m\,.\sqrt{\frac{a.(1-e^2)}{1+\text{tang}\,\phi^2}} + m'\,.\sqrt{\frac{a'.(1-e'^2)}{1+\text{tang}\,\phi'^2}} + \text{etc.}$$

Die Werthe von e, e' u. s. w., ϕ, ϕ' u. s. w., müssen also immer der vorher-

gehenden Gleichung Genüge thun, was auch immer für Aenderungen die Folge der Zeit in ihnen vermöge der Sekulargleichungen hervorbringt.

Vernachlässigt man die sehr kleinen Gröfsen von der Ordnung e^4 oder $e^2\,\phi^2$, so giebt diese Gleichung

$$c = m\,.\,\sqrt{a} + m'\,.\,\sqrt{a'} + \text{etc.} - \tfrac{1}{2}\,m\,.\,\sqrt{a}\,.\,(e^2 + \text{tang}\,\phi^2)$$
$$- \tfrac{1}{2}\,m'\,.\,\sqrt{a'}\,.\,(e'^2 + \text{tang}\,\phi'^2) - \text{etc.},$$

und folglich $m\,.\,\sqrt{a} + m'\,.\,\sqrt{a'} + \text{etc.}$ gleich einer beständigen Gröfse, wenn man die Quadrate von e, e', ϕ u. s. w. vernachlässigt. Wir haben vorher gesehen, dafs a, a' u. s. w. einzeln beständig sind, wenn man nur auf die erste Potenz der stöhrenden Kräfte Rücksicht nimmt; die vorhergehende Gleichung giebt also, wenn man die sehr kleinen Gröfsen von der Ordnung e^4 oder $e^2\,\phi^2$ vernachlässigt,

$$\text{beständige Gröfse} = m.\sqrt{a}.(e^2 + \text{tang}\,\phi^2) + m'.\sqrt{a'}.(e'^2 + \text{tang}\,\phi'^2) + \text{etc.}$$

Nimmt man an, dafs die Bahnen fast kreisförmig und wenig gegen einander geneigt sind, so werden die Sekularänderungen der Eccentricitäten nach Satz 55. durch Differenzialgleichungen bestimmt, welche von den Neigungen unabhängig sind, und welche folglich dieselben Werthe haben, welche sie haben würden, wenn die Bahnen alle in einer Ebene wären; in dieser Voraussetzung ist aber $\phi = 0$, $\phi' = 0$ u. s. w.; die vorhergehende Gleichung verwandelt sich so in folgende:

$$\text{beständige Gröfse} = e^2\,m\,.\,\sqrt{a} + e'^2\,m'\,.\,\sqrt{a'} + e''^2\,m''\,.\,\sqrt{a''} + \text{etc.},$$

eine Gleichung, auf welche wir schon im 57sten Satz gekommen sind.

Die Sekularänderungen der Neigungen der Bahnen sind eben so, nach Satz 59., vermittelst Differenzialgleichungen bestimmt, welche von den Eccentricitäten unabhängig sind, und welche folglich dieselben Werthe haben, welche sie haben würden, wenn die Bahnen kreisförmig wären; in dieser Voraussetzung ist aber $e = 0$, $e' = 0$ u. s. w.; man hat also

$$\text{best. Gröfse} = m.\sqrt{a}.\text{tang}\,\phi^2 + m'.\sqrt{a'}.\text{tang}\,\phi'^2 + m''.\sqrt{a''}.\text{tang}\,\phi''^2 + \text{etc.}$$

eine Gleichung, auf welche wir schon im 59sten Satz gekommen sind.

Setzt man, wie in diesem letztern Satze,

$$p = \text{tang}\,\phi\,.\,\sin\theta; \qquad q = \text{tang}\,\phi\,.\,\cos\theta,$$

so kann man sich leicht versichern, dafs der Kosinus der Neigung der Bahn von

m gegen die Ebene der x und der z gleich

$$\frac{q}{\sqrt{1 + \text{tang}\,\phi^2}}$$

seyn wird, wenn ϕ die Neigung dieser Bahn gegen die Ebene der x und der y, und θ die Länge seines aufsteigenden Knotens, von der Axe der x an gezählt, ist. Multiplicirt man diese Grösse mit $\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}$ oder mit seinem Werth $\sqrt{a.(1 - e^2)}$, so erhält man den Werth von $\frac{x\,dz - z\,dx}{dt}$. Die Gleichung (5) des 9ten Satzes giebt also, wenn man die Grössen von der Ordnung m^2 vernachlässigt,

$$c' = m \,.\, q \,.\, \sqrt{\frac{a.(1 - e^2)}{1 + \text{tang}\,\phi^2}} + m' \,.\, q' \,.\, \sqrt{\frac{a'.(1 - e'^2)}{1 + \text{tang}\,\phi'^2}} + \text{etc.}$$

Man findet eben so, dass die Gleichung (6) des 9ten Satzes folgende giebt:

$$c'' = m \,.\, p \,.\, \sqrt{\frac{a.(1 - e^2)}{1 + \text{tang}\,\phi^2}} + m' \,.\, p' \,.\, \sqrt{\frac{a'.(1 - e'^2)}{1 + \text{tang}\,\phi'^2}} + \text{etc.}$$

Vernachlässigt man in diesen beiden Gleichungen die Grössen von der Ordnung e^3 oder $e^2\,\phi$, so verwandeln sie sich in

$$\text{beständige Grösse} = m \,.\, q \,.\, \sqrt{a} + m' \,.\, q' \,.\, \sqrt{a'} + \text{etc.}$$
$$\text{beständige Grösse} = m \,.\, p \,.\, \sqrt{a} + m' \,.\, p' \,.\, \sqrt{a'} + \text{etc.},$$

Gleichungen, auf welche wir schon im 59sten Satz gekommen sind.

Die Gleichung (7) des 9ten Satzes giebt endlich, wenn man bemerkt, dass nach Satz 18. $\frac{\mu}{a} = \frac{2\mu}{r} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$ ist, und wenn man die Grössen von der Ordnung $m.m'$ vernachlässigt,

$$\text{beständige Grösse} = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \text{etc.}$$

Diese verschiedenen Gleichungen finden Statt, wenn man auf die Ungleichheiten von sehr langen Perioden, welche auf die Elemente der Bahnen von m, m' u. s. w. Einfluss haben können, Rücksicht nimmt. Wir haben im 54sten Satze bemerkt, dass das Verhältniss der mittlern Bewegungen dieser Körper in den Ausdrücken für die grossen Axen der als veränderlich angenommenen Bahnen,

Ungleichheiten bringen kann, deren Argumente proportional mit der Zeit, aber mit vieler Langsamkeit, wachsen, und welche sehr beträchtlich werden können, weil sie durch die Koefficienten der Zeit t in diesen Argumenten dividirt sind. Es ist aber sichtbar, daſs die Integrale (4), (5), (6) und (7) des 9ten Satzes immer die Verhältnisse, welche wir zwischen diesen Elementen gefunden haben, geben werden, wenn man nur auf diejenigen Glieder Rücksicht nimmt, welche ähnliche Theiler haben, und wenn man die Bahnen als Ellipsen betrachtet, deren Elemente sich im Verhältniſs dieser Glieder ändern; weil die Glieder von der Ordnung mm', welche wir in diesen Integralen bey Bestimmung dieser Verhältnisse vernachlässigt haben, die sehr kleinen Koefficienten, wovon wir so eben sprechen, nicht als Theiler haben, oder sie enthalten sie wenigstens nur mit einer Potenz der stöhrenden Kräfte multiplicirt, welche höher ist als diejenige, welche wir betrachten.

62. Wir haben im 21sten und 22sten Satze des ersten Buchs bemerkt, daſs es in der Bewegung eines Systems von Körpern eine unveränderliche Ebene giebt, welche immer parallel mit sich selbst bleibt, und welche man zu allen Zeiten leicht durch die folgende Bedingung finden kann, daſs die Summe der Massen des Systems, jede mit der Projection der von ihrem Radius vector in einer gegebenen Zeit beschriebenen Fläche multiplicirt, ein Gröſstes ist. Die Bestimmung dieser Ebene ist vorzüglich in der Theorie des Sonnensystems wichtig, in Rücksicht auf die eigenen Bewegungen der Sterne und der Ekliptik, welche den Astronomen die genaue Bestimmung der himmlischen Bewegungen sehr erschweren. Nennt man γ die Neigung dieser unveränderlichen Ebene gegen die Ebene der x und der y, und Π die Länge ihres aufsteigenden Knotens, so folgt aus dem, was wir im 21sten und 22sten Satze des ersten Buchs bewiesen haben, daſs

$$\operatorname{tang}\gamma \,.\, \sin \Pi = \frac{c''}{c}; \qquad \operatorname{tang}\gamma \,.\, \cos \Pi = \frac{c'}{c}$$

ist, und folglich

$$\operatorname{tang}\gamma.\sin\Pi = \frac{m.\sqrt{a.(1-e^2)}\,.\sin\phi.\sin\theta + m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}.\sin\phi'.\sin\theta' + \text{etc.}}{m.\sqrt{a.(1-e^2)}\,.\cos\phi + m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}\,.\cos\phi' + \text{etc.}};$$

$$\operatorname{tang}\gamma.\cos\Pi = \frac{m.\sqrt{a.(1-e^2)}\,.\sin\phi.\cos\theta + m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}\,.\sin\phi'.\cos\theta' + \text{etc.}}{m.\sqrt{a.(1-e^2)}\,.\cos\phi + m'.\sqrt{a'.(1-e'^2)}\,.\cos\phi' + \text{etc.}}.$$

Man wird sehr leicht vermittelst dieser Werthe die beiden Winkel γ und Π bestimmen. Man sieht, daſs man zur Bestimmung der unveränderlichen Ebene die Massen der Kometen und die Elemente ihrer Bahnen kennen müſste; glücklicherweise scheinen diese Massen sehr klein zu seyn, so daſs man ohne merklichen Irrthum ihre Wirkung auf die Planeten vernachlässigen kann; die Zeit allein kann uns aber über diesen Punkt Licht geben. Man kann hier bemerken, daſs die Werthe von p, q, p', q' u. s. w. in Beziehung auf diese unveränderliche Ebene keine beständigen Glieder enthalten; denn es ist aus den Gleichungen (C) des 59sten Satzes sichtbar, daſs diese Glieder sowohl für p, p', p'' u. s. w. als auch für q, q', q'' u. s. w. dieselben Werthe haben; und da die beständigen Gröſsen in den ersten Theilen der Gleichungen (1) und (2) des 59sten Satzes gleich Null sind, so verschwinden die beständigen Glieder aus den Ausdrücken von p, p' u. s. w. q, q' u. s. w. vermöge dieser Gleichungen.

Wir wollen nun die Bewegung zweyer Bahnen in der Voraussetzung betrachten, daſs sie gegen einander um irgend einen Winkel geneigt sind. Man hat vermöge des 61sten Satzes

$$c' = \sin\phi \,.\, \cos\theta \,.\, m \,.\, \sqrt{a\,.\,(1-e^2)} + \sin\phi' \,.\, \cos\theta' \,.\, m' \,.\, \sqrt{a'.(1-e'^2)};$$

$$c'' = \sin\phi \,.\, \sin\theta \,.\, m \,.\, \sqrt{a\,.\,(1-e^2)} + \sin\phi' \,.\, \sin\theta' \,.\, m' \,.\, \sqrt{a'.(1-e'^2)}.$$

Man nehme an, daſs die feste Ebene, auf welche man die Bewegung der Bahnen bezieht, die unveränderliche Ebene ist, wovon wir gesprochen haben, und für welche die beständigen Gröſsen der ersten Theile dieser Gleichungen gleich Null sind, wie man im 21sten und 22sten Satze des ersten Buchs gesehen hat; da die Winkel ϕ und ϕ' positiv sind, so geben die vorhergehenden Gleichungen die folgenden:

$$m \,.\, \sqrt{a\,.\,(1-e^2)} \,.\, \sin\phi = m' \,.\, \sqrt{a'.(1-e'^2)} \,.\, \sin\phi';$$

$$\sin\theta = -\sin\theta'; \qquad \cos\theta = -\cos\theta';$$

hieraus folgt $\theta' = \theta +$ den halben Umkreis. Die Knoten der Bahnen liegen also in derselben geraden Linie; aber der aufsteigende Knoten der einen fällt mit dem niedersteigenden Knoten der andern zusammen, so daſs die gegenseitige Neigung der beiden Bahnen gleich $\phi + \phi'$ ist.

Man hat nach dem 61sten Satz

$$c = m . \sqrt{a.(1-e^2)} . \cos \phi + m' . \sqrt{a'.(1-e'^2)} . \cos \phi'.$$

Verbindet man diese Gleichung mit der vorhergehenden zwischen sin ϕ und sin ϕ', so erhält man

$$2 m c . \cos \phi . \sqrt{a.(1-e^2)} = c^2 + m^2 . a . (1-e^2) - m'^2 . a' . (1-e'^2).$$

Nimmt man die Bahnen als Kreise oder wenigstens als so wenig eccentrisch an, daſs man die Quadrate ihrer Eccentricitäten vernachlässigen kann, so wird die vorhergehende Gleichung die Gröſse ϕ beständig geben; aus demselben Grunde wird ϕ' beständig seyn; die Neigungen der Ebenen der Bahnen gegen die feste Ebene und unter einander, werden folglich alsdann beständig seyn, und diese drey Ebenen werden immer einen gemeinschaftlichen Durchschnitt haben. Es folgt hieraus, daſs die mittlere augenblickliche Aenderung dieses Durchschnitts immer dieselbe ist, weil sie nur eine Function dieser Neigungen seyn kann. Wenn sie sehr klein sind, so wird man leicht durch den 60sten Satz und durch die vorhergehende Gleichung zwischen sin ϕ und sin ϕ' finden, daſs die Bewegung dieses Durchschnitts für die Zeit t gleich $-[(0,1)+(1,0)].t$ ist.

Die Lage der unveränderlichen Ebene, auf welche wir die Bewegung der Bahnen bezogen haben, läſst sich leicht für jeden Augenblick bestimmen; denn man braucht nur den Winkel der gegenseitigen Neigung der Bahnen in zwey Winkel ϕ und ϕ' so zu theilen, daſs die vorhergehende Gleichung zwischen sin ϕ und sin ϕ' Statt hat. Bezeichnet man also diese gegenseitige Neigung durch ϖ, so hat man

$$\operatorname{tang} \phi = \frac{m' . \sqrt{a'.(1-e'^2)} . \sin \varpi}{m . \sqrt{a.(1-e^2)} + m' . \sqrt{a'.(1-e'^2)} . \cos \varpi}.$$

Achtes Kapitel.

Zweyte Näherungsmethode für die himmlischen Bewegungen.

63. Wir haben im zweyten Kapitel gesehen, dafs die Koordinaten der himmlischen Körper durch Differenzialgleichungen des zweyten Grades bestimmt werden, wenn man sie auf die Brennpunkte der Hauptkräfte, welche auf sie wirken, bezieht. Wir haben diese Gleichungen im dritten Kapitel integrirt, dabey aber nur auf die Hauptkräfte Rücksicht genommen, und wir haben gezeigt, dafs in diesem Fall die Bahnen Kegelschnitte sind, deren Elemente die willkührlichen Gröfsen sind, welche die Integrationen einführen. Da die stöhrenden Kräfte nur geringe Ungleichheiten zu der elliptischen Bewegung hinzusetzen, so ist es natürlich, dafs man die gestöhrte Bewegung der himmlischen Körper auf die Gesetze dieser Bewegung zurückzuführen trachtet. Setzt man zu den Differenzialgleichungen der elliptischen Bewegung die kleinen Glieder, welche durch die stöhrenden Kräfte entstehen, und wendet man auf sie die im 45sten Satze erklärte Näherungsmethode an, so wird man die himmlischen Bewegungen in geschlossenen Bahnen noch als elliptisch betrachten können; die Elemente dieser Bahnen werden aber veränderlich seyn, und man wird ihre Aenderungen durch diese Methode erhalten. Da nun die Differenzialgleichungen der Bewegung von der zweyten Ordnung sind, so folgt hieraus, dafs nicht nur ihre endlichen Integrale, sondern auch ihre unendlich kleinen Integrale der ersten Ordnungen eben dieselben sind, als wenn die Ellipsen unveränderlich wären; so dafs man die Elemente der elliptischen Bewegung als beständig ansehen kann, wenn man die endlichen Gleichungen dieser Bewegung differenziirt. Es folgt noch aus derselben Methode, dafs man die Differenzialgleichungen der ersten Ord-

nung dieser Bewegung so differenziiren kann, daſs man nur die Elemente der Bahnen und die ersten Differenziale der Koordinaten als veränderlich ansieht, wofern man nur statt der zweyten Differenziale dieser Koordinaten den Theil ihrer Werthe substituirt, welcher aus den stöhrenden Kräften entspringt. Diese Resultate können unmittelbar aus der Betrachtung der elliptischen Bewegung hergeleitet werden.

Wir wollen uns hierzu eine Ellipse vorstellen, welche durch einen Planeten und durch das Element der krummen Linie, welche er beschreibt, geht, und in deren Brennpunkt der Mittelpunkt der Sonne ist. Der Planet würde unveränderlich diese Ellipse beschreiben, wenn die stöhrenden Kräfte auf ihn zu wirken aufhörten. Seine Elemente sind während des Augenblicks dt unveränderlich; sie ändern sich aber von einem Augenblick zum andern. Es sey also $V = 0$ eine endliche Gleichung der unveränderlichen Ellipse, wo V eine Function der rechtwinklichten Koordinaten x, y, z und der Parameter c, c' u. s. w. ist, welche Functionen der Elemente der elliptischen Bewegung sind. Diese Gleichung hat noch für die veränderliche Ellipse Statt; aber die Parameter c, c' u. s. w. werden nicht mehr beständig seyn. Da jedoch diese Ellipse dem Elementartheilchen der vom Planeten während des Augenblicks dt beschriebenen krummen Linie angehört, so wird die Gleichung $V = 0$ für den ersten und letzten Punkt des Elementartheilchens Statt haben, wenn man c, c' u. s. w. als beständig ansieht. Man kann also diese Gleichung zum erstenmal so differenziiren, daſs man in ihr nur x, y, z sich ändern läſst; dies giebt

$$0 = \left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{dz}\right) dz \quad (i).$$

Man sieht so den Grund, warum man die endlichen Gleichungen der unveränderlichen Ellipse dann, wenn man die Ellipse als veränderlich ansieht, zum erstenmal so differenziiren kann, daſs man die Parameter als beständige Gröſsen behandelt. Aus demselben Grunde hat jede Differenzialgleichung der ersten Ordnung für die unveränderliche Ellipse, ebenfalls für die veränderliche Ellipse Statt; denn es sey $V' = 0$ eine Gleichung dieser Ordnung, wo V' eine Function von x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ und der Parameter c, c' u. s. w. ist, so ist klar, daſs alle diese Gröſsen für die veränderliche Ellipse und für die unveränderliche Ellipse, welche mit ihr während des Augenblicks dt übereinstimmt, dieselben sind.

Betrachten wir nun den Planeten am Ende des Augenblicks dt oder am Anfange des folgenden Augenblicks, so wird die Function V von der dem Augenblick dt zugehörenden Ellipse zu der folgenden Ellipse sich nur durch die Aenderung der Parameter ändern, weil die Koordinaten x, y, z, welche dem Ende des ersten Augenblicks angehören, für diese zwey Ellipsen dieselben sind; da also die Function V gleich Null ist, so hat man

$$o = \left(\frac{dV}{dc}\right) . dc + \left(\frac{dV}{dc'}\right) dc' + \text{etc.} \quad (i').$$

Man kann diese Gleichung auch aus der Gleichung $V = o$ so herleiten, daſs man in ihr zugleich x, y, z, c, c' u. s. w. sich ändern läſst; zieht man dann von dieser Differenzialgleichung die Gleichung (i) ab, so erhält man die Gleichung (i').

Differenziirt man die Gleichung (i), so erhält man eine neue Gleichung für dc, dc' u. s. w., welche mit der Gleichung (i') zur Bestimmung der Parameter c, c' u. s. w. dienen wird. Auf diese Art haben die Geometer, welche sich mit der Theorie der himmlischen Stöhrungen zuerst beschäftigten, die Aenderungen der Knoten und der Neigungen der Bahnen zu bestimmen gesucht; man kann aber dieses Differenziiren auf folgende Art vereinfachen.

Man betrachte im Allgemeinen die Differenzialgleichung der ersten Ordnung $V' = o$, welche Gleichung, wie man so eben gesehen hat, für die veränderliche Ellipse, und für die unveränderliche Ellipse, die während des Augenblicks dt mit der erstern zusammenfällt, übereinstimmt, auf gleiche Art Statt hat. Diese Gleichung wird auch noch im folgenden Augenblick beiden Ellipsen angehören, aber mit dem Unterschiede, daſs c, c' u. s. w. für die unveränderliche Ellipse unverändert bleiben, für die veränderliche Ellipse aber sich ändern. Es sey V'' der Werth, den V' erhält, wenn die Ellipse unveränderlich angenommen wird; es sey $V_{\prime}'$ der Werth derselben Function für den Fall der veränderlichen Ellipse. Es ist klar, daſs man, um V'' zu erhalten, die Koordinaten x, y, z in V', welche sich auf den Anfang des ersten Augenblicks dt beziehen, in diejenigen verwandeln muſs, welche sich auf den Anfang des zweyten Zeittheilchens beziehen; man muſs ferner die ersten Differenziale dx, dy, dz respective um die Gröſsen d^2x, d^2y, d^2z, welche sich auf die unveränderliche Ellipse beziehen, vermehren, wobey man das Element der Zeit dt als beständig ansieht.

Eben so muſs man in V', um $V_{/}'$ zu erhalten, die Koordinaten x, y, z in diejenigen verwandeln, welche sich auf den Anfang des zweyten Augenblicks beziehen, und welche noch in beiden Ellipsen dieselben sind; man muſs ferner dx, dy, dz respective um die Gröſsen d^2x, d^2y, d^2z vermehren; man muſs endlich die Parameter c, c' u. s. w. in $c + dc$, $c' + dc'$ u. s. w. verwandeln.

Die Werthe von d^2x, d^2y, d^2z sind in den zwey Ellipsen nicht dieselben; sie werden im Fall der veränderlichen Ellipse um die Gröſsen, welche aus den Perturbationskräften entstehen, vermehrt. Man sieht also, daſs die zwey Functionen V'' und $V_{/}'$ nur dadurch von einander verschieden sind, daſs in der zweyten die Parameter c, c' u. s. w. um dc, dc' u. s. w., und die auf die unveränderliche Ellipse sich beziehenden Werthe von d^2x, d^2y, d^2z um die aus den Perturbationskräften entspringenden Gröſsen vermehrt sind. Man wird also $V_{/}' - V''$ erhalten, wenn man V' in der Voraussetzung differenziirt, daſs x, y, z beständig und dx, dy, dz, c, c' u. s. w. veränderlich sind, wofern man nur in diesem Differenzial statt d^2x, d^2y, d^2z bloſs die Theile ihrer Werthe setzt, welche von den Perturbationskräften herrühren.

Substituirt man nun in die Function $V'' - V'$ statt d^2x, d^2y, d^2z ihre auf die elliptische Bewegung sich beziehenden Werthe, so wird man eine Function von x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, c, c' etc. erhalten, welche im Fall der unveränderlichen Ellipse gleich Null ist; diese Function ist also auch im Fall der veränderlichen Ellipse gleich Null. Man hat aber offenbar im letztern Fall $V_{/}' - V' = 0$, weil diese Gleichung das Differenzial der Gleichung $V' = 0$ ist: zieht man von ihr die Gleichung $V'' - V' = 0$ ab, so erhält man $V_{/}' - V'' = 0$. Man kann also in diesem Fall die Gleichung $V' = 0$ so differenziiren, daſs man in ihr nur dx, dy, dz, c, c' u. s. w. sich ändern läſst, wofern man nur statt d^2x, d^2y, d^2z die Theile ihrer Werthe substituirt, welche von den Perturbationskräften herrühren. Diese Resultate sind vollkommen identisch mit denen, auf welche wir im 45sten Satze durch bloſse analytische Betrachtungen gekommen sind; wir haben aber geglaubt, daſs wir sie wegen ihrer Wichtigkeit hier von neuem aus der Betrachtung der elliptischen Bewegung herleiten müssen.

64. Dieses vorausgesetzt, wollen wir die Gleichungen (P) des 46sten Satzes wieder vornehmen:

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mu.x}{r^3} + \left(\frac{dR}{dx}\right); \\ o &= \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mu.y}{r^3} + \left(\frac{dR}{dy}\right); \\ o &= \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu.z}{r^3} + \left(\frac{dR}{dz}\right); \end{aligned}\right\} \quad (P)$$

Setzt man $R = o$, so erhält man die Gleichungen der elliptischen Bewegung, welche wir im dritten Kapitel integrirt haben. Wir sind im 18ten Satz auf folgende sieben Integrale gekommen:

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{xdy - ydx}{dt}; \quad c' = \frac{xdz - zdx}{dt}; \quad c'' = \frac{ydz - zdy}{dt}; \\ o &= f + x.\left[\frac{\mu}{r} - \left(\frac{dy^2 + dz^2}{dt^2}\right)\right] + \frac{ydy\,.\,dx}{dt^2} + \frac{zdz\,.\,dx}{dt^2}; \\ o &= f' + y.\left[\frac{\mu}{r} - \left(\frac{dx^2 + dz^2}{dt^2}\right)\right] + \frac{xdx\,.\,dy}{dt^2} + \frac{zdz\,.\,dy}{dt^2}; \\ o &= f'' + z.\left[\frac{\mu}{r} - \left(\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right)\right] + \frac{xdx\,.\,dz}{dt^2} + \frac{ydy\,.\,dz}{dt^2}; \\ o &= \frac{\mu}{a} - \frac{2\mu}{r} + \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right); \end{aligned}\right\} \quad (p).$$

Da diese Integrale die willkührlichen Gröſsen durch Functionen der Koordinaten und ihrer ersten Differenziale geben, so haben sie eine sehr bequeme Gestalt, um die Variationen dieser willkührlichen Gröſsen zu bestimmen. Differenziirt man die drey ersten Integrale so, daſs man nach dem vorhergehenden Satz nur die Parameter c, c', c'' und die ersten Differenziale der Koordinaten als veränderlich ansieht, so erhält man

$$dc = \frac{xd^2y - yd^2x}{dt}; \quad dc' = \frac{xd^2z - zd^2x}{dt}; \quad dc'' = \frac{yd^2z - zd^2y}{dt}.$$

Substituirt man statt d^2x, d^2y, d^2z die Theile ihrer Werthe, welche aus den Perturbationskräften entspringen, und welche vermöge der Differenzialgleichungen (P) gleich $-dt^2\left(\frac{dR}{dx}\right)$, $-dt^2.\left(\frac{dR}{dy}\right)$, $-dt^2.\left(\frac{dR}{dz}\right)$ sind, so findet man

$$dc = dt \,.\, \left[y \,.\, \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \,.\, \left(\frac{dR}{dy}\right)\right];$$

$$dc' = dt \,.\, \left[z \,.\, \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \,.\, \left(\frac{dR}{dz}\right)\right];$$

$$dc'' = dt \,.\, \left[z \,.\, \left(\frac{dR}{dy}\right) - y \,.\, \left(\frac{dR}{dz}\right)\right].$$

Man hat im 18ten und 19ten Satz gesehen, dafs die Parameter c, c', c'' drey Elemente der elliptischen Bahn bestimmen, nämlich die Neigung ϕ der Bahn gegen die Ebene der x und der y, und die Länge θ seines Knotens vermittelst der Gleichungen

$$\text{tang}\ \phi = \frac{\sqrt{c'^2 + c''^2}}{c}; \qquad \text{tang}\ \theta = \frac{c''}{c'},$$

und den halben Parameter $a.(1 - e^2)$ der Ellipse vermittelst der Gleichung

$$\mu a \,.\, (1 - e^2) = c^2 + c'^2 + c''^2.$$

Diese Gleichungen haben auch im Fall der veränderlichen Ellipse Statt, wofern man nur c, c', c'' durch die vorhergehenden Differenzialgleichungen bestimmt. Man erhält so den Parameter der veränderlichen Ellipse, ihre Neigung gegen die feste Ebene der x und der y und die Lage ihres Knotens.

Die drey ersten der Gleichungen (p) haben uns im 19ten Satz das endliche Integral $0 = c''x - c'y + cz$ gegeben; diese Gleichung wird also auch für die gestöhrte Ellipse Statt haben, so wie auch ihr erstes Differenzial $0 = c''dx - c'dy + cdz$, welches so genommen worden ist, dafs man c, c', c'' als beständig ansieht.

Differenziirt man das vierte, fünfte und sechste der Integrale (p) so, dafs man nur die Parameter f, f', f'' und die Differenziale dx, dy, dz als veränderlich ansieht; substituirt man hernach statt d^2x, d^2y, d^2z die Gröfsen

$$- dt^2 \,.\, \left(\frac{dR}{dx}\right); \quad - dt^2 \,.\, \left(\frac{dR}{dy}\right); \quad - dt^2 \,.\, \left(\frac{dR}{dz}\right),$$ so erhält man [134])

134) Differenziirt man die Gleichung für f so, dafs man nur die zweyten Differenziale der Koordinaten behält, und die ersten Differenziale dieser Gröfsen und also auch dr wegläfst, so findet man

$$0 = df - \frac{2x\,dy \,.\, d^2y}{dt^2} - \frac{2x\,dz \,.\, d^2z}{dt^2} + \frac{y \,.\, d^2y \,.\, dx}{dt^2} + \frac{ydy \,.\, d^2x}{dt^2} + \frac{z \,.\, d^2z \,.\, dx}{dt^2} + \frac{zdz \,.\, d^2x}{dt^2},$$

oder

$$df = (xdy - ydx) \,.\, \frac{d^2y}{dt^2} + xdy \,.\, \frac{d^2y}{dt^2} + (xdz - zdx) \,.\, \frac{d^2z}{dt^2} + xdz \,.\, \frac{d^2z}{dt^2} - ydy \,.\, \frac{d^2x}{dt^2} - zdz \,.\, \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$df = dy \cdot \left[y \cdot \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \cdot \left(\frac{dR}{dy}\right)\right] + dz \cdot \left[z \cdot \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \cdot \left(\frac{dR}{dz}\right)\right]$$

$$+ (ydx - xdy) \cdot \left(\frac{dR}{dy}\right) + (zdx - xdz) \cdot \left(\frac{dR}{dz}\right);$$

$$df' = dx \cdot \left[x \cdot \left(\frac{dR}{dy}\right) - y \cdot \left(\frac{dR}{dx}\right)\right] + dz \cdot \left[z \cdot \left(\frac{dR}{dy}\right) - y \cdot \left(\frac{dR}{dz}\right)\right]$$

$$+ (xdy - ydx) \cdot \left(\frac{dR}{dx}\right) + (zdy - ydz) \cdot \left(\frac{dR}{dz}\right);$$

$$df'' = dx \cdot \left[x \cdot \left(\frac{dR}{dz}\right) - z \cdot \left(\frac{dR}{dx}\right)\right] + dy \cdot \left[y \cdot \left(\frac{dR}{dz}\right) - z \cdot \left(\frac{dR}{dy}\right)\right]$$

$$+ (xdz - zdx) \cdot \left(\frac{dR}{dx}\right) + (ydz - zdy) \cdot \left(\frac{dR}{dy}\right).$$

Differenziirt man endlich das siebente der Integrale (p) auf dieselbe Art, so erhält man die Variation der halben groſsen Axe a vermittelst der Gleichung [135])

$$d \cdot \frac{\mu}{a} = 2 \cdot \mathrm{d}R,$$

wo das Differenzial dR sich bloſs auf die Koordinaten x, y, z des Körpers m bezieht.

Die Werthe von f, f', f'' bestimmen die Länge der auf der festen Ebene projicirten Sonnennähe der Bahn, und das Verhältniſs der Eccentricität zur hal-

oder

$$df = (xdy - ydx) \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + dy \cdot \left(x \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - y \cdot \frac{d^2x}{dt^2}\right) + (xdz - zdx) \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + dz \cdot \left(x \cdot \frac{d^2z}{dt^2} - z \cdot \frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

Substituirt man nun statt der zweyten Differenziale ihre Werthe, so erhält man die im Text gegebene Gleichung. Man erhält aus ihr die Gleichung für df', wenn man x in y und y in x verwandelt, weil man durch diese Verwandlung die Gleichung für f' aus der Gleichung für f erhält. Aus eben diesem Grunde findet man die Gleichung für df'' aus der für df', wenn man y in z und z in y verwandelt.

135) Man hat nämlich: $0 = d \cdot \frac{\mu}{a} + 2\left[dx \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + dy \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + dz \cdot \frac{d^2z}{dt^2}\right]$,

oder $0 = d \cdot \frac{\mu}{a} - 2\left[dx \cdot \left(\frac{dR}{dx}\right) + dy \cdot \left(\frac{dR}{dy}\right) + dz \cdot \left(\frac{dR}{dz}\right)\right]$. Die in Klammern eingeschlossene Gröſse ist offenbar das Differenzial von R so genommen, daſs man bloſs die Koordinaten des Körpers m, nämlich x, y, z als veränderlich ansieht; man hat dies Differenzial im Vorhergehenden durch dR bezeichnet; die obige Gleichung verwandelt sich so in folgende:

$0 = d \cdot \frac{\mu}{a} - 2\,\mathrm{d}R.$

ben grofsen Axe; denn wenn I die Länge der Projection der Sonnennähe ist, so hat man nach Satz 19.

$$\text{tang}\ I = \frac{f'}{f},$$

und wenn e das Verhältnifs der Eccentricität zur halben grofsen Axe ist, so hat man nach demselben Satz

$$\mu e = \sqrt{f^2 + f'^2 + f''^2}.$$

Man kann auch dieses Verhältnifs daraus bestimmen, dafs man den halben Parameter $a.(1 - e^2)$ durch die halbe grofse Axe a dividirt; zieht man den Quotienten von der Einheit ab, so erhält man den Werth von e^2.

Die Integrale (p) haben im 19ten Satz durch Eliminiren das endliche Integral $0 = \mu r - h^2 + fx + f'y + f''z$ gegeben: diese Gleichung wird auch noch für die gestöhrte Ellipse Statt haben, und sie bestimmt für jeden Augenblick die Natur der veränderlichen Ellipse. Man kann sie so differenziiren, dafs man f, f', f'' als beständig ansieht; dies giebt

$$0 = \mu . dr + f . dx + f' . dy + f'' . dz.$$

Die halbe grofse Axe a giebt die mittlere Bewegung von m, oder genauer das, was in der gestöhrten Bahn der mittlern Bewegung in der ungestöhrten Bahn entspricht. Denn man hat nach dem 20sten Satz $n = a^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\mu}$; bezeichnet man ferner die mittlere Bewegung von m mit ξ, so hat man in der unveränderlichen elliptischen Bahn $d\xi = n dt$; diese Gleichung hat auch in der veränderlichen Ellipse Statt, weil sie eine Differenzialgleichung von der ersten Ordnung ist. Differenziirt man sie, so erhält man $d^2\xi = dn . dt$; man hat aber

$$dn = \frac{3an}{2\mu} . d . \frac{\mu}{a} = \frac{3an . \mathrm{d}R}{\mu},$$

folglich

$$d^2\xi = \frac{3an . dt . \mathrm{d}R}{\mu},$$

und wenn man integrirt

$$\xi = \frac{3}{\mu} . \int\int an dt . \mathrm{d}R.$$

Man hat endlich im 18ten Satz gesehen, dafs die Integrale (p) nur fünf verschiedenen Integralen gleich gelten, und dafs sie unter den 7 Parametern c, c', c'', f, f', f'' und a die zwey Bedingungsgleichungen geben:

$$0 = f c'' - f' c' + f'' c;$$

$$0 = \frac{\mu}{a} + \frac{f^2 + f'^2 + f''^2 - \mu^2}{c^2 + c'^2 + c''^2}.$$

Diese Gleichungen haben auch noch in der veränderlichen Ellipse Statt, wofern nur die Parameter nach dem Vorhergehenden bestimmt worden sind. Man kann sich übrigens leicht davon a posteriori versichern.

Wir haben fünf Elemente der gestöhrten Bahn bestimmt, nämlich ihre Neigung, die Lage ihrer Knoten, ihre halbe groſse Axe, welche die mittlere Bewegung giebt, ihre Eccentricität und die Lage der Sonnennähe. Wir haben nur noch das sechste Element der elliptischen Bewegung zu bestimmen, nämlich dasjenige, welches in der ungestöhrten Ellipse der Lage von m zu einer gegebenen Epoche entspricht. Hierzu wollen wir den Ausdruck von dt des 16ten Satzes wieder vornehmen:

$$\frac{dt \,.\, \sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv\,(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{[1 + e \cos(v - \varpi)]^2}.$$

Die Entwickelung dieser Gleichung in eine Reihe hat uns im angeführten Satz folgende Gleichung gegeben:

$$n\,dt = dv\,[1 + E^{(1)} \,.\, \cos(v - \varpi) + E^{(2)} \,.\, \cos 2(v - \varpi) + \text{etc.}].$$

Integrirt man diese Gleichung in der Voraussetzung, daſs ε und ϖ beständig sind, so erhält man

$$\int n\,dt + \varepsilon = v + E^{(1)} \,.\, \sin(v - \varpi) + \frac{E^{(2)}}{2} \,.\, \sin 2(v - \varpi) + \text{etc.},$$

wo ε eine willkührliche beständige Gröſse ist. Dieses Integral bezieht sich auf die unveränderliche Ellipse. Will man es auf die gestöhrte Ellipse erstrecken, so muſs sein Differenzial, wenn man alles, selbst die willkührlichen Gröſsen ε, e, ϖ, welche dies Integral enthält, als veränderlich ansieht, mit dem Vorhergehenden übereinstimmen; dies giebt

$$d\varepsilon = de \,.\, \left[\left(\frac{dE^{(1)}}{de}\right) \,.\, \sin(v - \varpi) + \tfrac{1}{2} \,.\, \left(\frac{dE^{(2)}}{de}\right) \,.\, \sin 2(v - \varpi) + \text{etc.}\right]$$
$$- d\varpi \,.\, [E^{(1)} \,.\, \cos(v - \varpi) + E^{(2)} \,.\, \cos 2(v - \varpi) + \text{etc.}],$$

wo $v - \varpi$ die wahre Anomalie von m und ϖ die Länge der Sonnennähe ist, beide auf der Bahn gezählt. Wir haben vorher die Länge I dieser auf die feste Ebene projicirten Sonnennähe bestimmt; verwandelt man aber v in ϖ, und $v_{,}$ in I im Ausdruck von $v - \beta$ des 22sten Satzes, so erhält man

$$\varpi - \beta = I - \theta + \text{tang}\, \tfrac{1}{2} \Phi^2 \,.\, \sin 2(I - \theta) + \text{etc.}$$

Setzt man hernach ϖ und I in diesem Ausdruck gleich Null, so findet man

$$\beta = \theta + \text{tang}\, \tfrac{1}{2} \Phi^2 \,.\, \sin 2\,\theta + \text{etc.},$$

folglich

$$\varpi = I + \text{tang}\, \tfrac{1}{2} \Phi^2 \,.\, [\sin 2\,\theta + \sin 2\,(I - \theta)] + \text{etc.};$$

dies giebt

$$d\varpi = dI \,.\, [1 + 2\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} \Phi^2 \,.\, \cos 2\,(I - \theta) + \text{etc.}]$$
$$+ 2\, d\theta \,.\, \text{tang}\, \tfrac{1}{2} \Phi^2 \,.\, [\cos 2\theta - \cos 2\,(I - \theta) + \text{etc.}]$$
$$+ \frac{d\Phi \,.\, \text{tang}\, \frac{1}{2} \Phi}{\cos \frac{1}{2} \Phi^2} \,.\, [\sin 2\,\theta + \sin 2\,(I - \theta) + \text{etc.}].$$

Hat man also die Werthe von dI, $d\theta$ und $d\Phi$ durch die vorhergehenden Formeln bestimmt, so erhält man den Werth von $d\varpi$, woraus man den Werth von $d\varepsilon$ herleiten wird.

Es folgt hieraus, daſs die Reihenausdrücke des Radius vectors, seiner Projection auf der festen Ebene, der Länge in der festen Ebene und in der Bahn, und der Breite, welche wir im 22sten Satz für eine unveränderliche Ellipse gegeben haben, auch für die gestöhrte Ellipse Statt finden, wofern man nur in ihnen nt in $\int n\,dt$ verwandelt, und die Elemente der veränderlichen Ellipse durch die vorhergehenden Formeln bestimmt. Denn da die endlichen Gleichungen zwischen r, v, s, x, y, z und $\int n\,dt$ in beiden Fällen dieselben sind, und da die Reihenausdrücke des 22sten Satzes aus diesen Gleichungen durch analytische Operationen entspringen, welche gänzlich von der Beständigkeit oder der Veränderlichkeit dieser Elemente unabhängig sind, so ist klar, daſs diese Ausdrücke auch dann Statt haben, wenn diese Elemente veränderlich sind.

Wenn die Ellipsen sehr eccentrisch sind, wie z. B. die Kometenbahnen, so muſs man die vorhergehende Analysis ein wenig ändern. Die Neigung Φ der Bahn gegen die feste Ebene, die Länge θ ihres aufsteigenden Knotens, die halbe groſse Axe a, der halbe Parameter $a.(1 - e^2)$, die Eccentricität e und die Länge I der Sonnennähe gegen die feste Ebene können nach dem Vorhergehenden bestimmt werden. Da aber die Werthe von ϖ und von $d\varpi$ in Reihen gegeben sind, welche nach den Potenzen von tang $\frac{1}{2}\Phi$ geordnet sind, so muſs man die feste Ebene so wählen, daſs tang $\frac{1}{2}\Phi$ wenig beträchtlich ist, damit sie convergiren. Das Einfachste, was sich zu diesem Zweck darbietet, ist, statt der festen Ebene die Bahn von m zu einer gegebenen Epoche zu nehmen.

Der vorhergehende Werth von $d\epsilon$ ist durch eine Reihe ausgedrückt, welche nur in dem Fall convergirt, wenn die Eccentricität der Bahn wenig beträchtlich ist; man kann sie also nicht im gegenwärtigen Fall anwenden. Wir wollen die Gleichung

$$\frac{dt \,.\, \sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv \,.\, (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{[1 + e \,.\, \cos(v - \varpi)]^2},$$

um dies zu ergänzen, wieder vornehmen. Setzt man $1 - e = \alpha$, so hat man durch die Analysis des 23sten Satzes im Fall einer unveränderlichen Ellipse

$$t + T = \frac{2a^{\frac{3}{2}} \,.\, (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}{(2 - \alpha)^2 \,.\, \sqrt{\mu}} \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(v - \varpi) \,.\, \left[1 + \frac{(\frac{2}{3} - \alpha)}{2 - \alpha} \,.\, \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(v - \varpi)^2 + \text{etc.}\right],$$

wo T eine willkührliche Gröſse ist. Man muſs diese Gleichung, um sie auf eine veränderliche Ellipse zu erstrecken, so differenziiren, daſs man bloſs T, den halben Parameter $a \,.\, (1 - e^2)$, α und ϖ als veränderlich ansieht. Man wird so eine Differenzialgleichung erhalten, welche T bestimmen wird, und die endlichen Gleichungen, welche im Fall der unveränderlichen Ellipse Statt haben, werden auch noch im Fall der gestöhrten Ellipse gelten.

65. Wir wollen nun die Aenderungen der Elemente der Bahn von m für wenig eccentrische und wenig gegen einander geneigte Bahnen besonders betrachten. Wir haben im 48sten Satz die Methode gegeben, alsdann R in eine Reihe von Sinus und von Kosinus von der Form $m'k \,.\, \cos(i'n't - int + A)$ zu entwickeln, wo k und A Functionen der Eccentricitäten und der Neigungen der Bahnen, der Lagen ihrer Knoten und ihrer Sonnennähen, der Längen dieser Körper zu einer gegebenen Epoche und der groſsen Axen sind. Sind die Ellipsen veränderlich, so muſs man alle diese Gröſsen, dem Vorhergehenden gemäſs, als veränderlich ansehen; man muſs überdies in dem vorhergehenden Gliede den Winkel $i'n't - int$ in $i'\int n'dt - i\int ndt$, oder, welches dasselbe ist, in $i'\xi' - i\xi$, verwandeln.

Nun hat man nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\mu}{a} = 2 \,.\, \int dR;$$

$$\xi = \int ndt = \frac{3}{\mu} \,.\, \iint andt \,.\, dR.$$

Da das Differenzial dR bloſs in Beziehung auf die Koordinaten x, y, z des Körpers m genommen werden muſs, so darf man im Gliede $m'k \,.\, \cos(i'\xi' - i\xi + A)$

des Reihenausdrucks von R nur das, was von der Bewegung dieses Körpers abhängt, als veränderlich ansehen. Da überdies R eine endliche Function von x, y, z, x', y', z' ist, so kann man nach Satz 63. die Elemente der Bahn im Differenzial dR als beständig ansehen. Es ist also hinreichend, im vorhergehenden Gliede ξ als veränderlich anzusehen, und da $n\,dt$ das Differenzial von ξ ist, so erhält man $im'.kndt.\sin(i'\xi' - i\xi + A)$ für das Glied von dR, welches dem vorhergehenden von R entspricht. Nimmt man also nur auf dieses Glied Rücksicht, so hat man

$$\frac{1}{a} = \frac{2\,im'}{\mu}.\int kndt.\sin(i'\xi' - i\xi + A);$$

$$\xi = \frac{3\,im'}{\mu}.\int\int akn^2dt^2.\sin(i'\xi' - i\xi + A).$$

Man kann bey der Integration dieser Glieder die Elemente der elliptischen Bewegung als beständig ansehen, wenn man die Quadrate und Producte der stöhrenden Massen vernachlässigt; dadurch verwandelt sich ξ in nt und ξ' in $n't$. Hieraus erhält man

$$\frac{1}{a} = -\frac{2\,im'nk}{\mu.(i'n' - in)}.\cos(i'n't - int + A);$$

$$\xi = -\frac{3\,im'an^2k}{\mu.(i'n' - in)^2}.\sin(i'n't - int + A).$$

Man sieht hieraus, daſs die Gröſsen a und ξ nur periodische Ungleichheiten enthalten, wenn man nur auf die erste Potenz der stöhrenden Kraft Rücksicht nimmt, woſern $i'n' - in$ nicht gleich Null ist. Da aber i und i' ganze Zahlen sind, so kann die Gleichung $i'n' - in = 0$ nicht Statt haben, wenn m und m' incommensurabel sind, welches der Fall bey den Planeten ist, und welches man im Allgemeinen voraussetzen kann, weil n und n' willkührliche beständige Gröſsen sind, welche aller möglichen Werthe fähig sind, so daſs ihr genaues Verhältniſs in Zahlen unendlich wenig wahrscheinlich ist.

Wir sind nun auf das merkwürdige Resultat gekommen, daſs die groſsen Axen der Planetenbahnen und ihre mittlern Bewegungen nur periodischen Ungleichheiten, welche von ihrer gegenseitigen Lage gegen einander abhängen, unterworfen sind, und daſs also ihre groſsen Axen und ihre mittlern Bewegungen beständig sind, wenn man diese Gröſsen vernachlässigt; welches Resultat mit demjenigen übereinstimmt, welches wir durch eine andere Methode im 54sten Satz gefunden haben.

Wenn

Wenn die mittlern Bewegungen nt und $n't$ zwar nicht genau commensurabel sind, sich aber doch sehr dem Verhältniſs $i : i'$ nähern, so wird der Divisor $i'n' - in$ sehr klein seyn, und es können daraus in ξ und ξ' Ungleichheiten entstehen, welche sehr langsam wachsen, und dadurch die Beobachter veranlassen können, zu glauben, daſs die mittlern Bewegungen der zwey Körper m und m' nicht gleichförmig sind. Wir werden in der Theorie Jupiters und Saturns sehen, daſs sich dies bey diesen zwey Planeten ereignet hat; ihre mittlern Bewegungen verhalten sich so, daſs die doppelte Bewegung Jupiters sehr nahe der fünffachen Bewegung Saturns gleich ist, so daſs $5n' - 2n$ kleiner als der 74ste Theil von n ist. Die Kleinheit dieses Divisors macht das Glied des Ausdrucks von ξ, welches vom Winkel $5n't - 2nt$ abhängt, sehr beträchtlich, ob es schon von der Ordnung $i' - i$, oder von der dritten Ordnung in Beziehung auf die Eccentricitäten und Neigungen der Bahnen ist, wie man im 48sten Satz gesehen hat. Die vorhergehende Analysis giebt den beträchtlichsten Theil dieser Ungleichheiten; denn die Aenderung der mittlern Länge hängt von zwey Integrationen ab, da die Aenderungen der übrigen Elemente der elliptischen Bewegung nur von einer Integration abhängen; und folglich können nur die Glieder des Ausdrucks der mittlern Länge das Quadrat von $i'n' - in$ zum Divisor haben. Nimmt man also nur auf diese Glieder Rücksicht, welche wegen der Kleinheit dieses Divisors die beträchtlichsten seyn müssen, so wird es hinreichend seyn, die mittlere Länge in den Ausdrücken des Radius vectors, der Länge und der Breite um diese Glieder zu vermehren.

Hat man die Ungleichheiten dieser Gattung, welche die Wirkung von m' in der Bewegung von m hervorbringt, so kann man daraus leicht die entsprechenden Ungleichheiten, welche die Wirkung von m in der mittlern Bewegung von m' hervorbringt, bestimmen. Denn die Formel (7) des 9ten Satzes giebt, wenn man nur auf die gegenseitige Wirkung der drey Körper M, m und m' Rücksicht nimmt,

$$\text{beständige Gröſse} = m \, . \, \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^2} + m' \, . \, \frac{(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)}{dt^2}$$

$$- \frac{[(mdx + m'dx')^2 + (mdy + m'dy')^2 + (mdz + m'dz')^2]}{(M + m + m') \, . \, dt^2} \quad \text{(a)}$$

$$- \frac{2Mm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{2Mm'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} - \frac{2mm'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}.$$

Das letzte der Integrale (p) des vorhergehenden Satzes giebt, wenn man statt $\frac{\mu}{a}$ das Integral $2\int \mathrm{d}R$ substituirt,

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{2(M+m)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - 2\int \mathrm{d}R.$$

Bezeichnet man ferner mit R' das, was R wird, wenn man die Wirkung von m auf m' betrachtet, so erhält man

$$R' = \frac{m(xx'+yy'+zz')}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}};$$

$$\frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{dt^2} = \frac{2(M+m')}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} - 2\int \mathrm{d}'R',$$

wo das Differenzialzeichen d′ sich bloſs auf die Koordinaten x', y', z' des Körpers m' bezieht. Substituirt man in der Gleichung (a) statt $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$ und $\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2}$ diese Werthe, so erhält man

$$m.\int \mathrm{d}R + m'.\int \mathrm{d}'R' = \text{best. Gr.} - \frac{[(mdx+m'dx')^2+(mdy+m'dy')^2+(mdz+m'dz')^2]}{2(M+m+m').dt^2}$$

$$+ \frac{m^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{m'^2}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}} - \frac{m\,m'}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}.$$

Es ist sichtbar, daſs der zweyte Theil dieser Gleichung keine Glieder von der Ordnung der Quadrate und der Producte der Massen m und m', welche $i'n' - in$ zum Divisor haben, enthält [136]); nimmt man daher nur auf diese Glieder Rücksicht, so ist

$$m.\int \mathrm{d}R + m'.\int \mathrm{d}'R' = 0.$$

Betrachtet man also nur die Glieder, welche $i'n' - in$ zum Divisor haben, so erhält man

$$\frac{3.\iint a'n'dt.\,\mathrm{d}'R'}{M+m'} = -\frac{m.(M+m).a'n'}{m'.(M+m').an}.\frac{3.\iint an\,dt.\,\mathrm{d}R}{M+m};$$

136) Der Divisor $i'n' - in$ kann nur durch Integriren entstehen; der zweyte Theil der vorhergehenden Gleichung enthält aber keine Integrale.

nun ist aber

$$\xi = \frac{3 . \int\int a n d t . \mathrm{d}R}{M + m}; \quad \xi' = \frac{3 . \int\int a' n' d t . \mathrm{d}' R'}{M + m'},$$

folglich

$$m' . (M + m') . a n . \xi' + m . (M + m) . a' n' . \xi = 0.$$

Man hat ferner

$$n = \frac{\sqrt{M + m}}{a^{\frac{3}{2}}}; \quad n' = \frac{\sqrt{M + m'}}{a'^{\frac{3}{2}}}.$$

Vernachlässigt man also m und m' in Vergleichung mit M, so erhält man

$$m . \sqrt{a} . \xi + m' . \sqrt{a'} . \xi' = 0,$$

oder [137])

$$\xi' = - \frac{m . \sqrt{a}}{m' . \sqrt{a'}} . \xi.$$

Man wird daher die Ungleichheiten von ξ', welche $(i'n' - in)^2$ zum Divisor haben, vermittelst der Ungleichheiten von ξ, welche denselben Divisor haben, erkennen. Diese Ungleichheiten haben, wie man sieht, entgegengesetzte Zeichen, wenn n und n' die nämlichen Zeichen haben, das heiſst, wenn beide Körper m und m' sich in der nämlichen Richtung bewegen. Sie haben überdies ein beständiges Verhältniſs. Es folgt hieraus, daſs sie die mittlere Bewegung von m' nach demselben Gesetz zu verzögern scheinen werden, wenn sie die mittlere Bewegung von m zu beschleunigen scheinen, und die scheinbare Beschleunigung von m wird sich zur scheinbaren Verzögerung von m' wie $m' . \sqrt{a'}$ zu $m . \sqrt{a}$ verhalten. Die Beschleunigung der mittlern Bewegung Jupiters und die Verzögerung der Bewegung Saturns, welche Halley aus Vergleichung der neuern Beobachtungen mit den ältern geschlossen hatte, sind sehr nahe in diesem Verhältnisse; ich schloſs also aus dem vorhergehenden Lehrsatz, daſs sie aus der gegenseitigen Wirkung beider Planeten entspringen; und da es ausgemacht ist, daſs diese Wirkung keine von der gegenseitigen Lage der Planeten unabhängige Aenderung hervorbringen kann, so stand ich nicht an, zu glauben, daſs in der

137) Will man m und m' nicht vernachlässigen, so findet man, wenn man statt $(M + m)$ seinen Werth $n^2 a^3$ und statt $(M + m')$ seinen Werth $n'^2 a'^3$ substituirt, $m' n'^2 a'^3 . a n . \xi' + m . n^2 a^3 . a' n' . \xi = 0$ oder

$$\xi' = - \frac{m . n . a^2}{m' . n' . a'^2} . \xi.$$

Theorie Jupiters und Saturns eine grofse periodische Ungleichheit, deren Periode sehr lang ist, vorhanden ist. Indem ich ferner überlegte, dafs die fünffache Bewegung Saturns weniger der zweyfachen Bewegung Jupiters sehr nahe gleich Null ist, so schien es mir wahrscheinlich, dafs die von Halley bemerkte Erscheinung eine von diesem Argument abhängende Ungleichheit zur Ursache hätte. Die Bestimmung dieser Ungleichheit bestätigte diese Vermuthung.

Da die Periode des Arguments $i'n't - int$ sehr lang vorausgesetzt wird, so erfahren die Elemente der Bahnen m und m' in diesem Zwischenraum merkliche Aenderungen, auf welche man in dem doppelten Integral $\int\int akn^2dt^2 . \sin(i'n't - int + A)$ nothwendig Rücksicht nehmen mufs. Hierzu wollen wir der Function $k.\sin(i'n't-int+A)$ die Form $Q.\sin(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)$ $+ Q'.\cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon)$ geben, wo Q und Q' Functionen der Elemente der Bahnen sind; wir erhalten so [138])

$$\int\int akn^2dt^2 . \sin(i'n't - int + A) =$$

$$-\frac{n^2.a.\sin(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)}{(i'n'-in)^2}.\left[Q-\frac{2.dQ'}{(i'n'-in).dt}-\frac{3.d^2Q}{(i'n'-in)^2.dt^2}+\frac{4.d^3Q'}{(i'n'-in)^3.dt^3}+\text{etc.}\right]$$

$$-\frac{n^2.a.\cos(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)}{(i'n'-in)^2}.\left[Q'+\frac{2.dQ}{(i'n'-in).dt}-\frac{3.d^2Q'}{(i'n'-in)^2.dt^2}-\frac{4.d^3Q}{(i'n'-in)^3.dt^3}+\text{etc.}\right].$$

138) Bezeichnet man der Kürze wegen den Winkel $i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon$ durch φ, so erhält man, wenn man theilweise integrirt,

$$\int . Q . dt^2 . \sin\varphi = -\frac{Q . dt}{i'n' - in} . \cos\varphi + \int . \frac{dQ . dt}{i'n' - in} . \cos\varphi \; . \, . \, . \quad (1);$$

$$\int . Q' . dt^2 . \cos\varphi = + \frac{Q' . dt}{i'n' - in} . \sin\varphi - \int . \frac{dQ' . dt}{i'n' - in} . \sin\varphi \; . \, . \, . \quad (2).$$

Setzt man $Q' . dt = \frac{dQ}{i'n' - in}$, so giebt die Formel (2) folgende:

$$\int . \frac{dQ . dt}{i'n' - in} = \frac{dQ}{(i'n' - in)^2} . \sin\varphi - \int . \frac{d^2Q}{(i'n' - in)^2} . \sin\varphi \; . \, . \, . \quad (3).$$

Man kann nun in der Gleichung (3) das Integral vermittelst der Gleichung (1) in zwey Theile zerlegen; das neue daraus entstehende Integral kann man vermittelst der Gleichung (2) zerlegen, u. s. f. Substituirt man dann den Werth, welchen die Gleichung (3) giebt, in die Gleichung (1), so erhält man

$$\int Q . dt^2 . \sin\varphi = -\frac{Q . dt}{i'n' - in} . \cos\varphi + \frac{dQ}{(i'n' - in)^2} . \sin\varphi + \frac{d^2Q}{dt . (i'n' - in)^3} . \cos\varphi - \, . \, . \, . \quad (4).$$

Substituirt man in der Gleichung (2) statt des Integrals seinen aus der Gleichung (4) hergeleiteten Werth, so findet man

$$\int Q' . dt^2 . \cos\varphi = \frac{Q' . dt . \sin\varphi}{i'n' - in} + \frac{dQ' . \cos\varphi}{(i'n' - in)^2} - \frac{d^2Q' . \sin\varphi}{dt . (i'n' - in)^3} - \, . \, . \, . \quad (5).$$

Da die Glieder dieser zwey Reihen sehr schnell wegen der Langsamkeit der Sekularänderungen der elliptischen Elemente abnehmen, so kann man sich bey jeder Reihe mit den zwey ersten Gliedern begnügen. Substituirt man hernach statt der Elemente der Bahnen ihre nach den Potenzen der Zeit geordneten Werthe, und behält man nur die erste Potenz, so wird man das vorhergehende doppelte Integral in ein einziges Glied von der Form

$$(F + Et) \cdot \sin(i'n't - int + A + Ht)$$

verwandeln können. Für Jupiter und Saturn wird dieser Ausdruck mehrere Jahrhunderte vor und nach dem als Epoche angenommenen Augenblick gebraucht werden können.

Die grofsen Ungleichheiten, von denen wir gesprochen haben, bringen sehr merkliche Ungleichheiten in den Gliedern hervor, welche von der zweyten Potenz der stöhrenden Massen abhängen. Substituirt man nämlich in der Formel

$$\xi = \frac{3\,i\,m'}{\mu} \cdot \iint a k n^2 \cdot dt^2 \cdot \sin(i'\xi' - i\xi + A),$$

Integrirt man die Gleichung (4) von neuem, so findet man das Integral jedes Gliedes des zweyten Theils unmittelbar vermittelst der Reihen (4) und (5), nämlich

$$-\int \cdot \frac{Q \cdot dt \cdot \cos\varphi}{i'n' - in} = -\frac{Q \cdot \sin\varphi}{(i'n'-in)^2} - \frac{dQ \cdot \cos\varphi}{dt \cdot (i'n' - in)^3} + \frac{d^2Q \cdot \sin\varphi}{dt^2 \cdot (i'n' - in)^4} + \ldots$$

$$+\int \cdot \frac{dQ \cdot \sin\varphi}{(i'n' - in)^2} = -\frac{dQ \cdot \cos\varphi}{dt \cdot (i'n' - in)^3} + \frac{d^2Q \cdot \sin\varphi}{dt^2 \cdot (i'n' - in)^4} + \ldots$$

$$+\int \cdot \frac{d^2Q \cdot \cos\varphi}{dt \cdot (i'n' - in)^3} = + \frac{d^2Q \cdot \sin\varphi}{dt^2 \cdot (i'n' - in)^4} + \ldots$$

etc. etc. etc.

Die Summe dieser Gleichungen giebt

$$\iint \cdot Q \cdot dt^2 \cdot \sin\varphi = -\frac{Q \cdot \sin\varphi}{(i'n' - in)^2} - \frac{2 \cdot dQ \cdot \cos\varphi}{dt \cdot (i'n' - in)^3} + \frac{3 \cdot d^2Q \cdot \sin\varphi}{dt^2 \cdot (i'n' - in)^4} + \ldots \quad (6).$$

Eben so findet man

$$\iint \cdot Q' \cdot dt^2 \cdot \cos\varphi = -\frac{Q' \cdot \cos\varphi}{(i'n' - in)^2} + \frac{2 \cdot dQ' \cdot \sin\varphi}{dt \cdot (i'n' - in)^3} + \frac{3 \cdot d^2Q' \cdot \cos\varphi}{dt^2 \cdot (i'n' - in)^4} - \ldots \quad (7).$$

Die Summe der Gleichungen (6) und (7) giebt, wenn man die in sin φ multiplicirten Glieder von denen sondert, welche in cos φ multiplicirt sind,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-\sin\varphi}{(i'n' - in)^2}\left[Q - \dfrac{2 \cdot dQ'}{dt \cdot (i'n' - in)} - \dfrac{3 \cdot d^2Q}{dt^2 \cdot (i'n' - in)^2} + \ldots\right] \\ \dfrac{-\cos\varphi}{(i'n' - in)^2}\left[Q' + \dfrac{2 \cdot dQ}{dt \cdot (i'n' - in)} - \dfrac{3 \cdot d^2Q'}{dt^2\,(i'n' - in)^2} - \ldots\right] \end{array}\right\}.$$

Multiplicirt man diese Gröfse mit an^2, so erhält man den Werth von

$$\iint akn^2 \cdot dt^2 \cdot \sin(i'n't - int + A).$$

statt ξ und ξ' ihre Werthe

$$nt - \frac{3i \,.\, m'an^2k}{\mu.(i'n' - in)^2} \,.\, \sin(i'n't - int + A);$$

$$n't + \frac{3i \,.\, man^2k}{\mu.(i'n' - in)^2} \,.\, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a'}} \,.\, \sin(i'n't - int + A),$$

so erhält man unter den Gliedern von der Ordnung m^2 das folgende [139]):

$$-\frac{9 . i^2 . m'^2 . a^2 . n^4 k^2}{8 . \mu^2 . (i'n' - in)^4} \,.\, \frac{(i.m'.\sqrt{a'} + i'.m.\sqrt{a})}{m'.\sqrt{a'}} \,.\, \sin 2\,(i'n't - int + A).$$

Der Werth von ξ' enthält ein entsprechendes Glied, welches sich zum Vorhergehenden wie $m.\sqrt{a}$ zu $m'.\sqrt{a'}$ verhält:

$$\frac{9 . i^2 . m'^2 . a^2 . n^4 k^2}{8 . \mu^2 . (i'n' - in)^4} \,.\, (i.m'.\sqrt{a'} + i'.m.\sqrt{a}) \,.\, \frac{m.\sqrt{a}}{m'^2 . a'} \,.\, \sin 2\,(i'n't - int + A).$$

66. Es kann sich zutragen, dafs sich die beträchtlichsten Ungleichheiten der mittlern Bewegung nur unter den Gliedern von der Ordnung der Quadrate der stöhrenden Massen befinden. Wenn man drey um M sich bewegende Körper m, m', m'' betrachtet, so wird der Ausdruck von dR in Rücksicht auf die Glieder dieser Ordnung Ungleichheiten von der Form $k.\sin(int - i'n't + i''n''t + A)$ enthalten. Nimmt man nun an, dafs die mittlern Bewegungen nt, $n't$, $n''t$ so beschaffen sind, dafs $in - i'n' + i''n''$ ein äufserst kleiner Bruch von n ist, so wird daraus eine sehr beträchtliche Ungleichheit in dem Werth von ξ entste-

139) Setzt man der Kürze wegen $\frac{3ian^2k}{\mu.(i'n' - in)^2} \,.\, \left(\frac{i'm.\sqrt{a} + im'.\sqrt{a'}}{\sqrt{a'}}\right)$ gleich α, und

$\alpha . \sin(i'n't - int + A) = \beta$, so ist

$\sin(i'\xi' - i\xi + A) = \sin(i'n't - int + A + \beta)$

oder $= \sin(i'n't - int + A) + \beta . \cos(i'n't - int + A) - \ldots$

wenn man die höhern Potenzen von β vernachlässigt, welches erlaubt ist, da β klein ist. Bey der Substitution dieses Werths von $\sin(i'\xi' - i\xi + A)$ in die Gleichung für ξ mufs man das erste Glied $\sin(i'n't - int + A)$ weglassen, weil die Glieder, welche daraus entstehen, blofs in m' multiplicirt sind, welche Glieder man schon vorher betrachtet hat. Substituirt man also $\beta . \cos(i'n't - int + A)$, welches gleich $\alpha . \sin(i'n't - int + A) . \cos(i'n't - int + A)$ oder gleich $\frac{1}{2}\alpha . \sin 2\,(i'n't - int + A)$ ist, statt $\sin(i'\xi - i\xi + A)$, so findet man

$$\xi = \frac{3im'}{\mu} . \iint \frac{akn^2 . dt^2}{2} . \alpha . \sin 2\,(i'n't - int + A),$$

und wenn man integrirt,

$$\xi = \frac{-3im' . a . k . n^2}{8\mu . (i'n' - in)^2} . \alpha . \sin 2\,(i'n't - int + A).$$

hen [140]). Diese Ungleichheit kann sogar die Gröfse $in - i'n' + i''n''$ genau gleich Null machen, und so eine Bedingungsgleichung zwischen den mittlern Bewegungen und den mittlern Längen der drey Körper m, m', m'' geben. Dieser sehr sonderbare Fall hat in dem System der Jupiterssatelliten Statt, und wir wollen die Analysis desselben entwickeln.

Nimmt man M zur Einheit der Massen an, und vernachlässigt man m, m', m'' in Vergleichung mit M, so erhält man

140) Folgende Tafel erthält mehrere merkwürdige Verhältnisse zwischen den mittlern Bewegungen der Planeten, wo wir der Kürze wegen die jährlichen Bewegungen durch die bekannten Planetenzeichen bezeichnen.

2 ☿ − 5 ♀ = 228666″	2 ♁ − 1 ♀ − 11 ♄ = 1349″
4 ♁ − 1 ☿ = 196972″	− 3 ♁ + 2 ♀ − 7 ♄ = 17364″
5 ♁ − 3 ♀ = 159851″	− 5 ♁ + 3 ♀ + 4 ♄ = 16015″
5 ♀ − 8 ♁ = 165300″	+ 8 ♁ − 5 ♀ + 4 ♄ = 10588″
1 ♀ − 3 ♂ = 39462″	10 ♁ − 6 ♀ − 7 ♄ = 11937″
2 ♂ − 1 ♁ = 82069″	6 ♃ + 1 ♄ − 1 ♂ = 10476″
12 ♃ − 1 ♁ = 15088″	− 5 ♃ − 3 ♄ + 1 ♂ = 10772″
1 ♂ − 6 ♃ = 33490″	11 ♃ + 4 ♄ − 2 ♂ = 296″
5 ♄ − 2 ♃ = 1470″	− 4 ♃ + 6 ♄ − 1 ♂ = 11945″
1 ♃ − 7 ⛢ = 1283″	9 ♃ + 9 ♄ − 2 ♂ = 1173″
3 ⛢ − 1 ♄ = 2275″	8 ♃ − 4 ♄ − 1 ♂ = 9006″
− 2 ☿ + 5 ♀ + 15 ⛢ = 2544″	− 3 ♃ − 8 ♄ + 1 ♂ = 9303″
2 ☿ − 5 ♀ − 5 ♄ = 8833″	1 ♃ + 1 ♁ − 2 ♂ = 27113″
2 ☿ − 5 ♀ − 2 ♃ = 10303″	− 7 ♃ − 1 ♁ + 3 ♂ = 6378″
− 6 ☿ + 15 ♀ + 1 ♂ = 2580″	− 3 ♃ − 4 ♁ + 8 ♂ = 730″
− 1 ☿ + 2 ♀ + 2 ♂ = 160262″	8 ♃ + 2 ♁ − 5 ♂ = 20635″
1 ☿ − 5 ♀ + 4 ♁ = 31744″	4 ♃ + 3 ♁ − 5 ♂ = 5647″
2 ☿ − 2 ♀ − 5 ♁ = 68814″	− 11 ♃ + 2 ♁ − 2 ♂ = 12025″
1 ♂ + 4 ♀ − 7 ♁ = 43747″	− 1 ♃ + 3 ♀ − 9 ♂ = 9203″
− 7 ♂ − 2 ♀ + 7 ♁ = 35176″	7 ♃ − 1 ♀ + 2 ♂ = 36229″
4 ♂ − 7 ♁ + 3 ♀ = 4286″	6 ♃ + 1 ♀ − 4 ♂ = 5972″
9 ♂ + 2 ♀ − 8 ♁ = 46893″	− 2 ♃ + 3 ♀ − 6 ♂ = 493″
1 ♂ − 4 ♀ + 6 ♁ = 38321″	1 ♃ − 2 ♄ − 1 ⛢ = 5834″
8 ♂ − 2 ♀ − 1 ♁ = 3146″	1 ♃ − 1 ♄ − 4 ⛢ = 3559″
6 ♁ − 3 ♀ − 2 ♂ = 77783″	3 ♃ − 6 ♄ − 4 ⛢ = 2089″
− 4 ♂ + 5 ♀ − 6 ♁ = 1140″	− 2 ♃ + 4 ♄ + 3 ⛢ = 3745″
12 ♂ − 7 ♀ + 5 ♁ = 2005″	− 3 ♃ + 5 ♄ + 7 ⛢ = 186″
3 ♁ + 3 ♃ − 2 ♀ = 2415″	3 ♃ − 7 ♄ − 1 ⛢ = 4365″
2 ♀ + 9 ♃ − 4 ♁ = 12672	− 5 ♃ + 10 ♄ + 7 ⛢ = 1656″
4 ♀ + 6 ♃ − 7 ♁ = 10257	5 ♃ − 11 ♄ − 4 ⛢ = 630″
6 ♀ + 3 ♃ − 10 ♁ = 7841	

$$n^2 = \frac{1}{a^3}; \quad n'^2 = \frac{1}{a'^3}; \quad n''^2 = \frac{1}{a''^3}.$$

Man hat ferner

$$d\xi = n\,dt; \quad d\xi' = n'dt; \quad d\xi'' = n''dt,$$

folglich

$$\frac{d^2\xi}{dt} = -\tfrac{3}{2}.n^{\frac{1}{3}}.\frac{da}{a^2}; \quad \frac{d^2\xi'}{dt} = -\tfrac{3}{2}.n'^{\frac{1}{3}}.\frac{da'}{a'^2}; \quad \frac{d^2\xi''}{dt} = -\tfrac{3}{2}.n''^{\frac{1}{3}}.\frac{da''}{a''^2}.$$

Nimmt man nur auf die Ungleichheiten von sehr langen Perioden Rücksicht, so hat man, wie man im 61sten Satz gesehen hat,

$$\text{beständige Größe} = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''};$$

dieses giebt

$$0 = m.\frac{da}{a^2} + m'.\frac{da'}{a'^2} + m''.\frac{da''}{a''^2}.$$

Wir haben im nämlichen Satz gesehen, daſs man folgende Gleichung hat, wenn man die Quadrate der Eccentricitäten und Neigungen der Bahnen vernachlässigt:

$$\text{beständige Größe} = m.\sqrt{a} + m'.\sqrt{a'} + m''.\sqrt{a''};$$

diese giebt

$$0 = m.\frac{da}{\sqrt{a}} + m'.\frac{da'}{\sqrt{a'}} + m''.\frac{da''}{\sqrt{a''}}.$$

Aus diesen verschiedenen Gleichungen kann man leicht schlieſsen [141]):

$$\frac{d^2\xi}{dt}$$

141) Eliminirt man aus den beiden Gleichungen zwischen den drey Differenzialen da, da', da'' das letztere Differenzial dadurch, daſs man die letztere der beiden Gleichungen mit $-a''^{-\frac{3}{2}}$ multiplicirt und beide Gleichungen addirt, so findet man

$$\left(\frac{m}{a^2} - \frac{m}{\sqrt{a}\,.\,a''^{\frac{3}{2}}}\right)da + \left(\frac{m'}{a'^2} - \frac{m'}{\sqrt{a'}\,.\,a''^{\frac{3}{2}}}\right)da' = 0,$$

oder

$$\left(a''^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)m.\frac{da}{a^2} + \left(a''^{\frac{3}{2}} - a'^{\frac{3}{2}}\right)m'.\frac{da'}{a'^2} = 0,$$

und wenn man statt $a''^{\frac{3}{2}}$, $a'^{\frac{3}{2}}$ und $a^{\frac{3}{2}}$ ihre Werthe n''^{-1}, n'^{-1}, n^{-1} setzt und mit n'' multiplicirt,

$$\left(\frac{n - n''}{n}\right)m.\frac{da}{a^2} + \left(\frac{n' - n''}{n'}\right)m'.\frac{da'}{a'^2} = 0,$$

und

$$\frac{d^2\xi}{dt} = -\tfrac{3}{2} \cdot n^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{da}{a^2};$$

$$\frac{d^2\xi'}{dt} = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{m \cdot n'^{\frac{4}{3}}}{m' \cdot n} \cdot \frac{(n - n'')}{(n' - n'')} \cdot \frac{da}{a^2};$$

$$\frac{d^2\xi''}{dt} = -\tfrac{3}{2} \cdot \frac{m \cdot n''^{\frac{4}{3}}}{m'' \cdot n} \cdot \frac{(n - n')}{(n' - n'')} \cdot \frac{da}{a^2}.$$

Die Gleichung $\frac{\mu}{a} = 2\int dR$ des 64sten Satzes giebt endlich

$$-\frac{da}{a^2} = 2\,dR.$$

Jetzt ist also nur noch dR zu bestimmen.

Man hat nach dem 46sten Satz, wenn man die Quadrate und Producte der Neigungen der Bahnen vernachlässigt [142]),

$$R = \frac{m' \cdot r}{r'^2} \cdot \cos(v' - v) - m' \cdot (r^2 - 2rr' \cdot \cos(v' - v) + r'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{m'' \cdot r}{r''^2} \cdot \cos(v'' - v) - m'' \cdot (r^2 - 2rr'' \cdot \cos(v'' - v) + r''^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Entwickelt man diese Function in eine nach den Kosinus von $v' - v$ und $v'' - v$ und ihrer Vielfachen geordnete Reihe, so erhält man einen Ausdruck von folgender Form:

$$\text{und } -\frac{da'}{a'^2} = \frac{da}{a^2} \cdot \frac{m}{m'} \cdot \frac{n'}{n} \cdot \left(\frac{n - n''}{n' - n''}\right),$$

$$\text{und } \frac{d^2\xi'}{dt} \text{ oder } -\tfrac{3}{2} n'^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{da'}{a'^2} \text{ gleich } \tfrac{3}{2} \frac{da}{a^2} \cdot \frac{m}{m'} \cdot \frac{n'^{\frac{4}{3}}}{n} \cdot \left(\frac{n - n''}{n' - n''}\right).$$

142) Der 48ste Satz giebt, wenn man die von den Neigungen der Bahnen abhängenden Grössen z' und z vernachlässigt,

$$R = m' \cdot \frac{r}{r'^2} \cdot \cos(v' - v) - m' \left[r^2 - 2rr' \cdot \cos(v' - v) + r'^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Dies ist der Werth von R, wenn man bloss den Körper m' betrachtet. Hieraus erhält man sogleich den Werth von R in Rücksicht auf den Körper m'', nämlich

$$R = m'' \cdot \frac{r}{r''^2} \cdot \cos(v'' - v) - m'' \left[r^2 - 2rr'' \cdot \cos(v'' - v) + r''^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Beide Werthe vereinigt geben den Werth von R in Rücksicht auf die beiden Körper m' und m''.

$$R = \frac{m'}{2} \cdot (r, r')^{(0)} + m' \cdot (r, r')^{(1)} \cdot \cos(v' - v) + m' \cdot (r, r')^{(2)} \cdot \cos 2(v' - v) + m' \cdot (r, r')^{(3)} \cdot \cos 3(v' - v) + \text{etc.}$$
$$+ \frac{m''}{2} \cdot (r, r'')^{(0)} + m'' \cdot (r, r'')^{(1)} \cdot \cos(v'' - v) + m'' \cdot (r, r'')^{(2)} \cdot \cos 2(v'' - v) + m'' \cdot (r, r'')^{(3)} \cdot \cos 3(v'' - v) + \text{etc.};$$

hieraus erhält man

$$dR = \left\{ \begin{array}{l} dr \left\{ \begin{array}{l} \frac{m'}{2} \cdot \left(\frac{d.(r, r')^{(0)}}{dr}\right) + m' \cdot \left(\frac{d.(r, r')^{(1)}}{dr}\right) \cdot \cos(v' - v) \\ \qquad + m' \cdot \left(\frac{d.(r, r')^{(2)}}{dr}\right) \cdot \cos 2(v' - v) + \text{etc.} \\ + \frac{m''}{2} \cdot \left(\frac{d.(r, r'')^{(0)}}{dr}\right) + m'' \cdot \left(\frac{d.(r, r'')^{(1)}}{dr}\right) \cdot \cos(v'' - v) \\ \qquad + m'' \cdot \left(\frac{d.(r, r'')^{(2)}}{dr}\right) \cdot \cos 2(v'' - v) + \text{etc.} \end{array} \right\} \\ + dv \cdot \left[\begin{array}{l} m' \cdot (r, r')^{(1)} \cdot \sin(v' - v) + 2m' \cdot (r, r')^{(2)} \cdot \sin 2(v' - v) + \text{etc.} \\ + m'' \cdot (r, r'')^{(1)} \cdot \sin(v'' - v) + 2m'' \cdot (r, r'')^{(2)} \cdot \sin 2(v'' - v) + \text{etc.} \end{array} \right] \end{array} \right\}.$$

Wir wollen nun den Beobachtungen gemäſs annehmen, daſs im System der drey ersten Satelliten Jupiters $n - 2n'$ und $n' - 2n''$ sehr kleine Brüche sind, und daſs ihr Unterschied $(n - 2n') - (n' - 2n'')$ oder $n - 3n' + 2n''$ unvergleichbar kleiner sey, als jeder derselben. Es folgt aus den Ausdrücken von $\frac{\delta r}{a}$ und δv des 50sten Satzes, daſs die Wirkung von m' im Radius vector und in der Länge von m eine sehr merkliche Ungleichheit hervorbringen wird, welche vom Argument $2(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ abhängt. Die Glieder, welche sich auf diese Ungleichheit beziehen, haben $4(n' - n)^2 - n^2$ oder $(n - 2n')(3n - 2n')$ zum Divisor, und dieser Theiler ist sehr klein wegen der Kleinheit des Factors $n - 2n'$. Man sieht ferner durch die Betrachtung derselben Ausdrücke, daſs die Wirkung von m im Radius vector und in der Länge von m' eine vom Argument $(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ abhängende Ungleichheit hervorbringen wird, welche sehr beträchtlich seyn wird, weil sie $(n' - n)^2 - n'^2$ oder $n \cdot (n - 2n')$ zum Divisor hat. Man sieht auf eben diese Art, daſs die Wirkung von m'' auf m' eine beträchtliche vom Argument $2(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon')$ abhängende Ungleichheit hervorbringen wird. Man sieht endlich, daſs die Wirkung von m' im Radius

vector und in der Länge von m'' eine beträchtliche vom Argument $(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon')$ abhängende Ungleichheit hervorbringt. Diese Ungleichheiten sind zuerst durch die Beobachtungen erkannt worden. Wir werden sie ausführlich in der Theorie der Jupiterssatelliten entwickeln; ihre Gröſse in Vergleichung mit den übrigen Ungleichheiten erlaubt uns, bey der gegenwärtigen Untersuchung diese letztern zu vernachlässigen. Wir werden also annehmen:

$$\delta r = m'.E'.\cos 2\,(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon);$$
$$\delta v = m'.F'.\sin 2\,(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon);$$
$$\delta r' = m''.E''.\cos 2\,(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon')+m.G.\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon);$$
$$\delta v' = m''.F''.\sin 2\,(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon')+m.H.\sin(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon);$$
$$\delta r'' = m'.G'.\cos(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon');$$
$$\delta v'' = m''.H'.\sin(n''t-n't+\varepsilon''-\varepsilon').$$

Man muſs nun im vorhergehenden Ausdruck von dR statt r, v, r', v', r'', v'' die Werthe $a+\delta r$, $nt+\varepsilon+\delta v$, $a'+\delta r'$, $n't+\varepsilon'+\delta v'$, $a''+\delta r''$, $n''t+\varepsilon''+\delta v''$ setzen, und nur die vom Argument $nt-3n't+2n''+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon''$ abhängenden Glieder behalten. Man sieht aber leicht, daſs die Substitution der Werthe von δr, δv, $\delta r''$, $\delta v''$ kein ähnliches Glied hervorbringen kann. Dies ist nicht der Fall bey der Substitution der Werthe von $\delta r'$ und von $\delta v'$; das Glied $m'.(r,r')^{(1)}.dv.\sin(v'-v)$ des Ausdrucks von dR bringt die folgende Gröſse hervor [143]):

$$-\frac{m'.m''.ndt}{2}.\left[E''.\left(\frac{d.(a,a')^{(1)}}{da'}\right)-F''.(a,a')^{(1)}\right].\sin(nt-3n't+2n''t+\varepsilon-3\varepsilon'+2\varepsilon'').$$

143) Läſst man der Kürze wegen die beständigen Winkel ε'', ε', ε weg, welche man leicht am Ende suppliren kann, da sie immer die Gröſsen n'', n', n begleiten, so erhält man

$$\sin(v'-v) = \sin(n't-nt+\delta v'-\delta v) = \sin(n't-nt)+(\delta v'-\delta v).\cos(n't-nt).$$

Substituirt man statt $\delta v'$ und δv ihre Werthe, und zerlegt man die Producte der Sinus und Kosinus in Summen, so findet man

$$\sin(v'-v) = \sin(n't-nt)+\frac{m''}{2}F''.\sin(2n''t-n't-nt)+\frac{m''}{2}F''.\sin(2n''t-3n't+nt)$$
$$+\frac{m}{2}H.\sin 2\,(n't-nt)-\frac{m'}{2}F'.\sin 3\,(n't-nt)-\frac{m'}{2}F'.\sin(n't-nt).$$

Da ferner $(r,r')^{(1)}$ gleich $(a+\delta r,\,a'+\delta r')^{(1)}$ ist, so erhält man diese Gröſse aus $(a,a')^{(1)}$ vermittelst des im 21sten Satz gegebenen Taylorschen Lehrsatzes, nämlich

$$(r,r')^{(1)} = (a,a')^{(1)}+\delta r.\left(\frac{d.(a,a')^{(1)}}{da}\right)+\delta r'.\left(\frac{d.(a,a')^{(1)}}{da'}\right)+\ldots$$

Dies ist die einzige Gröſse dieser Art, welche der Ausdruck von dR enthält. Wendet man die Ausdrücke von $\frac{\delta r}{a}$ und von δv des 50sten Satzes auf die Wirkung von m'' auf m' an, so erhält man, wenn man nur die Glieder behält, welche $n' - 2n''$ zum Divisor haben, und wenn man bemerkt, daſs n'' sehr nahe gleich $\frac{1}{2} n'$ ist [144]),

und wenn man statt δr und $\delta r'$ ihre Werthe setzt,

$$(r, r')^{(1)} = (a, a')^{(1)} + m' . E' . \left(\frac{d.(a, a')^{(1)}}{da}\right) \cos 2(n't - nt) + m'' . E'' . \left(\frac{d.(a, a')^{(1)}}{da'}\right) \cos 2(n''t - n't)$$

$$+ m . G . \left(\frac{d.(a, a')^{(1)}}{da'}\right) . \cos (n't - nt).$$

Hieraus findet man nun leicht das Product von $(r, r')^{(1)} . \sin (v' - v)$, wo man aber bloſs die Glieder behalten muſs, welche den Winkel $2n''t - 3n't + nt$ enthalten. Das erste Glied von $(r, r')^{(1)}$ und das dritte von $\sin (v' - v)$ giebt

$$+ \frac{m''}{2} (a, a')^{(1)} . F'' . \sin (2n''t - 3n't + nt).$$

Das zweyte Glied von $(r, r')^{(1)}$ und das zweyte Glied von $\sin (v' - v)$ giebt

$$+ \frac{m' . m''}{4} E' . F'' . \left(\frac{d.(a, a')^{(1)}}{da}\right) . \sin (2n''t - 3n't + nt).$$

Das dritte Glied von $(r, r')^{(1)}$ und das erste und letzte von $\sin (v' - v)$ geben

$$- \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} m' F'\right) m'' . E'' . \left(\frac{d.(a, a')^{(1)}}{da'}\right) . \sin (2n''t - 3n't + nt).$$

Der Koefficient von $\sin (2n''t - 3n't + nt)$ ist folglich

$$\frac{m''}{2} \left[(a, a')^{(1)} . F'' + \frac{m'}{2} E' . F'' . \left(\frac{d.(a, a')^{(1)}}{da}\right) - \left[E'' + \frac{m'}{2} F' . E''\right] . \left(\frac{d.(a, a')^{(1)}}{da'}\right)\right],$$

oder, wenn man die Glieder, welche in m' multiplicirt und dadurch in Vergleichung mit den übrigen sehr klein sind, wegläſst,

$$\frac{m''}{2} . \left[(a, a')^{(1)} F'' - E'' . \left(\frac{d.(a, a')^{(1)}}{da'}\right)\right].$$

Multiplicirt man diese Gröſse noch mit $m' . dv$ oder mit $m' . n dt$, so erhält man den Koefficienten von $\sin (2n''t - 3n't + nt + 2\epsilon'' - 3\epsilon' + \epsilon)$ im Gliede $m' . (r, r')^{(1)} . dv . \sin (v' - v)$.

144) Wir bemerken zuerst, daſs die Formeln des 50sten Satzes nicht $\delta r'$ sondern $\frac{\delta r'}{a'}$ geben; man muſs folglich den Werth von E'', welchen sie geben, mit a' multipliciren, oder welches dasselbe ist, diese

$$\frac{E''}{a'} = \tfrac{1}{2} n'^2 . \frac{\left[a'^2 . \left(\frac{d.(a', a'')^{(2)}}{da'}\right) + \frac{2n'}{n' - n''} . a' . (a', a'')^{(2)}\right]}{(n' - 2n'') . (3n' - 2n'')};$$

$$F'' = \frac{2E''}{a'};$$

man erhält also

$$dR = -\tfrac{1}{2} . \frac{da}{a^2}$$

$$= \frac{m'.m''.ndt}{2} . E'' . \left[\frac{2(a,a')^{(1)}}{a'} - \left(\frac{d.(a,a')^{(1)}}{da'}\right)\right] . \sin(nt - 3n't + 2n''t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'').$$

Substituirt man diesen Werth von $\frac{da}{a^2}$ in die Werthe von $\frac{d^2\xi}{dt}$, $\frac{d^2\xi'}{dt}$, $\frac{d^2\xi''}{dt}$, und setzt man der Kürze wegen

Formeln geben den Werth von $\frac{E''}{a'}$. Nun ist E'' der Koefficient von cos $2(n''t - n't + \varepsilon'' - \varepsilon')$, folglich $i = 2$; n gleich n' und n' gleich n''; endlich $A^{(i)}$ gleich $A^{(2)}$ gleich $(a', a'')^{(2)}$, und a gleich a'. Der Divisor $i^2(n-n')^2 - n^2$ oder $(in - in')^2 - n^2$ oder $[(in - in') + n]\,[(in - in') - n]$ oder $[(i+1)n - in']\,[(i-1)n - in']$ verwandelt sich, für $i = 2$, in $(3n' - 2n'')(n' - 2n'')$. Man erhält so den im Text gegebenen Werth von $\frac{E''}{a'}$. Da man aber, wenn man $i = -2$ setzt, einen völlig gleichen Werth von E'' erhält, so scheint es mir, daſs der wahre Werth das doppelte ist, nämlich

$$\frac{E''}{a} = n'^2 . \frac{\left[a'^2 . \left(\frac{d.(a', a'')^{(2)}}{da'}\right) + \frac{2n'}{n' - n''} a' . (a', a'')^{(2)}\right]}{(n' - 2n'') . (3n' - 2n'')}.$$

Da das Glied $\frac{n^2}{i(n - n')^2}\, a\, A^{(i)}$ den Divisor $n - 2n'$ oder $n' - 2n''$ nie enthalten kann, so muſs man es im Koefficienten von sin $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ des Werths von δv weglassen; dann erhält man diesen Koefficienten aus dem Koefficienten von cos $i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ im Werth von $\frac{\delta r}{a}$, wenn man diesen mit $\frac{2n}{i(n - n')}$ multiplicirt. Da nun hier $i = 2$; $n = n'$ und $n' = n''$ ist, so ist $\frac{2n}{i(n - n')} = \frac{2n'}{2(n' - n'')} = \frac{n'}{n' - n''}$, und da n'' sehr nahe gleich $\frac{1}{2} n'$ ist, so ist $\frac{n'}{n' - n''}$ sehr nahe gleich 2. Dieses Verhältniſs gilt auch dann, wenn $i = -2$ wird, weil der Koefficient des Sinus und der Sinus selbst zugleich negativ werden, und ihr Product folglich unverändert bleibt. Man findet daher

$$F'' = 2 . \frac{E''}{a}.$$

$$\beta = \tfrac{3}{2} . E'' . \left[2(a, a')^{(1)} - a' . \left(\frac{d.(a, a')^{(1)}}{da'} \right) \right] . \left[\frac{a}{a'} . m' . m'' + \tfrac{9}{4} m m'' + \frac{a''}{4a'} . m . m' \right],$$

so erhält man, weil n sehr nahe gleich $2\,n'$ und n' sehr nahe gleich $2n''$ ist [145]),

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} - 3 . \frac{d^2 \xi'}{dt^2} + 2 . \frac{d^2 \xi''}{dt^2} = \beta . n^2 . \sin (nt - 3n't + 2n''t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''),$$

oder geuauer

145) Setzt man in den Werthen von $d^2\xi$, $d^2\xi'$ und $d^2\xi''$, $n = 4n''$ und $n' = 2n''$, so erhält man

$$\frac{d^2\xi}{dt} = -\tfrac{3}{2}\, n^{\frac{1}{3}} . \frac{da}{a^2} = -\tfrac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{a}} . \frac{da}{a^2};$$

$$\frac{d^2\xi'}{dt} = \tfrac{3}{2} \frac{m}{m'} . n'^{\frac{1}{3}} . \tfrac{1}{2} . 3 . \frac{da}{a^2} = \tfrac{9}{4} . \frac{m}{m'} . \frac{1}{\sqrt{a'}} . \frac{da}{a^2};$$

$$\frac{d^2\xi''}{dt} = -\tfrac{3}{2} \frac{m}{m''} . n''^{\frac{1}{3}} . \tfrac{1}{4} . 2 . \frac{da}{a^2} = -\tfrac{3}{4} . \frac{m}{m''} . \frac{1}{\sqrt{a''}} . \frac{da}{a^2};$$

und folglich $\frac{d^2\xi}{dt} - 3 . \frac{d^2\xi'}{dt} + 2 . \frac{d^2\xi''}{dt}$ gleich

$$-\tfrac{3}{2} \frac{da}{a^2} \left[\frac{1}{\sqrt{a}} + \tfrac{9}{2} . \frac{m}{m'} . \frac{1}{\sqrt{a'}} + \frac{m}{m''} . \frac{1}{\sqrt{a''}} \right],$$

oder wenn man mit $m'm''$ und mit a' multiplicirt und dividirt,

$$-\tfrac{3}{2}\, a' . \frac{da}{a^2} . \frac{1}{m' . m''} \left[\frac{m' . m''}{a' . \sqrt{a}} + \tfrac{9}{2}\, m . m'' . \frac{1}{a' . \sqrt{a'}} + m . m' . \frac{1}{a' . \sqrt{a''}} \right].$$

Setzt man nun der Kürze wegen $nt - 3\, n't + 2n''t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''$ gleich φ und

$\tfrac{3}{2}\, E'' . \left[2\,(a, a')^{(1)} - a' . \left(\frac{d.(a, a')^{(1)}}{da'} \right) \right]$ gleich γ, so erhält man

$-\tfrac{3}{2}\, a' . \frac{da}{a^2} . \frac{1}{m' . m''} = n\,dt . \gamma . \sin \varphi$, und wenn man diesen Werth im vorhergehenden Ausdruck substituirt und mit dt dividirt,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - 3 . \frac{d^2\xi'}{dt^2} + 2 . \frac{d^2\xi''}{dt^2} = n\,\gamma . \sin\varphi . \left[\frac{m' . m''}{a' . \sqrt{a}} + \tfrac{9}{2} \frac{m . m''}{a' . \sqrt{a'}} + \frac{m . m'}{a' . \sqrt{a''}} \right].$$

Multiplicirt man den zweyten Theil dieser Gleichung mit $n\,a^{\frac{3}{2}}$, welches der Einheit gleich ist, so verwandelt er sich in

$$n^2 . \gamma . \sin\varphi . \left[\frac{a}{a'} . m'.m'' + \tfrac{9}{2}\, m . m'' . \left(\frac{a}{a'} \right)^{\frac{3}{2}} + m . m' . \frac{a . \sqrt{a}}{a' . \sqrt{a''}} \right].$$

Nun ist $\left(\frac{a}{a'} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{n^{-1}}{n'^{-1}} = \frac{n'}{n} = \tfrac{1}{2}$ und $\frac{a . \sqrt{a}}{a' . \sqrt{a''}} = \frac{a''}{a'} . \frac{a . \sqrt{a}}{a'' . \sqrt{a''}} = \frac{a''}{a'} . \frac{n^{-1}}{n''^{-1}}$

$= \frac{a''}{a'} . \frac{n''}{n} = \tfrac{1}{4} . \frac{a''}{a'}$; substituirt man diese Werthe im vorigen Ausdruck, so wird er

$$n^2 . \gamma . \sin\varphi . \left[\frac{a}{a'} . m'.m'' + \tfrac{9}{4}\, m . m'' + \frac{m . m'}{4} . \frac{a''}{a'} \right].$$

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} - 3 \cdot \frac{d^2 \xi'}{dt^2} + 2 \cdot \frac{d^2 \xi''}{dt^2} = \beta n^2 . \sin (\xi - 3\xi' + 2\xi'' + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'').$$

Setzt man also

$$V = \xi - 3\xi' + 2\xi'' + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'',$$

so hat man

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = \beta n^2 . \sin V.$$

Da die mittlern Entfernungen a, a', a'', so wie auch die Gröſse n sich sehr wenig ändern, so kann man in dieser Gleichung $\beta . n^2$ als eine beständige Gröſse ansehen. Integrirt man sie, so erhält man [146])

$$dt = \frac{dV}{\sqrt{c - 2\beta n^2 . \cos V}},$$

wo c eine beständige willkührliche Gröſse ist. Die verschiedenen Werthe, deren diese beständige Gröſse fähig ist, geben folgende drey Fälle.

Wenn c positiv und gröſser als $\pm 2\beta n^2$ ist, so wird der Winkel V ohne Aufhören zunehmen [147]), und dieses muſs sich dann ereignen, wenn beym Anfang der Bewegung $(n - 3n' + 2n'')^2$ gröſser als $\pm 2\beta n^2 (1 \mp \cos V)$ ist, wo die obern oder die untern Zeichen Statt haben, je nachdem β positiv oder negativ ist [148]). Man kann sich leicht versichern, und wir werden es in der

146) Multiplicirt man die gegebene Differenzialgleichung mit $2\,dV$, so hat man

$$\frac{2\,dV . d^2V}{dt^2} = 2\beta n^2 . dV . \sin V, \text{ und wenn man integrirt}$$

$$\frac{dV^2}{dt^2} = \text{beständige Gröſse} - 2\beta . n^2 . \cos V,$$

woraus man sogleich den im Text gegebenen Werth von dt erhält.

147) Die Wurzelgröſse bleibt dann immer positiv, und folglich auch dV beständig positiv; V nimmt also beständig zu, da eine Gröſse nicht abnehmen kann, ohne daſs ihr Differenzial negativ wird.

148) Beym Anfang der Bewegung ist $\xi = nt + \varepsilon$; $\xi' = n't + \varepsilon'$; $\xi'' = n''t + \varepsilon''$, folglich $\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 = (n - 3n' + 2n'')^2$, und also vermöge der in der 146sten Anmerkung gegebenen Gleichung, $(n - 3n' + 2n'')^2 = c - 2\beta n^2 \cos V$

oder $(n - 3n' + 2n'')^2 - 2\beta n^2 (1 - \cos V) = c - 2\beta n^2 \ldots$ (1)

und $(n - 3n' + 2n'')^2 + 2\beta n^2 (1 + \cos V) = c + 2\beta n^2 \ldots$ (2).

Ist β positiv, so giebt die Gleichung (1) daſs $c - 2\beta n^2$ positiv seyn wird, wenn der erste Theil dieser Gleichung positiv ist; das heiſst, c ist gröſser als $2\beta n^2$, wenn $(n - 3n' + 2n'')^2$ gröſser als $2\beta n^2 (1 - \cos V)$ ist. Ist β negativ, so folgt aus der Gleichung (2), daſs c gröſser als $2\beta n^2$ ist, wenn $(n - 3n' + 2n'')^2$ gröſser als $2\beta n^2 (1 + \cos V)$ ist.

Theorie der Satelliten Jupiters besonders zeigen, daſs β bey den drey ersten Satelliten Jupiters eine positive Gröſse ist; setzt man also $\mp \varpi = \pi - V$, wo π der halbe Umkreis ist, so erhält man

$$dt = \frac{d\varpi}{\sqrt{c + 2\beta n^2 . \cos\varpi}}.$$

Die Wurzelgröſse $\sqrt{c + 2\beta n^2 . \cos\varpi}$ ist in dem Zwischenraum von $\varpi = 0$ bis $\varpi = \frac{\pi}{2}$ gröſser als $\sqrt{2\beta n^2}$, wenn c gleich oder gröſser als $2\beta n^2$ ist; man hat also innerhalb dieser Gränzen $\varpi > nt . \sqrt{2\beta}$; die Zeit t, welche der Winkel ϖ braucht, um von Null bis zum rechten Winkel zu wachsen, ist folglich kleiner als $\frac{\pi}{2n\sqrt{2\beta}}$. Der Werth von β hängt von den Massen m, m', m'' ab; die in den Bewegungen der drey ersten Jupiterssatelliten beobachteten Ungleichheiten, von welchen wir oben gesprochen haben, geben zwischen ihren Massen und der Masse Jupiters Verhältnisse, aus welchen folgt, daſs $\frac{\pi}{2n\sqrt{2\beta}}$ kleiner als zwey Jahre ist, wie man in der Theorie dieser Satelliten sehen wird; der Winkel ϖ wird also in weniger als zwey Jahren von Null bis zum rechten Winkel gelangen; die Beobachtungen der Jupiterssatelliten geben aber seit ihrer Entdeckung ϖ beständig gleich Null oder unmerklich; der Fall, welchen wir untersuchen, ist also nicht der Fall der drey ersten Jupiterssatelliten.

Wenn die beständige Gröſse c kleiner als $\pm 2\beta n^2$ ist, so kann der Winkel V nur oscilliren; er wird niemals zwey rechte Winkel erreichen, wenn β negativ ist, weil alsdann die Wurzelgröſse $\sqrt{c - 2\beta n^2 . \cos V}$ eine unmögliche Gröſse werden würde; er wird niemals gleich Null seyn, wenn β positiv ist. Im ersten Fall wird sein Werth abwechselnd gröſser und kleiner als Null, im zweyten Fall wird er abwechselnd gröſser und kleiner als zwey rechte Winkel seyn. Alle Beobachtungen der drey ersten Satelliten Jupiters zeigen uns, daſs der zweyte Fall bey diesen Gestirnen Statt findet. Der Werth von β muſs also bey ihnen positiv seyn, und da die Theorie der Schwere β positiv giebt, so kann man dies als eine neue Bestätigung dieser Theorie ansehen.

Wir wollen nun die Gleichung

$$dt = \frac{d\varpi}{\sqrt{c + 2\beta n^2 . \cos \varpi}}$$

wieder vornehmen. Da der Winkel ϖ nach den Beobachtungen immer sehr klein ist, so können wir $\cos \varpi = 1 - \frac{1}{2}\varpi^2$ setzen; integrirt man dann die vorhergehende Gleichung, so erhält man [149])

$$\varpi = \lambda . \sin (nt \sqrt{\beta} + \gamma),$$

wo λ und γ zwey willkührliche beständige Gröſsen sind, welche die Beobachtungen allein bestimmen können. Bis jetzt hat man aus ihnen diese Ungleichheit nicht erkannt; dies zeigt, daſs sie sehr klein ist.

Aus der vorhergehenden Analysis flieſsen folgende Sätze. Da der Winkel $nt - 3n't + 2n''t + \varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''$ sich nur wenig von zwey rechten Winkeln auf beiden Seiten entfernt, so ist sein mittlerer Werth zwey rechten Winkeln gleich; man hat also, wenn man nur auf die mittlern Gröſsen Rücksicht nimmt, $n - 3n' + 2n'' = 0$, das heiſst: die mittlere Bewegung des ersten Satelliten, weniger die dreyfache mittlere Bewegung des zweyten, plus die doppelte Bewegung des dritten ist genau und beständig gleich Null. Es ist nicht nothwendig, daſs diese Gleichheit ursprünglich genau Statt hatte, welches unendlich wenig wahrscheinlich seyn würde; es ist hinreichend, daſs sie nur sehr nahe Statt hatte, und daſs $n - 3n' + 2n''$, das Zeichen abgerechnet, kleiner als $\lambda . n\sqrt{\beta}$ war; die gegenseitige Anziehung der drey Satelliten war dann zureichend, um diese strenge Gleichheit hervorzubringen.

149) Es ist nämlich $dt = \frac{d\varpi}{\sqrt{c + 2\beta n^2 - \beta n^2 \varpi^2}}$, und folglich

$$n\sqrt{\beta} . dt = \frac{\frac{n\sqrt{\beta}}{\sqrt{c + 2\beta n^2}} . d\varpi}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\sqrt{\beta}}{\sqrt{c + 2\beta n^2}} . \varpi\right)^2}}, \text{ und wenn man integrirt}$$

$$\text{beständige Gröſse} + n\sqrt{\beta} . t = Arc . \sin \frac{n\sqrt{\beta}}{\sqrt{c + 2\beta n^2}} . \varpi, \text{ oder}$$

$$\sin (\text{beständige Gröſse} + n\sqrt{\beta} . t) = \frac{n\sqrt{\beta}}{\sqrt{c + 2\beta n^2}} . \varpi.$$

Man hat ferner $\varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon''$ gleich zwey rechten Winkeln; folglich ist die mittlere Länge des ersten Satelliten, weniger die dreyfache Länge des zweyten, plus die doppelte Länge des dritten genau und beständig gleich zwey rechten Winkeln. Vermittelst dieses Lehrsatzes verwandeln sich die vorhergehenden Werthe von $\delta r'$ und von $\delta v'$ in folgende:

$$\delta r' = (m\,G - m''\,E'') \,.\, \cos\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon);$$

$$\delta v' = (m\,H - m''\,F'') \,.\, \sin\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon).$$

Die beiden Ungleichheiten der Bewegung von m', welche aus den Wirkungen von m und von m'' entspringen, vereinigen sich also in eine einzige, und werden immer vereinigt bleiben. Es folgt noch aus demselben Lehrsatz, dafs die drey ersten Satelliten niemals zugleich verfinstert werden können; sie können niemals zusammen in Opposition oder Conjunction mit der Sonne vom Jupiter aus gesehen werden; denn die vorhergehenden Lehrsätze gelten ebenfalls für die mittlern synodischen Bewegungen und für die mittlern synodischen Längen der drey Satelliten, wovon man sich leicht versichern kann [150]). Diese beiden Lehrsätze finden noch Statt, ungeachtet der Aenderungen, welche die mittlern Bewegungen der Satelliten, theils durch eine Ursache, welche derjenigen ähnlich ist, welche die mittlere Bewegung des Monds ändert, theils durch den Widerstand eines sehr dünnen Mittels erfahren. Denn es ist klar, dafs diese verschiedenen Ursachen zu dem Werth von $\frac{d^2V}{dt^2}$ nur Gröfsen von der Form $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ hinzusetzen werden, welche nur durch die Integrationen bemerkbar beträchtlich werden können; setzt man also $V = \pi - \varpi$, und ϖ sehr klein, so wird die Differenzialgleichung für V sich in folgende verwandeln:

$$0 = \frac{d^2\varpi}{dt^2} + \beta\,n^2\,.\,\varpi + \frac{d^2\psi}{dt^2};$$

wo die Periode des Winkels $nt\,.\,\sqrt{\beta}$ eine sehr kleine Anzahl Jahre enthält, während welcher die in $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ enthaltenen Gröfsen entweder beständig sind, oder

150) Es sey N die mittlere Bewegung Jupiters, so sind $n - N$, $n' - N$, $n'' - N$ die relativen oder synodischen Bewegungen der drey ersten Satelliten Jupiters, und da
$(n - N)\,t - 3\,(n' - N)\,t + 2\,(n'' - N)\,t = nt - 3\,n't + 2\,n''t$ ist, weil sich die Gröfsen Nt gegenseitig aufheben, so st $(n - N)\,t - 3\,(n' - N)\,t + 2\,(n'' - N)\,t = 0$.

mehrere Jahrhunderte umfassen. Integrirt man die vorhergehende Gleichung, so erhält man [151])

$$\varpi = \lambda \,.\, \sin(nt \,.\, \sqrt{\beta} + \gamma) - \frac{d^2\psi}{\beta\, n^2 \,.\, dt^2}.$$

Der Werth von ϖ wird also immer sehr klein seyn, und die Sekulargleichungen der mittlern Bewegungen der drey ersten Satelliten werden immer durch die gegenseitigen Wirkungen dieser Gestirne so geordnet werden, daſs die Sekulargleichung des ersten plus die doppelte Sekulargleichung des dritten der dreyfachen Sekulargleichung des zweyten gleich ist.

Die vorhergehenden Lehrsätze geben zwischen den sechs beständigen Gröſsen n, n', n'', ε, ε', ε'' zwey Bedingungsgleichungen, welche diese willkührlichen Gröſsen auf vier herabsetzen; die zwey willkührlichen Gröſsen λ und γ des Werthes von ϖ ersetzen aber ihre Stelle. Dieser Werth vertheilt sich zwischen den drey Satelliten so, daſs, wenn man p, p', p'' die Koefficienten von $\sin(nt \,.\, \sqrt{\beta} + \gamma)$ in den Ausdrücken von v, v', v'' nennt, diese Koefficienten im Verhältniſs der vorhergehenden Werthe von $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\xi'}{dt^2}$ und $\frac{d^2\xi''}{dt^2}$ seyn werden, und daſs man überdies $p - 3p' + 2p'' = \lambda$ haben wird. Hieraus entspringt in den mittlern Bewegungen der drey ersten Satelliten Jupiters eine Ungleichheit, welche für jeden derselben nur durch ihren Koefficienten unterschieden seyn, und welche in diesen Bewegungen eine Art von Libration von willkührlicher Ausdehnung verursachen wird. Die Beobachtungen haben gezeigt, daſs sie unmerklich ist.

67. Wir wollen nun die Aenderungen der Eccentricitäten und der Sonnennähen der Bahnen betrachten. Hierzu werden wir die im 64sten Satz gefun-

151) Da die Gröſsen, welche $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ enthält, sich während einer kleinen Anzahl Jahre nur unmerklich ändern, weil ihre Perioden mehrere Jahrhunderte umfassen, so kann man sie als eine beständige Gröſse ansehen. Die Gleichung

$$0 = \frac{d^2\varpi}{(n\sqrt{\beta} \,.\, dt)^2} + \varpi + \frac{d^2\psi}{n^2\,\beta \,.\, dt^2}$$

giebt, wenn man das letzte Glied wegläſst, $\varpi = \lambda \sin(n\sqrt{\beta} \,.\, t + \gamma)$, wo λ und γ zwey beständige Gröſsen sind; man sieht sogleich, daſs die beständige Gröſse in der Differenzialgleichung nicht durch $d^2\varpi$, sondern bloſs durch ϖ aufgehoben werden kann, dadurch, daſs man dem vorhergehenden Werth von ϖ die beständige Gröſse mit entgegengesetzten Zeichen hinzusetzt.

denen Ausdrücke von df, df', df'' wieder vornehmen; wir nennen r den auf die Ebene der x und der y projicirten Radius vector von m; v den Winkel, welchen diese Projection mit der Axe der x macht, und s die Tangente der Breite von m über dieselbe Ebene, so erhält man

$$x = r.\cos v; \qquad y = r.\sin v; \qquad z = rs;$$

hieraus kann man leicht schlieſsen [152])

$$x.\left(\frac{dR}{dy}\right) - y.\left(\frac{dR}{dx}\right) = \left(\frac{dR}{dv}\right);$$

$$x.\left(\frac{dR}{dz}\right) - z.\left(\frac{dR}{dx}\right) = (1+s^2).\cos v.\left(\frac{dR}{ds}\right) - rs.\cos v.\left(\frac{dR}{dr}\right) + s.\sin v.\left(\frac{dR}{dv}\right);$$

$$y.\left(\frac{dR}{dz}\right) - z.\left(\frac{dR}{dy}\right) = (1+s^2).\sin v.\left(\frac{dR}{ds}\right) - rs.\sin v.\left(\frac{dR}{dr}\right) - s.\cos v.\left(\frac{dR}{dv}\right).$$

Man hat überdies nach dem 64sten Satz

152) Da R eine Function von x, y, z und auch eine Function von r, v, s ist, so hat man folgende zwey Ausdrücke für dR, welche also einander gleich sind:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)dx + \left(\frac{dR}{dy}\right)dy + \left(\frac{dR}{dz}\right)dz = \left(\frac{dR}{dr}\right)dr + \left(\frac{dR}{dv}\right)dv + \left(\frac{dR}{ds}\right)ds \ldots (1).$$

Nun ist $dx = dr.\cos v - dv.r.\sin v$ und $dy = dr.\sin v + dv.r.\cos v$; folglich $dr = dx.\cos v + dy.\sin v$ und $dv = dy.\frac{\cos v}{r} - dx.\frac{\sin v}{r}$; ferner $dz = s.dr + r.ds$ oder

$ds = \frac{dz}{r} - \frac{s}{r}dr$, und wenn man statt dr seinen Werth substituirt,

$ds = \frac{dz}{dr} - \frac{s}{r}.dx.\cos v - \frac{s}{r}.dy.\sin v$. Setzt man diese Werthe von dr, dv und ds in die Gleichung (1), so müssen die Koefficienten von dx, von dy und von dz in beiden Theilen dieser Gleichung einander gleich seyn; dies giebt folgende drey Gleichungen:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right) = \left(\frac{dR}{dr}\right)\cos v - \left(\frac{dR}{dv}\right)\frac{\sin v}{r} - \left(\frac{dR}{ds}\right)\frac{s}{r}.\cos v \ldots (2)$$

$$\left(\frac{dR}{dy}\right) = \left(\frac{dR}{dr}\right)\sin v + \left(\frac{dR}{dv}\right)\frac{\cos v}{r} - \left(\frac{dR}{ds}\right)\frac{s}{r}.\sin v \ldots (3)$$

$$\left(\frac{dR}{dz}\right) = \frac{1}{r}.\left(\frac{dR}{ds}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Multiplicirt man den ersten Theil der Gleichung (2) mit $-y$, ihren zweyten Theil mit dem Werth von $-y$, nämlich $-r.\sin v$; addirt man hierzu die Gleichung (3) mit x oder mit $r.\cos v$ multiplicirt, so erhält man

$$x\left(\frac{dR}{dy}\right) - y\left(\frac{dR}{dx}\right) = \left(\frac{dR}{dv}\right).$$

Man erhält durch ähnliche Multiplicationen leicht die beiden übrigen im Text gegebenen Gleichungen.

$$xdy - ydx = cdt; \qquad xdz - zdx = c'dt; \qquad ydz - zdy = c''dt.$$

Die Differenzialgleichungen für f, f', f'' verwandeln sich so in folgende:

$$df = -dy.\left(\frac{dR}{dv}\right) - dz.\left[(1+s^2).\cos v.\left(\frac{dR}{ds}\right) - rs.\cos v.\left(\frac{dR}{dr}\right) + s.\sin v.\left(\frac{dR}{dv}\right)\right]$$
$$- cdt.\left[\sin v.\left(\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\cos v}{r}.\left(\frac{dR}{dv}\right) - \frac{s.\sin v}{r}.\left(\frac{dR}{ds}\right)\right] - \frac{c'dt}{r}.\left(\frac{dR}{ds}\right);$$

$$df' = dx.\left(\frac{dR}{dv}\right) - dz.\left[(1+s^2).\sin v.\left(\frac{dR}{ds}\right) - rs.\sin v.\left(\frac{dR}{dr}\right) - s.\cos v.\left(\frac{dR}{dv}\right)\right]$$
$$+ cdt.\left[\cos v.\left(\frac{dR}{dr}\right) - \frac{\sin v}{r}.\left(\frac{dR}{dv}\right) - \frac{s.\cos v}{r}.\left(\frac{dR}{ds}\right)\right] - \frac{c''dt}{r}.\left(\frac{dR}{ds}\right);$$

$$df'' = dx.\left[(1+s^2).\cos v.\left(\frac{dR}{ds}\right) - rs.\cos v.\left(\frac{dR}{dr}\right) + s.\sin v.\left(\frac{dR}{dv}\right)\right]$$
$$+ dy.\left[(1+s^2).\sin v.\left(\frac{dR}{ds}\right) - rs.\sin v.\left(\frac{dR}{dr}\right) - s.\cos v.\left(\frac{dR}{dv}\right)\right]$$
$$+ c'dt.\left[\cos v.\left(\frac{dR}{dr}\right) - \frac{\sin v}{r}.\left(\frac{dR}{dv}\right) - \frac{s.\cos v}{r}.\left(\frac{dR}{ds}\right)\right]$$
$$+ c''dt.\left[\sin v.\left(\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\cos v}{r}.\left(\frac{dR}{dv}\right) - \frac{s.\sin v}{r}.\left(\frac{dR}{ds}\right)\right].$$

Die Gröſsen c', c'' hängen von der Neigung der Bahn von m gegen die feste Ebene ab, wie wir im 64sten Satz gesehen haben, so daſs diese Gröſsen gleich Null sind, wenn diese Neigung gleich Null ist; man sieht überdies leicht aus der Natur von R, daſs $\left(\frac{dR}{ds}\right)$ von der Ordnung der Neigungen der Bahnen ist [153]). Vernachlässigt man also die Quadrate und Producte dieser Neigungen, so verwandeln sich die vorhergehenden Ausdrücke von df und df' in folgende:

$$df = -dy.\left(\frac{dR}{dv}\right) - cdt.\left[\sin v.\left(\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\cos v}{r}.\left(\frac{dR}{dv}\right)\right];$$
$$df' = dx.\left(\frac{dR}{dv}\right) + cdt.\left[\cos v.\left(\frac{dR}{dr}\right) - \frac{\sin v}{r}.\left(\frac{dR}{dv}\right)\right];$$

153) Die Glieder von R sind von der Form $A\,(B + z^2)^m$ und $C\,[D + (z' - z)^2]^n$, oder wenn man rs statt z setzt, $A\,(B + r^2 s^2)^m$ und $C\,[D + (r's' - rs)^2]^n$, und wenn man diese Glieder in Beziehung auf s differenzirt, so erhält man $2m\,A.(B + r^2 s^2)^{m-1}.r^2 sds$ und $2n.C.[D + (r's' - rs)]^{n-1}.(r's' - rs).r.ds$.

man hat aber

$$dx = d.(r.\cos v); \qquad dy = d.(r.\sin v); \qquad c\,dt = x\,dy - y\,dx = r^2\,dv;$$

folglich

$$df = -(dr.\sin v + 2\,r\,dv.\cos v).\left(\frac{dR}{dv}\right) - r^2.dv.\sin v.\left(\frac{dR}{dr}\right);$$

$$df' = (dr.\cos v - 2\,r\,dv.\sin v).\left(\frac{dR}{dv}\right) + r^2.dv.\cos v.\left(\frac{dR}{dr}\right).$$

Diese Gleichungen werden genauer seyn, wenn man statt der festen Ebene der x und der y die Ebene der Bahn von m zu einer gegebenen Zeit nimmt. Denn alsdann sind c', c'' und s von der Ordnung der stöhrenden Kräfte, und die Gröſsen, welche man vernachlässigt, sind folglich von der Ordnung der Quadrate der stöhrenden und in das Quadrat der respectiven Neigung der Bahnen von m oder von m' multiplicirten Kräfte.

Die Werthe von r, dr, dv, $\left(\frac{dR}{dr}\right)$, $\left(\frac{dR}{dv}\right)$ bleiben augenscheinlich dieselben, was auch die Lage des Punktes ist, von welchen man die Längen zählt; vermindert man aber v um einen rechten Winkel, so verwandelt sich $\sin v$ in $-\cos v$ und $\cos v$ in $\sin v$; der Ausdruck von df verwandelt sich so in den von df'. Es folgt hieraus, daſs man den Werth von df' erhalten wird, wenn man den Werth von df in eine Reihe entwickelt hat, welche nach den Sinus und Kosinus von Winkeln, welche mit der Zeit proportional wachsen, geordnet ist, und wenn man dann in diesem Werth von df die Winkel ε, ε', ϖ, ϖ', θ und θ' um einen rechten Winkel vermindert.

Die Gröſsen f und f' bestimmen die Lage der Sonnennähe und die Eccentricität der Bahn. Man hat nämlich im 64sten Satz gesehen, daſs

$$\text{tang}\, I = \frac{f'}{f}$$

ist, wo I die Länge der Sonnennähe auf der festen Ebene ist. Wenn diese Ebene die Ebene der ursprünglichen Bahn von m ist, so hat man bis auf die Gröſsen von der Ordnung der Quadrate der stöhrenden und in das Quadrat

Man sieht, daſs alle Glieder dieses Differenzials entweder in s oder in $(r's' - rs)$ multiplicirt sind, und daſs sie folglich von der Ordnung der Neigungen der Bahnen sind.

der respectiven Neigung der Bahnen multiplicirten Kräfte, $I = \varpi$, wo ϖ die Länge der Sonnennähe auf der Bahn ist; man hat folglich alsdann

$$\text{tang}\, \varpi = \frac{f'}{f}.$$

Dies giebt

$$\sin \varpi = \frac{f'}{\sqrt{f^2 + f'^2}}; \qquad \cos \varpi = \frac{f}{\sqrt{f^2 + f'^2}}.$$

Man hat ferner nach dem 64sten Satz

$$\mu e = \sqrt{f^2 + f'^2 + f''^2}; \qquad f'' = \frac{f'c' - fc''}{c}.$$

Da nun c' und c'' in der vorhergehenden Voraussetzung von der Ordnung der stöhrenden Kräfte sind, so ist f'' von derselben Ordnung, und man hat also $\mu e = \sqrt{f^2 + f'^2}$, wenn man die Glieder, welche vom Quadrat dieser Kräfte abhängen, wegläſst. Substituirt man in den vorhergehenden Ausdrücken von $\sin \varpi$ und $\cos \varpi$ statt $\sqrt{f^2 + f'^2}$ seinen Werth μe, so erhält man

$$\mu e \,.\, \sin \varpi = f'; \qquad \mu e \,.\, \cos \varpi = f.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen die Eccentricität und die Lage der Sonnennähe, und man erhält daraus leicht [154])

$$\mu^2 \,.\, e de = f df + f' df'; \qquad \mu^2 e^2 \,.\, d\varpi = f df' - f' df.$$

Nimmt man für die Ebene der x und y die Ebene der Bahn von m an, so hat man nach dem 19ten und 20sten Satz für die unveränderliche Ellipse

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e \,.\, \cos\,(v - \varpi)}; \qquad dr = \frac{r^2\, dv \,.\, e \,.\, \sin\,(v - \varpi)}{a\,(1 - e^2)};$$

$$r^2\, dv = a^2\, n\, dt \,.\, \sqrt{1 - e^2},$$

und diese Gleichungen haben nach dem 63sten Satz auch im Fall der veränderlichen Ellipsen Statt; die Ausdrücke von df und df' verwandeln sich so in folgende:

154) Das Differenzial der Gleichung $\text{tang}\, \varpi = \frac{f'}{f}$ giebt $\frac{d\varpi}{\cos \varpi^2} = \frac{f \,.\, df' - f' \,.\, df}{f^2}$, oder wenn man mit f^2 multiplicirt, und statt $\left(\frac{f}{\cos \varpi}\right)^2$ seinen Werth $\mu^2 e^2$ setzt, $\mu^2 e^2 \,.\, d\varpi = f \,.\, df' - f' \,.\, df$.

$$df = -\frac{a\,n\,dt}{\sqrt{1-e^2}} \,.\, [2\cos v + \tfrac{3}{2}\,e\,.\cos\varpi + \tfrac{1}{2}\,e\,.\cos(2v-\varpi)] \,.\left(\frac{dR}{dv}\right)$$

$$- a^2 n\,dt\,.\sqrt{1-e^2}\,.\sin v\,.\left(\frac{dR}{dr}\right);$$

$$df' = -\frac{a\,n\,dt}{\sqrt{1-e^2}} \,.\, [2\sin v + \tfrac{3}{2}\,e\,.\sin\varpi + \tfrac{1}{2}\,e\,.\sin(2v-\varpi)] \,.\left(\frac{dR}{dv}\right)$$

$$+ a^2 n\,dt\,.\sqrt{1-e^2}\,.\cos v\,.\left(\frac{dR}{dr}\right);$$

folglich [155])

$$e\,d\varpi = -\frac{a\,n\,dt}{\mu\,.\sqrt{1-e^2}} \,.\sin(v-\varpi)\,.\,[2+e\,.\cos(v-\varpi)]\,.\left(\frac{dR}{dv}\right)$$

$$+\frac{a^2\,.\,n\,dt\,\sqrt{1-e^2}}{\mu}\,.\cos(v-\varpi)\,.\left(\frac{dR}{dr}\right);$$

$$de = -\frac{a\,n\,dt}{\mu\,.\sqrt{1-e^2}} \,.\,[2\cos(v-\varpi)+e+e\,.\cos(v-\varpi)^2]\,.\left(\frac{dR}{dv}\right)$$

$$-\frac{a^2\,n\,dt}{\mu}\,.\sqrt{1-e^2}\,.\sin(v-\varpi)\,.\left(\frac{dR}{dr}\right).$$

Man kann diesem Ausdruck von de eine andere Gestalt geben, welche in einigen Fällen bequemer ist. Hierzu bemerken wir, daſs $dr.\left(\frac{dR}{dr}\right) = dR - dv\left(\frac{dR}{dv}\right)$ [156]) ist. Substituirt man statt r und dr ihre vorhergehenden Werthe, so erhält man

$r^2 dv$

155) Da $f = \sqrt{f^2 + f'^2}\,.\cos\varpi = \mu e\,.\cos\varpi$ und $f' = \mu e\,.\sin\varpi$ ist, so multiplicire man die Gleichung für df' mit f oder mit $\mu e\,.\cos\varpi$, die Gleichung für df mit $-\mu e\,.\sin\varpi$; die Summe beider Gleichungen giebt dann $fdf' - f'df$ oder $\mu^2 e^2\,.\,d\varpi$, woraus man sogleich $e\,d\varpi$ erhält. Man erhält auf ähnliche Art, wenn man die Gleichung für df mit f oder mit $\mu e\,.\cos\varpi$ und die Gleichung für df' mit $\mu e\,.\sin\varpi$ multiplicirt und beide Gleichungen addirt, den Werth von $fdf + f'df'$ oder von $\mu^2 e\,de$, woraus man sogleich den Werth von de findet.

156) Da R eine Function von r, v, s ist, so ist

$$dR = dr\,.\left(\frac{dR}{dr}\right) + dv\,.\left(\frac{dR}{dv}\right) + ds\,.\left(\frac{dR}{ds}\right);$$

man hat aber im Vorhergehenden gesehen, daſs $\left(\frac{dR}{ds}\right)$ von der Ordnung der Neigungen der Bahnen, und daſs folglich $s\,.\left(\frac{dR}{ds}\right)$ von der Ordnung der Quadrate dieser Gröſsen ist, welche kleine Gröſsen

hier

$$r^2 dv \,.\, e \,.\, \sin(v - \varpi) \,.\, \left(\frac{dR}{dr}\right) = a\,(1 - e^2) \,.\, \mathrm{d}R - a\,(1 - e^2) \,.\, dv \,.\, \left(\frac{dR}{dv}\right);$$

man hat aber

$$r^2 dv = a^2 n\,dt \,.\, \sqrt{1 - e^2}; \qquad dv = \frac{n\,dt \,.\, [1 + e \,.\, \cos(v - \varpi)]^2}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}};$$

folglich

$$a^2 n\,dt \,.\, \sqrt{1 - e^2} \,.\, \sin(v - \varpi) \,.\, \left(\frac{dR}{dr}\right)$$

$$= \frac{a\,(1 - e^2)}{e} \,.\, \mathrm{d}R - \frac{a\,n\,dt}{e \,.\, \sqrt{1 - e^2}} \,.\, [1 + e \,.\, \cos(v - \varpi)]^2 \,.\, \left(\frac{dR}{dr}\right).$$

Der vorhergehende Ausdruck von de giebt so

$$e\,de = \frac{a\,n\,dt \,.\, \sqrt{1 - e^2}}{\mu} \,.\, \left(\frac{dR}{dv}\right) - \frac{a \,.\, (1 - e^2)}{\mu} \,.\, \mathrm{d}R.$$

Man kann zu dieser Formel auf folgende sehr einfache Art gelangen. Man hat nach Satz 64

$$\frac{dc}{dt} = y \,.\, \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \,.\, \left(\frac{dR}{dy}\right) = -\left(\frac{dR}{dv}\right);$$

man hat aber nach dem nämlichen Satz $c = \sqrt{\mu a\,(1 - e^2)}$; dies giebt

$$dc = \frac{da \,.\, \sqrt{\mu a\,(1 - e^2)}}{2a} - \frac{e\,de \,.\, \sqrt{\mu a}}{\sqrt{1 - e^2}};$$

folglich

$$e\,de = \frac{a\,n\,dt \,.\, \sqrt{1 - e^2}}{\mu} \,.\, \left(\frac{dR}{dv}\right) + a \,.\, (1 - e^2)\,\frac{da}{2\,a^2};$$

man hat ferner nach Satz 64

$$\frac{\mu\,da}{2\,a^2} = -\,\mathrm{d}R.$$

Man erhält so für $e\,de$ denselben Ausdruck wie vorher.

68. Wir haben im 65sten Satz gesehen, daſs die Aenderungen der groſsen Axe und der mittlern Bewegung nur periodische, von der Lage der Körper m,

hier vernachlässigt werden. Man erhält also

$$\mathrm{d}R = dr \,.\, \left(\frac{dR}{dr}\right) + dv \,.\, \left(\frac{dR}{dv}\right).$$

m', m'' u. s. w. abhängende Gröſsen enthalten, wenn man die Quadrate der stöhrenden Kräfte vernachlässigt. Dies ist bey den Aenderungen der Eccentricitäten und Neigungen nicht der Fall: ihre Differenzialausdrücke enthalten Glieder, welche von dieser Lage unabhängig sind, und welche, wenn sie in vollkommner Strenge beständig wären, durch die Integration Glieder, welche der Zeit proportional sind, hervorbringen würden, wodurch endlich die Bahnen sehr eccentrisch und sehr gegen einander geneigt werden würden. Die vorhergehenden Näherungen, welche auf die geringe Eccentricität und Neigung der Bahnen gegründet sind, würden also unzulänglich und selbst fehlerhaft werden. Die dem Anschein nach beständigen Glieder, welche sich in den Differenzialausdrücken der Eccentricitäten und der Neigungen befinden, sind Functionen der Elemente der Bahnen, so daſs sie sich mit einer äuſserst groſsen Langsamkeit ändern, in Vergleichung mit den Aenderungen, welche sie in ihnen hervorbringen. Man begreiſt, daſs daraus in diesen Elementen beträchtliche, von der gegenseitigen Lage der Körper des Systems unabhängige, Ungleichheiten entstehen müssen, deren Perioden von den Verhältnissen der Massen m, m' u. s. w. zur Masse M abhängen. Dies sind die Ungleichheiten, welche wir vorher Sekularungleichheiten genannt, und im 7ten Kapitel betrachtet haben. Wir wollen, um sie durch diese Methode zu bestimmen, den Werth von df des vorhergehenden Satzes wieder vornehmen:

$$df = -\frac{a\,n\,dt}{\sqrt{1-e^2}} \,.\, [2\cos v + \tfrac{3}{2}e \,.\, \cos \varpi + \tfrac{1}{2}e \,.\, \cos(2v - \varpi)] \,.\, \left(\frac{dR}{dv}\right)$$

$$- a^2 n\,dt \,.\, \sqrt{1-e^2} \,.\, \sin v \,.\, \left(\frac{dR}{dr}\right).$$

Wir werden in der Entwickelung dieser Gleichung die Quadrate und Producte der Eccentricitäten und der Neigung der Bahnen vernachlässigen, und von den Gliedern, die von den Eccentricitäten und Neigungen abhängen, nur diejenigen behalten, welche beständig sind; wir setzen ferner, wie im 48sten Satz,

$$r = a\,(1 + u_{,}); \qquad r' = a'\,(1 + u_{,}');$$

$$v = nt + \varepsilon + v_{,}; \qquad v' = n't + \varepsilon' + v_{,}'.$$

Dieses vorausgesetzt, substituire man statt R seinen im 48sten Satz gefundenen Werth; man betrachte ferner, daſs man nach demselben Satz

$$\left(\frac{dR}{dr}\right) = \frac{a}{r} \,.\, \left(\frac{dR}{da}\right) = (1 - u_{,}) \,.\, \left(\frac{dR}{da}\right)$$

hat; man substituire endlich statt $u_{,}$, $u_{,}'$, $v_{,}$ und $v_{,}'$ ihre im 22sten Satz gegebenen Werthe $- e.\cos(nt + \varepsilon - \varpi)$; $- e'.\cos(n't + \varepsilon' - \varpi')$; $2e.\sin(nt + \varepsilon - \varpi)$ und $2e'.\sin(n't + \varepsilon' - \varpi')$; man behalte von den Gliedern, die von den ersten Potenzen der Eccentricitäten der Bahnen abhängen, nur diejenigen, welche beständig sind, und vernachlässige die Quadrate der Eccentricitäten und der Neigungen, so erhält man [157])

$$df = \frac{am'n\,dt}{2}\,.\,e\,.\sin\varpi\left[a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2}a^2.\left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)\right]$$
$$+ am'ndt.e'.\sin\varpi'.\left[A^{(1)} + \tfrac{1}{2}a.\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2}a'.\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right) + \tfrac{1}{4}aa'.\left(\frac{d^2A^{(1)}}{da.da'}\right)\right]$$
$$- am'ndt.\Sigma.\left[iA^{(i)} + \tfrac{1}{2}a.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\right].\sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon].$$

157) Es ist bequemer, statt des im 48sten Satz gegebenen Werths von R, den im 50sten Satz gefundenen Werth zu brauchen. Man erhält dann $\left(\frac{dR}{dv}\right)$ oder $\left(\frac{dR}{d.nt}\right)$ gleich

$$\frac{m'}{2}.\Sigma.iA^{(i)}\sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$
$$-\frac{m'}{2}.\Sigma.\left[a.\left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) + 2i.A^{(i)}\right].e.(i-1)\sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi]$$
$$-\frac{m'}{2}.\Sigma.\left[a'.\left(\frac{dA^{(i-1)}}{da'}\right) - 2(i-1)A^{(i-1)}\right].e'.(i-1).\sin[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon - \varpi'].$$

Da nun $\cos v = \cos(nt + \varepsilon + v_{,}) = \cos(nt + \varepsilon) - v_{,}.\sin(nt + \varepsilon) = \cos(nt + \varepsilon) + e.\cos(2nt + 2\varepsilon - \varpi) - e.\cos\varpi$ ist, und da $e.\cos(2v - \varpi) = e.\cos(2nt + 2\varepsilon - \varpi)$ ist, weil man die Quadrate von e vernachlässigt, so ist der Koefficient von $\left(\frac{dR}{dv}\right)$ gleich

$$2\cos(nt + \varepsilon) - \tfrac{1}{2}e.\cos\varpi + \tfrac{5}{2}e.\cos(2nt + 2\varepsilon - \varpi).$$

Da dieser Koefficient den Winkel $n't$ nicht enthält, so werden die Glieder von $\left(\frac{dR}{dv}\right)$, welche diesen Winkel enthalten, ihn auch nach der Multiplication mit diesem Koefficienten enthalten, und folglich nicht beständig seyn. Man will aber von den in e multiplicirten Gliedern von $\left(\frac{dR}{dv}\right)$ nur die beständigen beybehalten; man muſs also nur diejenigen behalten, wo $n't$ sich nicht findet, das heiſst bloſs diejenigen, die aus der Voraussetzung $i = 0$ entspringen; dies giebt

$$\left(\frac{dR}{dv}\right) = \frac{m'}{2}\Sigma i.A^{(i)}.\sin i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \frac{m'}{2}.a.\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right).e.\sin(nt + \varepsilon - \varpi)$$
$$+\frac{m'}{2}.\left[a'.\left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right) + 2.A^{(1)}\right].e'.\sin(nt + \varepsilon - \varpi'),$$

Das Integralzeichen Σ erstreckt sich in diesem Ausdruck, so wie im Werth von R des 48sten Satzes, auf alle ganze positive und negative Werthe von i, den Werth $i = 0$ selbst mit inbegriffen.

Man erhält nach dem vorhergehenden Satz den Werth von df', wenn man im Werth von df die Winkel ε, ε', ϖ und ϖ' um einen rechten Winkel vermindert; dies giebt

und wenn man statt $a' . \left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right)$ seinen im 49sten Satz gefundenen Werth $- A^{(1)} - a\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)$ setzt,

$$\left(\frac{dR}{dv}\right) = \frac{m'}{2} . \Sigma . i A^{(i)} . \sin i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + \frac{m'}{2} . a . \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) . e . \sin (nt + \varepsilon - \varpi)$$

$$+ \frac{m'}{2} . \left[A^{(1)} - a\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)\right] . e' . \sin (nt + \varepsilon - \varpi').$$

Multiplicirt man nun $\left(\frac{dR}{dv}\right)$ mit seinem oben gegebenen Koefficienten, wobey man aber unter den in e multiplicirten Gliedern des Products nur die beständigen Glieder beybehält, so sieht man leicht, daſs die Factoren $\frac{5}{2} e . \cos (2 nt + 2 \varepsilon - \varpi)$ und $- \frac{1}{2} e . \cos \varpi$ gar kein solches Glied geben, und man erhält

$$2 . \left(\frac{dR}{dv}\right) . \cos (nt + \varepsilon) = m' . \Sigma . i A^{(i)} . \sin [i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon]$$

$$- \frac{m'}{2} . a . \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) . e . \sin \varpi - \frac{m'}{2} . \left[A^{(1)} - a\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)\right] . e' . \sin \varpi';$$

man muſs diese Gröſse noch mit $- \frac{a n dt}{\sqrt{1 - e^2}}$ multipliciren, um den Werth des ersten Stücks der Gleichung für df zu erhalten, wobey zu bemerken ist, daſs dieser Factor gleich $- a n dt$ ist, wenn man e^2 vernachlässigt.

Zur Bestimmung des Werths des zweyten Stücks von df muſs man $\left(\frac{dR}{da}\right)$ haben; differenziirt man den Werth von R in Beziehung auf a, und behält man von den in e multiplicirten Gliedern nur diejenigen, welche aus der Voraussetzung $i = 0$ entspringen, weil diese Glieder allein beständige Glieder geben können, so erhält man

$$\left(\frac{dR}{da}\right) = \frac{m'}{2} . \Sigma . \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) . \cos i (n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- \frac{m'}{2} . \left[a . \left(\frac{d^2 A^{(0)}}{da^2}\right) + \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right] . e . \cos (nt + \varepsilon - \varpi)$$

$$- \frac{m'}{2} . \left[a' . \left(\frac{d^2 A^{(1)}}{da . da'}\right) + 2 \left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right)\right] . e' . \cos (nt + \varepsilon - \varpi'),$$

$$df' = -\frac{am'ndt}{2} \cdot e \cdot \cos\varpi \left[a\left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2} a^2 \cdot \left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)\right]$$

$$- am'ndt \cdot e' \cdot \cos\varpi' \cdot \left[A^{(1)} + \tfrac{1}{2}a \cdot \left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2}a' \cdot \left(\frac{dA^{(1)}}{da'}\right) + \tfrac{1}{4}aa' \cdot \left(\frac{d^2A^{(1)}}{da \cdot da'}\right)\right]$$

$$+ am'ndt \cdot \Sigma \cdot \left[i A^{(i)} + \tfrac{1}{2} a \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\right] \cdot \cos\left[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon\right].$$

Wir nennen nun der Kürze wegen X den Theil des Ausdrucks von df, welcher unter dem Zeichen Σ enthalten ist, und Y den Theil des Ausdrucks von df', welcher unter demselben Zeichen enthalten ist. Wir setzen ferner, wie im 55sten Satz,

oder (da $a' \cdot \left(\frac{d^2A^{(1)}}{da \cdot da'}\right) = -2\left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) - a \cdot \left(\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right)$ ist,

$$\left(\frac{dR}{da}\right) = \frac{m'}{2} \cdot \Sigma \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) \cdot \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$$

$$- \frac{m'}{2} \cdot \left[a \cdot \left(\frac{d^2A^{(0)}}{da}\right) + \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right] \cdot e \cdot \cos(nt + \varepsilon - \varpi) + \frac{m'}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right) \cdot e' \cdot \cos(nt + \varepsilon - \varpi').$$

Nun ist $\sin v = \sin(nt + \varepsilon + v_{,}) = \sin(nt + \varepsilon) + v_{,} \cdot \cos(nt + \varepsilon)$
$= \sin(nt + \varepsilon) + e \cdot \sin(2nt + 2\varepsilon - \varpi) - e \cdot \sin\varpi$,

und wenn man mit $1 - u_{,}$ das heifst, mit $1 + e \cdot \cos(nt + \varepsilon - \varpi)$ multiplicirt und e^2 wegläfst,

$(1 - u_{,}) \cdot \sin v = \sin(nt + \varepsilon) + \frac{3}{2} e \cdot \sin(2nt + 2\varepsilon - \varpi) - \frac{1}{2} e \cdot \sin\varpi$,

und folglich $(1 - u_{,}) \sin v \cdot \left(\frac{dR}{da}\right)$ oder $\sin v \cdot \left(\frac{dR}{dr}\right)$ gleich

$$\frac{m'}{2} \cdot \Sigma \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right) \cdot \sin\left[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon\right]$$

$$- \frac{m'}{4} \cdot \left[a \cdot \left(\frac{d^2A^{(0)}}{da}\right) + \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right)\right] \cdot e \cdot \sin\varpi + \frac{m'}{4} \cdot a \cdot \left(\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right) \cdot e' \cdot \sin\varpi'.$$

Diese Gröfse mufs man noch mit $- a^2 ndt \cdot \sqrt{1 - e^2}$, das heifst mit $- a^2 ndt$ multipliciren, um den Werth des zweyten Stücks von df zu erhalten. Beide Stücke vereinigt geben

$$df = \frac{a \cdot m' \cdot ndt}{2} \cdot e \cdot \sin\varpi \left[a \cdot \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2} a^2 \cdot \left(\frac{d^2A^{(0)}}{da^2}\right)\right]$$

$$+ am'ndt \cdot e' \cdot \sin\varpi' \cdot \left[\tfrac{1}{2} A^{(1)} - \tfrac{1}{2} a \cdot \left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) - \tfrac{1}{4} a^2 \cdot \left(\frac{d^2A^{(1)}}{da^2}\right)\right]$$

$$- am'ndt \cdot \Sigma \cdot \left[i A^{(i)} + \tfrac{1}{2} a \cdot \left(\frac{dA^{(i)}}{da}\right)\right] \sin\left[i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + nt + \varepsilon\right],$$

welcher Werth mit dem im Text gegebenen übereinstimmt.

$$(0, 1) = -\frac{m'.n}{2} \cdot \left[a^2 . \left(\frac{dA^{(0)}}{da}\right) + \tfrac{1}{2} a^3 . \left(\frac{d^2 A^{(0)}}{da^2}\right)\right];$$

$$\boxed{0, 1} = \frac{m'.n}{2} \cdot \left[a A^{(1)} - a^2 . \left(\frac{dA^{(1)}}{da}\right) - \tfrac{1}{2} a^3 . \left(\frac{d^2 A^{(1)}}{da^2}\right)\right].$$

Wir bemerken noch, daſs der Koefficient von $e' dt . \sin \varpi'$ im Ausdruck von df sich in $\boxed{0, 1}$ verwandelt, wenn man in ihm statt der auf a' sich beziehenden partiellen Differenziale von $A^{(1)}$ ihre Werthe in partielle auf a sich beziehende Differenziale setzt; wir setzen endlich, wie im 55sten Satz,

$$e . \sin \varpi = h; \qquad e' . \sin \varpi' = h';$$
$$e . \cos \varpi = l; \qquad e' . \cos \varpi' = l',$$

wodurch nach dem vorhergehenden Satz $f = \mu l$, $f' = \mu h$, oder einfacher $f = l$, $f' = h$ wird, wenn man M als Einheit der Massen annimmt, und m in Vergleichung mit M vernachlässigt; dann erhält man

$$\frac{dh}{dt} = (0, 1) . l - \boxed{0, 1} . l' + a m'n . Y;$$

$$\frac{dl}{dt} = -(0, 1) . h + \boxed{0, 1} . h' - a m'n . X.$$

Nennt man nun (Y) die Summe aller Glieder, welche $am'n . Y$ ähnlich sind, und aus der Wirkung jedes der Körper m', m'' u. s. w. auf m' entspringen; nennt man eben so (X) die Summe aller Glieder, welche $-am'n . X$ ähnlich sind und aus denselben Wirkungen entstehen; bezeichnet man endlich nach und nach mit einem Strich, mit zwey Strichen u. s. w. die Werthe, welche die Gröſsen (X), (Y), h und l für die Körper m', m'' u. s. w. erhalten, so kann man leicht aus den vorhergehenden Gleichungen schlieſsen, daſs man das folgende System von Differenzialgleichungen erhält:

$$\left(\frac{dh}{dt}\right) = [(0, 1) + (0, 2) + \text{etc.}] . l - \boxed{0, 1} . l' - \boxed{0, 2} . l'' - \text{etc.} + (Y);$$

$$\left(\frac{dl}{dt}\right) = -[(0, 1) + (0, 2) + \text{etc.}] . h + \boxed{0, 1} . h' + \boxed{0, 2} . h'' + \text{etc.} + (X);$$

$$\left(\frac{dh'}{dt}\right) = [(1, 0) + (1, 2) + \text{etc.}] . l' - \boxed{1, 0} . l - \boxed{1, 2} . l'' - \text{etc.} + (Y');$$

$$\left(\frac{dl'}{dt}\right) = -[(1, 0) + (1, 2) + \text{etc.}] . h' + \boxed{1, 0} . h + \boxed{1, 2} . h'' + \text{etc.} + (X');$$

etc.

Wir bemerken zur Integration dieser Gleichungen, daſs jede der Gröſsen h, l, h', l' u. s. w. aus zwey Theilen besteht; der eine hängt von der gegenseitigen Lage der Körper m, m' u. s. w. gegen einander ab; der andere ist von dieser Lage unabhängig und enthält die Sekularänderungen dieser Gröſsen. Man erhält den erstern Theil, indem man betrachtet, daſs die Gröſsen h, l, h', l' u. s. w. von der Ordnung der stöhrenden Massen sind, wenn man auf diesen Theil allein Rücksicht nimmt, und daſs folglich $(0, 1).h$; $(0, 1).l$ u. s. w. von der Ordnung der Quadrate dieser Massen sind. Vernachlässigt man also die Gröſsen dieser Ordnung, so erhält man

$$\frac{dh}{dt} = (Y); \qquad \frac{dl}{dt} = (X); \qquad \frac{dh'}{dt} = (Y'); \qquad \frac{dl'}{dt} = (X');$$

folglich

$$h = \int (Y) \,.\, dt; \qquad l = \int (X) \,.\, dt; \qquad h' = \int (Y') \,.\, dt \quad \text{etc.}$$

Nimmt man diese Integrale so, daſs man nur auf die Veränderlichkeit der Elemente der Bahnen Rücksicht nimmt, und nennt man Q den Werth, welchen alsdann $\int (Y) \,.\, dt$ erhält; nennt man ferner δQ die Aenderung von Q, welche aus den Aenderungen der Elemente entspringt, so hat man

$$\int (Y) \,.\, dt = Q - \int \delta Q.$$

Da aber Q von der Ordnung der stöhrenden Massen ist, und da die Aenderungen der Elemente der Bahnen von derselben Ordnung sind, so ist δQ von der Ordnung der Quadrate dieser Massen; vernachlässigt man also die Gröſsen dieser Ordnung, so hat man

$$\int (Y) \,.\, dt = Q.$$

Man kann also, wenn man die Integrale $\int (Y) \,.\, dt$, $\int (X) \,.\, dt$, $\int (Y') \,.\, dt$ etc. sucht, die Elemente der Bahnen als beständig annehmen, und hernach in diesen Integralen diese Elemente als veränderlich ansehen; man erhält so auf eine sehr einfache Art die periodischen Theile der Ausdrücke von h, l, h', l' u. s. w.

Um aber die Theile dieser Ausdrücke zu erhalten, welche die Sekulargleichungen enthalten, muſs man bemerken, daſs sie durch die Integration der vorhergehenden Differenzialgleichungen gegeben werden, wenn man in ihnen ihre letzten Glieder (Y), (X) u. s. w. wegläſst; denn es ist klar, daſs diese Glieder durch die Substitution der periodischen Theile von h, l, h' u. s. w. verschwinden. Läſst man aber in diesen Gleichungen ihre letzten Glieder weg,

so verwandeln sie sich in die Differenzialgleichungen (A) des 55sten Satzes, welche wir schon mit vieler Ausführlichkeit betrachtet haben.

69. Wir haben im 65sten Satz bemerkt, daſs in den mittlern Bewegungen nt und $n't$ der beiden Körper m und m' sehr merkbare Ungleichheiten entstehen können, wenn diese mittlern Bewegungen sehr nahe das Verhältniſs i' zu i haben, so daſs $i'n' - in$ eine sehr kleine Gröſse ist. Dieses Verhältniſs der mittlern Bewegungen kann auch sehr beträchtliche Aenderungen in den Eccentricitäten der Bahnen und in der Lage ihrer Perihelien hervorbringen. Wir wollen, um sie zu bestimmen, die im 67sten Satz gefundene Gleichung wieder vornehmen:

$$ede = \frac{andt \,.\, \sqrt{1-e^2}}{\mu} \,.\, \left(\frac{dR}{dv}\right) - \frac{a.(1-e^2)}{\mu} \,.\, \mathrm{d}R.$$

Es folgt aus dem, was wir im 48sten Satz gesagt haben, daſs alle vom Winkel $i'n't - int$ abhängende Glieder des Ausdrucks von R in folgender allgemeinen Form enthalten sind:

$$m'k \,.\, \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta'),$$

wenn man die Ebene der Bahn von m zu einer gegebenen Epoche für die unveränderliche Ebene annimmt, wodurch es erlaubt ist, die Neigung ϕ der Bahn von m gegen diese Ebene in R zu vernachlässigen. Hier sind i, i', g, g', g'' ganze Zahlen, und es muſs $i' - i - g - g' - g''$ gleich Null seyn. Der Koefficient k hat zum Factor $e^g \,.\, e'^{g'} \,.\, (\tang \frac{1}{2}\phi')^{g''}$, wo g, g', g'' in den Exponenten positiv genommen werden müssen. Nimmt man ferner i' und i als positiv und i' gröſser als i an, so hat man im 48sten Satz gesehen, daſs die Glieder von R, welche vom Winkel $i'n't - int$ abhangen, von der Ordnung $i' - i$ oder von einer um zwey, um vier u. s. w. Einheiten höhern Ordnung abhängen. Betrachtet man also nur die Glieder von der Ordnung $i' - i$, so wird k von der Form $e^g \,.\, e'^{g'} \,.\, (\tang \frac{1}{2}\phi)^{g''} \,.\, Q$ seyn, wo Q eine von den Eccentricitäten und der respectiven Neigung der Bahnen unabhängige Function ist. Die unter dem Zeichen cos enthaltenen Zahlen g, g', g'' sind alsdann positiv; denn wenn eine von ihnen, z. B. g negativ und gleich $-f$ wäre, so würde k von der Ordnung $f + g' + g''$ seyn; die Gleichung $0 = i' - i - g - g' - g''$ giebt aber $f + g' + g'' = i' - i + 2f$; k würde also von einer höhern Ordnung als von der $(i' - i)^{\text{ten}}$ seyn, welches gegen die Annahme ist. Dieses vorausgesetzt, hat man

man nach dem 48sten Satz $\left(\frac{dR}{dv}\right) = \left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)$, wofern man nur in dem letztern partiellen Differenzial $\varepsilon - \varpi$ als eine beständige Gröſse ansieht; das Glied von $\left(\frac{dR}{dv}\right)$, welches dem vorhergehenden Gliede von R entspricht, ist also [158])

$$m' . (i + g) . k . \sin (i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta').$$

Das entsprechende Glied von dR ist

$$m' . ink . dt . \sin (i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta').$$

Betrachtet man also nur diese Glieder, und vernachlässigt man e^2 in Vergleichung mit der Einheit, so giebt der vorhergehende Ausdruck von ede

$$de = \frac{m' andt}{\mu} . \frac{gk}{e} . \sin (i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta');$$

man hat aber

$$\frac{gk}{e} = g e^{g-1} . e'^{g'} . (\tang \tfrac{1}{2} \phi')^{g''} . Q = \left(\frac{dk}{de}\right),$$

folglich, wenn man integrirt,

$$e = - \frac{m' an}{\mu . (i'n' - in)} . \left(\frac{dk}{de}\right) . \cos (i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta').$$

Stellt man nun die Summe aller Glieder von R, welche vom Winkel $i'n't - int$ abhängen, durch die folgende Gröſse vor:

$$m' . P . \sin (i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) + m' . P' . \cos (i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon),$$

so wird der entsprechende Theil von e folgender seyn:

$$\frac{- m' . an}{\mu . (i'n' - in)} . \left[\left(\frac{dP}{de}\right) . \sin (i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) + \left(\frac{dP'}{de}\right) . \cos (i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon)\right].$$

Diese Ungleichheit kann sehr beträchtlich werden, wenn der Koefficient $i'n' - in$ sehr klein ist, wie dies in der Theorie Jupiters und Saturns der Fall ist. Sie hat zwar nur die erste Potenz von $i'n' - in$ zum Divisor, da hingegen die entsprechende Ungleichheit der mittlern Bewegung die zweyte Potenz dieser Gröſse zum Theiler hat, wie man im 65sten Satz gesehen hat; da aber $\left(\frac{dP}{de}\right)$ und

158) Es ist nämlich $\cos (i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta')$ gleich $\cos [i'n't - int + i'\varepsilon' - (i + g) \varepsilon + g (\varepsilon - \varpi) - g'\varpi' - g''\theta']$, und das Differenzial dieses Kosinus in Beziehung auf ε genommen und durch de dividirt, ist gleich

$$(i + g) . \sin [i'n't - int + i'\varepsilon' - (i + g) \varepsilon + g (\varepsilon - \varpi) - g'\varpi' - g''\theta'].$$

$\left(\frac{dP'}{de}\right)$ von einer niedrigern Ordnung sind, als P und P', so kann diese Ungleichheit der Eccentricität beträchtlich werden, und selbst die der mittlern Bewegung übertreffen, wenn die Eccentricitäten e und e' sehr klein sind, wovon wir Beyspiele in der Theorie der Jupiters-Satelliten sehen werden.

Wir wollen nun die entsprechende Ungleichheit der Bewegung der Sonnenferne bestimmen. Hierzu nehmen wir die zwey Gleichungen

$$ede = \frac{f.df + f'.df'}{\mu^2}; \qquad e^2 d\varpi = \frac{f.df' - f'.df}{\mu^2},$$

auf welche wir im 67sten Satz gekommen sind, wieder vor. Diese Gleichungen geben

$$df = \mu de . \cos\varpi - \mu e . d\varpi . \sin\varpi;$$

nimmt man also nur auf den Winkel $i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta'$ Rücksicht, so erhält man

$$df = m' . andt . \left(\frac{dk}{de}\right) . \cos\varpi . \sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta') - \mu ed\varpi . \sin\varpi.$$

Man stelle durch

$$- m' . andt . \left[\left(\frac{dk}{de}\right) + k'\right] . \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta')$$

den Theil von $\mu ed\varpi$ vor, welcher von demselben Winkel abhängt, so erhält man

$$df = m' . andt . \left[\left(\frac{dk}{de}\right) + \tfrac{1}{2} k'\right] . \sin[i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - (g-1)\varpi - g'\varpi' - g''\theta']$$

$$- \frac{m' . andt}{2} . k' . \sin[i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - (g+1)\varpi - g'\varpi' - g''\theta'].$$

Man kann leicht aus dem letzten der im 67sten Satz gegebenen Ausdrücke von df sehen, daſs der Koefficient des letztern Sinus den Factor $e^{g+1} . e'^{g'} . (\tang \tfrac{1}{2}\phi)^{g''}$ hat; k' ist also von einer um zwey Einheiten höhern Ordnung als $\left(\frac{dk}{de}\right)$; vernachlässigt man daher k' in Vergleichung mit $\left(\frac{dk}{de}\right)$, so erhält man für das Glied von $ed\varpi$, welches dem Gliede $m'k . \cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta')$ des Ausdrucks von R entspricht, folgende Gröſse:

$$-\frac{m'.andt}{\mu}.\left(\frac{dk}{de}\right).\cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon - g\varpi - g'\varpi' - g''\theta').$$

Es folgt hieraus, daſs der Theil von ϖ, welcher dem Theil von R entspricht, der durch

$$m'P.\sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) + m'P'.\cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon)$$

vorgestellt wird, folgender Gröſse gleich ist:

$$\frac{m'.an}{\mu.(i'n'-in)e}.\left[\left(\frac{dP}{de}\right).\cos(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)-\left(\frac{dP'}{de}\right).\sin(i'n't-int+i'\varepsilon'-i\varepsilon)\right].$$

Man erhält so auf eine sehr einfache Art die Aenderungen der Eccentricität und der Sonnennähe, welche vom Winkel $i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon$ abhängen. Sie sind mit der entsprechenden Aenderung ξ der mittlern Bewegung so verbunden, daſs die Aenderung der Eccentricität gleich

$$\frac{1}{3in}.\left(\frac{d^2\xi}{de.dt}\right),$$

und die Aenderung der Länge der Sonnennähe gleich

$$\frac{(i'n'-in)}{3in.e}.\left(\frac{d\xi}{de}\right)$$

ist. Die aus der Wirkung von m entspringende ähnliche Aenderung der Eccentricität der Bahn von m' wird

$$-\frac{1}{3i'n'}.\left(\frac{d^2\xi'}{de'.dt}\right)$$

seyn, und die Aenderung der Länge der Sonnennähe wird

$$-\frac{(i'n'-in)}{3i'n'.e'}.\left(\frac{d\xi'}{de'}\right)$$

seyn; und da man nach Satz 65. $\xi' = -\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}.\xi$ hat, so werden diese Aenderungen gleich

$$\frac{m\sqrt{a}}{3i'n'.m'\sqrt{a'}}.\left(\frac{d^2\xi}{de'.dt}\right) \text{ und } \frac{(i'n'-in)\,m.\sqrt{a}}{3i'n'.e'.m'.\sqrt{a'}}.\left(\frac{d\xi}{de'}\right)$$

seyn. Wenn die Gröſse $i'n' - in$ sehr klein ist, so bringt die vom Winkel $i'n't - int$ abhängende Ungleichheit unter den Gliedern, welche von den Quadraten der stöhrenden Massen abhängen, eine im Ausdruck der mittlern Bewegung merkliche Ungleichheit hervor; wir haben die analytische Berechnung der-

selben im 65sten Satz gegeben. Dieselbe Ungleichheit bringt in den Ausdrücken von de und $d\varpi$ Glieder von der Ordnung der Quadrate dieser Massen hervor, welche einen merklichen Einfluſs auf die Sekularänderungen der Elemente der Bahnen haben, weil sie nur von diesen Elementen allein Functionen sind. Wir wollen in der That den Ausdruck von de, welcher vom Winkel $i'n't - int$ abhängt, betrachten. Man hat nach dem Vorhergehenden

$$de = -\frac{m'.andt}{\mu}.\left[\left(\frac{dP}{de}\right).\cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) - \left(\frac{dP'}{de}\right).\sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon)\right].$$

Nach dem 65sten Satz muſs die mittlere Bewegung von nt um

$$\frac{3m'.an^2 i}{(i'n' - in)^2.\mu}.[P.\cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) - P'.\sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon)],$$

und die mittlere Bewegung von $n't$ um

$$\frac{-3m'.an^2 i}{(i'n' - in)^2.\mu}.\frac{m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}.[P.\cos(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon) - P'.\sin(i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon)]$$

vermehrt werden. Durch diese Vermehrungen wird der Werth von de um die Function [159])

$$-\frac{3m'.a^2 in'dt}{2\mu^2.\sqrt{a'}.(i'n' - in)^2}.(im'.\sqrt{a'} + i'm.\sqrt{a})\left[P.\left(\frac{dP'}{de}\right) - P'.\left(\frac{dP}{de}\right)\right],$$

159) Setzt man der Kürze wegen $i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon = \varphi$ und $\frac{3m'.an^2 i}{(i'n' - in)^2.\mu} = \alpha$, so ist die Vermehrung der mittlern Bewegung von nt gleich $\alpha P.\cos\varphi - \alpha P'.\sin\varphi$, und die Vermehrung der mittlern Bewegung von $n't$ gleich $-\frac{\alpha.m\sqrt{a}}{m'\sqrt{a'}}.P.\cos\varphi + \frac{\alpha.m\sqrt{a}}{m'.\sqrt{a'}}.P'.\sin\varphi$. Vermehrt man nun den Winkel $i'n't - int$ in der Gleichung de um diese Gröſsen, so erhält man, wenn man noch $-\frac{i'.m.\sqrt{a}}{m'.\sqrt{a'}}.P.\cos\varphi + \frac{i'.m.\sqrt{a}}{m'.\sqrt{a'}}.P'.\sin\varphi - iP.\cos\varphi + iP'.\sin\varphi$, oder

$$\frac{(i'm\sqrt{a} + im'\sqrt{a'}).P'.\sin\varphi - (i'm\sqrt{a} + im'\sqrt{a'}).P.\cos\varphi}{m'.\sqrt{a'}}$$ gleich γ setzt,

$$de = -\frac{m'.andt}{\mu}\left[\left(\frac{dP}{de}\right).\cos(\varphi + \alpha\gamma) - \left(\frac{dP'}{de}\right).\sin(\varphi + \alpha\gamma)\right].$$

Nun ist $\cos(\varphi + \alpha\gamma)$ gleich $\cos\varphi - \alpha\gamma.\sin\varphi$ und $\sin(\varphi + \alpha\gamma)$ gleich $\sin\varphi + \alpha\gamma.\cos\varphi$. Multiplicirt man γ mit $\sin\varphi$ und mit $\cos\varphi$, und behält man bloſs die beständigen vom Winkel φ unabhängigen Glieder, so findet man

und der Werth von $d\varpi$ um die Function

$$\frac{3m'.a^2 in^3 dt}{2\mu^2 . \sqrt{a'} . (i'n'-in)^2 . e} . (im'\sqrt{a'} + i'm.\sqrt{a}) \left[P.\left(\frac{dP}{de}\right) + P'.\left(\frac{dP'}{de}\right)\right]$$

vermehrt werden. Man wird eben so finden, daſs der Werth von de' um die Function

$$-\frac{3ma^2\sqrt{a}.in^3 dt}{2\mu^2 . a'(i'n'-in)^2} . (im'\sqrt{a'} + i'm\sqrt{a}) \left[P.\left(\frac{dP'}{de'}\right) - P'.\left(\frac{dP}{de}\right)\right],$$

und der Werth von $d\varpi'$ um die Function

$$\frac{3ma^2\sqrt{a}.in^3 dt}{2\mu^2 . a'(i'n'-in)^2 . e'} . (im'\sqrt{a'} + i'm\sqrt{a}) \left[P.\left(\frac{dP}{de'}\right) + P'.\left(\frac{dP'}{de'}\right)\right]$$

vermehrt wird. Diese verschiedenen Glieder sind in der Theorie Jupiters und Saturns und in der Theorie der Jupiters-Satelliten merklich. Die Aenderungen von e, e', ϖ und ϖ', welche sich auf den Winkel $i'n't - int$ beziehen, können noch einige beständige Glieder von der Ordnung der Quadrate der stöhrenden Massen in den Differenzialen de, de', $d\varpi$ und $d\varpi'$ hervorbringen, welche beständige Glieder von den Variationen von e, e', ϖ und ϖ' abhängen und sich auf denselben Winkel beziehen werden; man wird leicht durch die vorhergehende Analysis darauf Rücksicht nehmen können. Man wird endlich leicht durch unsere Analysis die Glieder der Ausdrücke von e, ϖ, e' und ϖ' bestimmen können, welche vom Winkel $i'n't - int + i'\varepsilon' - i\varepsilon$ abhängen und die Gröſse $i'n' - in$ nicht zum Divisor haben, so wie auch diejenigen Glieder, welche von demselben Winkel und von dem Doppelten desselben abhängen und von der Ordnung der Quadrate der stöhrenden Kräfte sind. Diese verschiedenen Glieder sind in der Theorie Jupiters und Saturns beträchtlich genug, um auf sie Rücksicht zu nehmen; wir werden sie mit der Umständ-

$$-\alpha\gamma \sin\varphi = -\frac{\frac{1}{2}\alpha . (i'm\sqrt{a} + im'\sqrt{a'})}{m' . \sqrt{a'}} P', \text{ und}$$

$$-\alpha\gamma \cos\varphi = +\frac{\frac{1}{2}\alpha . (i'm\sqrt{a} + im'\sqrt{a'})}{m' . \sqrt{a'}} P.$$

Substituirt man diese Werthe in de, und behält man bloſs die in α multiplicirten Glieder, so findet man

$$de = +\frac{andt}{2\mu . \sqrt{a'}} . \alpha \left[\left(\frac{dP}{de}\right) . P' - \left(\frac{dP'}{de}\right) . P\right] (i'm\sqrt{a} + im'\sqrt{a'}).$$

lichkeit, welche sie erfordern, entwickeln, wenn wir uns mit dieser Theorie beschäftigen werden.

70. Wir wollen nun die Aenderungen der Knoten und der Neigungen der Bahnen bestimmen, und hierzu die Gleichungen des 64sten Satzes wieder vornehmen:

$$dc = dt \,.\, \left[y \,.\, \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \,.\, \left(\frac{dR}{dy}\right) \right];$$

$$dc' = dt \,.\, \left[z \,.\, \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \,.\, \left(\frac{dR}{dz}\right) \right];$$

$$dc'' = dt \,.\, \left[z \,.\, \left(\frac{dR}{dy}\right) - y \,.\, \left(\frac{dR}{dz}\right) \right].$$

Betrachtet man nur die Wirkung von m', so giebt der Werth von R im 64sten Satz

$$y \,.\, \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \,.\, \left(\frac{dR}{dy}\right) = m' \,.\, (x'y - y'x) \,.\, \left[\frac{1}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} \right];$$

$$z \,.\, \left(\frac{dR}{dx}\right) - x \,.\, \left(\frac{dR}{dz}\right) = m' \,.\, (x'z - xz') \,.\, \left[\frac{1}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} \right];$$

$$z \,.\, \left(\frac{dR}{dy}\right) - y \,.\, \left(\frac{dR}{dz}\right) = m' \,.\, (y'z - yz') \,.\, \left[\frac{1}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Es sey nun

$$\frac{c''}{c} = p; \qquad \frac{c'}{c} = q,$$

so werden die zwey veränderlichen Gröſsen q und p die Tangente der Neigung ϕ der Bahn von m, und die Länge θ seines Knotens vermittelst der folgenden Gleichungen des 64sten Satzes bestimmen:

$$\text{tang}\, \phi = \sqrt{p^2 + q^2}; \qquad \text{tang}\, \theta = \frac{p}{q}.$$

Wir nennen p', q', p'', q'' u. s. w. die Werthe, welche p und q für die Körper m', m'' u. s. w. erhalten, so hat man nach Satz 64.

$$z = qy - px; \qquad z' = q'y' - p'x' \quad \text{etc.}$$

Differenzirt man den vorhergehenden Werth von p, so erhält man

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{c}\left(\frac{dc'' - p\,dc}{dt}\right).$$

Substituirt man statt dc und dc'' ihre Werthe, so verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{m'}{c}.[(q-q').yy' + (p'-p)x'y].\left(\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Man findet eben so

$$\frac{dq}{dt} = \frac{m'}{c}.[(p'-p).xx' + (q-q').xy'].\left(\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Substituirt man statt x, y, x', y' ihre Werthe $r\cos v$, $r\sin v$, $r'\cos v'$, $r'\sin v'$, so erhält man

$$(q-q').yy' + (p'-p).x'y = \left(\frac{q'-q}{2}\right) rr'\,[\cos(v'+v) - \cos(v'-v)]$$
$$+ \left(\frac{p'-p}{2}\right) rr'\,[\sin(v'+v) - \sin(v'-v)];$$

$$(p'-p).xx' + (q-q').xy' = \left(\frac{p'-p}{2}\right) rr'\,[\cos(v'+v) + \cos(v'-v)]$$
$$+ \left(\frac{q'-q}{2}\right) rr'\,[\sin(v'+v) + \sin(v'-v)].$$

Vernachlässigt man die Eccentricitäten und Neigungen der Bahnen, so hat man

$$r = a; \quad v = nt + \varepsilon; \quad r' = a'; \quad v' = n't + \varepsilon';$$

dies giebt

$$\frac{1}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a'^3} - \frac{1}{[a^2-2aa'.\cos(n't-nt+\varepsilon'-\varepsilon)+a'^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Man hat ferner nach dem 48sten Satz

$$\frac{1}{[a^2 - 2aa'\cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2]^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{1}{2}\Sigma\,.\,B^{(i)}\,.\cos i\,(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon),$$

wo das Integralzeichen Σ sich auf alle ganze positive und negative Werthe von i, den Werth $i = 0$ mit eingeschlossen, erstreckt. Man erhält so, wenn man die Glieder von der Ordnung der Quadrate und der Producte der Eccentricitäten und der Neigungen der Bahnen vernachlässigt,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(q'-q)}{2c} \cdot \frac{m'a}{a'^2} \cdot [\cos(n't + nt + \varepsilon' + \varepsilon) - \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)]$$

$$+ \frac{(p'-p)}{2c} \cdot \frac{m'a}{a'^2} \cdot [\sin(n't + nt + \varepsilon' + \varepsilon) - \sin(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)]$$

$$+ \frac{(q'-q)}{4c} . m' . aa' \Sigma B^{(i)} . [\cos[(i+1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)] - \cos[(i+1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon]]$$

$$+ \frac{(p'-p)}{4c} . m' . aa' \Sigma B^{(i)} . [\sin[(i+1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)] - \sin[(i+1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon]];$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{(p'-p)}{2c} \cdot \frac{m'a}{a'^2} \cdot [\cos(n't + nt + \varepsilon' + \varepsilon) + \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)]$$

$$+ \frac{(q'-q)}{2c} \cdot \frac{m'a}{a'^2} \cdot [\sin(n't + nt + \varepsilon' + \varepsilon) + \sin(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)]$$

$$+ \frac{(p-p')}{4c} . m' . aa' \Sigma B^{(i)} . [\cos[(i+1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)] + \cos[(i+1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon]]$$

$$+ \frac{(q'-q)}{4c} . m' . aa' \Sigma B^{(i)} . [\sin[(i+1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)] + \sin[(i+1)(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 2nt + 2\varepsilon]].$$

Der Werth $i = -1$ giebt im Ausdruck von $\frac{dp}{dt}$ die beständige Gröſse $\frac{(q'-q)}{4c} . m' . aa' . B^{(-1)}$; alle übrigen Glieder des Ausdrucks von $\frac{dp}{dt}$ sind periodisch: bezeichnet man ihre Summe mit P und beobachtet man, daſs $B^{(-1)} = B^{(1)}$ nach Satz 48. ist, so erhält man

$$\frac{dp}{dt} = \frac{(q'-q)}{4c} m' aa' . B^{(1)} + P.$$

Man findet durch dasselbe Verfahren, wenn man die Summe aller periodischen Glieder des Ausdrucks von $\frac{dq}{dt}$ mit Q bezeichnet,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{(p-p')}{4c} . m' . aa' . B^{(1)} + Q.$$

Vernachlässigt man die Quadrate der Eccentricitäten und der Neigungen der Bahnen, so hat man nach Satz 64. $c = \sqrt{\mu a}$; setzt man ferner $\mu = 1$, so erhält

hält man $n^2 a^3 = 1$ und dadurch $c = \frac{1}{an}$; die Gröſse $\frac{m' a a B^{(1)}}{4c}$ verwandelt sich so in $\frac{m' a^2 a' \,.\, n B^{(1)}}{4}$, welche nach Satz 59. gleich (0, 1) ist. Man hat folglich

$$\frac{dp}{dt} = (0, 1) \,.\, (q' - q) + P;$$
$$\frac{dq}{dt} = (0, 1) \,.\, (p - p') + Q.$$

Bezeichnet man mit (P) und (Q) die Summe aller Functionen P und Q, welche aus der Wirkung der verschiedenen Körper m', m'' u. s. w. auf m entstehen; bezeichnet man eben so mit (P'), (Q'), (P''), (Q'') u. s. w. die Werthe, welche (P) und (Q) erhalten, wenn man in ihnen die Gröſsen, welche sich auf m beziehen, nach und nach in diejenigen verwandelt, welche sich auf m', m'' u. s. w. beziehen, und umgekehrt; so folgt aus den vorigen Gleichungen, daſs man zur Bestimmung der veränderlichen Gröſsen p, q, p', q', p'', q'' u. s. w. das folgende System von Differenzialgleichungen hat:

$$\frac{dp}{dt} = - [(0, 1) + (0, 2) + \text{etc.}] \,.\, q + (0, 1)\, q' + (0, 2)\, q'' + \text{etc.} + (P);$$

$$\frac{dq}{dt} = [(0, 1) + (0, 2) + \text{etc.}] \,.\, p - (0, 1)\, p' - (0, 2)\, p'' - \text{etc.} + (Q);$$

$$\frac{dp'}{dt} = - [(1, 0) + (1, 2) + \text{etc.}] \,.\, q' + (1, 0)\, q + (1, 2)\, q'' + \text{etc.} + (P');$$

$$\frac{dq'}{dt} = [(1, 0) + (1, 2) + \text{etc.}] \,.\, p' - (1, 0)\, p - (1, 2)\, p'' - \text{etc.} + (Q');$$

etc.

Die Analysis des 68sten Satzes giebt für die periodischen Theile von p, q, p', q' u. s. w. folgende Werthe:

$$p = \int (P) \,.\, dt; \quad q = \int (Q) \,.\, dt; \quad p' = \int (P') \,.\, dt; \quad q' = \int (Q') \,.\, dt;$$

man wird hernach die Sekulartheile derselben Gleichungen erhalten, wenn man in den vorhergehenden Differenzialgleichungen die letzten Glieder (P), (Q), (P') u. s. w. wegläſst, und sie integrirt; dann wird man auf die Gleichungen

(C) des 59sten Satzes kommen, welche wir so ausführlich betrachtet haben, daſs wir zu diesem Gegenstande nicht zurückzukehren brauchen.

71. Wir wollen nun die Gleichungen des 64sten Satzes

$$\text{tang}\,\phi = \frac{\sqrt{c'^2 + c''^2}}{c}; \qquad \text{tang}\,\theta = \frac{c''}{c'}$$

wieder vornehmen, aus welchen folgende entspringen:

$$\frac{c'}{c} = \text{tang}\,\phi\,.\,\cos\theta; \qquad \frac{c''}{c} = \text{tang}\,\phi\,.\,\sin\theta.$$

Differenziirt man sie, so erhält man

$$d\,.\,\text{tang}\,\phi = \frac{1}{c}\,.\,(dc'\,.\,\cos\theta + dc''\,.\,\sin\theta - dc\,.\,\text{tang}\,\phi);$$

$$d\theta\,.\,\text{tang}\,\phi = \frac{1}{c}\,.\,(dc''\,.\,\cos\theta - dc'\,.\,\sin\theta).$$

Setzt man in diesen Gleichungen statt $\frac{dc}{dt}$, $\frac{dc'}{dt}$, $\frac{dc''}{dt}$ ihre Werthe

$$y\,.\left(\frac{dR}{dx}\right) - x\,.\left(\frac{dR}{dy}\right),\quad z\,.\left(\frac{dR}{dx}\right) - x\,.\left(\frac{dR}{dz}\right),\quad z\,.\left(\frac{dR}{dy}\right) - y\,.\left(\frac{dR}{dz}\right),$$

und statt dieser letztern Gröſsen ihre im 67sten Satz gegebenen Werthe; bemerkt man noch, daſs $s = \text{tang}\,\phi\,.\,\sin(v - \theta)$ ist, so erhält man

$$d\,.\,\text{tang}\,\phi = \frac{dt\,.\,\text{tang}\,\phi\,.\,\cos(v-\theta)}{c}\,.\left[r\,.\left(\frac{dR}{dr}\right).\sin(v-\theta) + \left(\frac{dR}{dv}\right).\cos(v-\theta)\right]$$
$$- \frac{(1+s^2)\,.\,dt}{c}\,.\,\cos(v-\theta)\,.\left(\frac{dR}{ds}\right);$$

$$d\theta\,.\,\text{tang}\,\phi = \frac{dt\,.\,\text{tang}\,\phi\,.\,\sin(v-\theta)}{c}\,.\left[r\,.\left(\frac{dR}{dr}\right).\sin(v-\theta) + \left(\frac{dR}{dv}\right).\cos(v-\theta)\right]$$
$$- \frac{(1+s^2)\,.\,dt}{c}\,.\,\sin(v-\theta)\,.\left(\frac{dR}{ds}\right).$$

Diese beiden Differenzialgleichungen bestimmen unmittelbar die Neigung der Bahn und die Bewegung der Knoten. Sie geben

$$\sin(v - \theta) \,.\, d \,.\, \text{tang}\,\phi - d\theta \,.\, \cos(v - \theta) \,.\, \text{tang}\,\phi = 0,$$

eine Gleichung, welche man noch aus der folgenden: $s = \text{tang}\,\phi \,.\, \sin(v - \theta)$ herleiten kann. Denn da diese letztere Gleichung endlich ist, so kann man sie nach dem 63sten Satz so differenziiren, daſs man entweder ϕ und θ als beständig ansieht, oder sie wie veränderliche Gröſsen behandelt; sieht man also bey der Differenziation nur ϕ und θ als veränderlich an, so ist ihr Differenzial gleich Null, woraus die vorhergehende Differenzialgleichung entspringt.

Jetzt wollen wir annehmen, daſs die feste Ebene äuſserst wenig gegen die Bahn von m geneigt ist, so daſs man die Quadrate von s und von tang ϕ vernachlässigen kann; dies giebt

$$d \,.\, \text{tang}\,\phi = -\frac{dt}{c} \,.\, \cos(v - \theta) \,.\, \left(\frac{dR}{ds}\right);$$

$$d\theta \,.\, \text{tang}\,\phi = -\frac{dt}{c} \,.\, \sin(v - \theta) \,.\, \left(\frac{dR}{ds}\right).$$

Setzt man also, wie vorher,

$$p = \text{tang}\,\phi \,.\, \sin\theta; \qquad q = \text{tang}\,\phi \,.\, \cos\theta,$$

so erhält man statt der zwey vorhergehenden Differenzialgleichungen die folgenden:

$$dq = -\frac{dt}{c} \,.\, \cos v \,.\, \left(\frac{dR}{ds}\right);$$

$$dp = -\frac{dt}{c} \,.\, \sin v \,.\, \left(\frac{dR}{ds}\right).$$

Man hat aber $s = q \,.\, \sin v - p \,.\, \cos v$; dies giebt

$$\left(\frac{dR}{ds}\right) = \frac{1}{\sin v} \,.\, \left(\frac{dR}{dq}\right); \qquad \left(\frac{dR}{ds}\right) = -\frac{1}{\cos v} \,.\, \left(\frac{dR}{dp}\right),$$

folglich

$$dq = \frac{dt}{c} \,.\, \left(\frac{dR}{dp}\right);$$

$$dp = -\frac{dt}{c} \,.\, \left(\frac{dR}{dq}\right).$$

Man hat im 48sten Satz gesehen, daſs die Function R von der Lage der festen Ebene der x und der y unabhängig ist; nimmt man also an, daſs alle Winkel

dieser Function auf die Bahn von m bezogen worden sind, so ist klar, daſs R eine Function dieser Winkel und der gegenseitigen Neigung der beiden Bahnen seyn wird, welche Neigung wir mit $\phi_{,}'$ bezeichnen werden. Es sey $\theta_{,}'$ die Länge des Knotens der Bahn von m' auf der Bahn von m, und man nehme an, daſs $m' k . (\text{tang}\ \phi_{,}')^g . \cos (i'n't - int + A - g . \theta_{,}')$ ein Glied von R ist, welches vom Winkel $i'n't - int$ abhängt, so hat man nach Satz 60.

$$\text{tang}\ \phi_{,}' . \sin \theta_{,}' = p' - p; \qquad \text{tang}\ \phi_{,}' . \cos \theta_{,}' = q' - q;$$

hieraus erhält man [160])

$$(\text{tang}\ \phi_{,}')^g . \sin g\theta_{,}' = \frac{[(q'-q)+(p'-p)\sqrt{-1}]^g - [(q'-q)-(p'-p)\sqrt{-1}]^g}{2\sqrt{-1}}$$

$$(\text{tang}\ \phi_{,}')^g . \cos g\theta_{,}' = \frac{[(q'-q)+(p'-p)\sqrt{-1}]^g + [(q'-q)-(p'-p)\sqrt{-1}]^g}{2}.$$

Betrachtet man daher nur das vorhergehende Glied von R, so erhält man [161])

160) Es ist nämlich bekanntlich

$$\sin g\theta_{,}' = \frac{(\cos \theta_{,}' + \sqrt{-1} . \sin \theta_{,}')^g - (\cos \theta_{,}' - \sqrt{-1} . \sin \theta_{,}')^g}{2\sqrt{-1}};$$

nun ist

$$\cos \theta_{,}' = \frac{q' - q}{\text{tang}\ \varphi} \text{ und } \sin \theta_{,}' = \frac{p' - p}{\text{tang}\ \theta}, \text{ folglich}$$

$$\sin g\theta_{,}' = \frac{[(q' - q) + \sqrt{-1} . (p' - p)]^g - [(q' - q) - \sqrt{-1} . (p' - p)]^g}{\text{tang}\ \varphi_{,}'^g . 2 . \sqrt{-1}}.$$

161) Das Glied von R ist folgenden zweyen gleich:

$m'k . (\text{tang}\ \varphi_{,}')^g . \cos g\theta_{,}' . \cos (i'n't - int + A) + m'k . (\text{tang}\ \varphi_{,}')^g . \sin g\theta_{,}' . \sin (i'n't - int + A)$.

Hier enthalten bloſs die Koefficienten $(\text{tang}\ \varphi_{,}')^g . \cos g\theta_{,}'$ und $(\text{tang}\ \varphi_{,}')^g . \sin g\theta_{,}'$ die beiden Gröſsen p und q, und wenn man das Differenzial von R in Beziehung auf p oder q nimmt, so muſs man bloſs das Differenzial dieser Koefficienten suchen. Nun ist vermöge der vorhergehenden Werthe

$$\left(\frac{d . [(\text{tang}\ \varphi_{,}')^g . \sin g\theta_{,}']}{dp}\right) = \frac{-g[(q'-q)+(p'-p)\sqrt{-1}]^{g-1} - g[(q'-q)-(p'-p)\sqrt{-1}]^{g-1}}{2}$$

$$= - g . (\text{tang}\ \varphi_{,}')^{g-1} . \cos (g-1)\theta_{,}'.$$

Eben so ist $\left(\frac{d . [(\text{tang}\ \varphi_{,}')^g . \cos g\theta_{,}']}{dp}\right) = + g (\text{tang}\ \varphi_{,}')^{g-1} . \sin (g-1)\theta_{,}'$.

$$\left(\frac{dR}{dp}\right) = -g \cdot (\tang \phi_{,}')^{g-1} \cdot m'k \cdot \sin\,[i'n't - int + A - (g-1)\,\theta_{,}'];$$

$$\left(\frac{dR}{dq}\right) = -g \cdot (\tang \phi_{,}')^{g-1} \cdot m'k \cdot \cos\,[i'n't - int + A - (g-1)\,\theta_{,}'].$$

Substituirt man diese Werthe in die vorhergehenden Ausdrücke von dp und dq und bemerkt man, daſs c sehr nahe gleich $\frac{\mu}{an}$ ist, so erhält man

$$p = \frac{g \cdot m'k \cdot an}{\mu \cdot (i'n' - in)} \cdot (\tang \phi_{,}')^{g-1} \cdot \sin\,[i'n't - int + A - (g-1)\,\theta_{,}'];$$

$$q = \frac{g \cdot m'k \cdot an}{\mu \cdot (i'n' - in)} \cdot (\tang \phi_{,}')^{g-1} \cdot \cos\,[i'n't - int + A - (g-1)\,\theta_{,}'].$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung $s = q \cdot \sin v - p \cdot \cos v$, so erhält man

$$s = \frac{-g \cdot m'k \cdot an}{\mu \cdot (i'n' - in)} \cdot (\tang \phi_{,}')^{g-1} \cdot \sin\,[i'n't - int - v + A - (g-1)\,\theta_{,}'].$$

Dieser Ausdruck von s ist die Aenderung der Breite, welche dem vorhergehenden Gliede von R entspricht; es ist klar, daſs er unverändert bleibt, was auch immer die feste Ebene ist, auf welche man die Bewegungen von m und m' bezieht, wofern dieselbe nur wenig gegen die Ebenen der Bahnen geneigt ist; man wird folglich den Theil des Ausdrucks der Breite haben, welchen die Kleinheit des Divisors $i'n' - in$ bemerklich machen kann. Diese Ungleichheit der Breite enthält zwar nur die erste Potenz dieses Divisors, und sie ist in dieser Rücksicht weniger beträchtlich, als die entsprechende Ungleichheit der mittlern Länge; die

Das Differenzial der obigen beiden Glieder von R in Rücksicht auf p oder $\left(\frac{dR}{dp}\right)$ ist vermöge dieser Gleichungen gleich

$$g \cdot m'k \cdot (\tang \varphi_{,}')^{g-1} \cdot [\cos\,(i'n't - int + A)\,\sin\,(g-1)\,\theta_{,}' - \sin\,(i'n't - int + A)\,\cos\,(g-1)\,\theta_{,}'],$$

oder $-g \cdot m' \cdot k \cdot (\tang \varphi_{,}')^{g-1} \cdot \sin\,(i'n't - int + A - (g-1)\,\theta_{,}')$.

Man erhält auf dieselbe Art den Werth von $\left(\frac{dR}{dq}\right)$.

Gröſse tang $\Phi,'$ ist hingegen zu einer um Eins niedrigern Potenz erhoben; eine Bemerkung, welche derjenigen ähnlich ist, die wir im 69sten Satz über die correspondirende Ungleichheit der Eccentricitäten der Bahnen gemacht haben. Man sieht so, daſs alle diese Ungleichheiten unter einander und mit dem entsprechenden Theil von R durch sehr einfache Verhältnisse verbunden sind.

Differenziirt man die vorhergehenden Ausdrücke von p und von q, und vermehrt man in den Werthen von $\frac{dp}{dt}$ und $\frac{dq}{dt}$, welche daraus entspringen, die Winkel nt und $n't$ um die Ungleichheiten der mittlern Bewegungen, welche vom Winkel $i'n't - int$ abhängen, so werden daraus in diesen Differenzialen Gröſsen entstehen, welche bloſs Functionen der Elemente der Bahnen seyn werden, und welche einen sehr merklichen Einfluſs auf die Sekularänderungen der Neigungen und der Knoten haben können, ob sie gleich von der Ordnung der Quadrate der stöhrenden Massen sind; dies ist dem, was wir im 69sten Satz über die Sekularänderungen der Eccentricitäten und der Sonnennähen gesagt haben, ähnlich.

72. Wir haben nur noch die Aenderung der Länge der Epoche ε zu betrachten. Man hat nach Satz 64.

$$d\varepsilon = de \, . \left[\left(\frac{dE^{(1)}}{de}\right) . \sin (v - \varpi) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dE^{(2)}}{de}\right) . \sin 2\,(v - \varpi) + \text{etc.}\right]$$
$$- d\varpi \, . \, [E^{(1)} . \cos (v - \varpi) + E^{(2)} . \cos 2\,(v - \varpi) + \text{etc.}] .$$

Setzt man statt $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ u. s. w. ihre Werthe in Reihen ausgedrückt, welche nach den Potenzen von e geordnet sind, welche Reihen man leicht aus dem allgemeinen Ausdruck von $E^{(i)}$ im 16ten Satz schlieſsen kann [162]), so erhält man

$d\varepsilon$

162) Der allgemeine Ausdruck $E^{(i)} = \pm \frac{2\,e^i\,(1 + i\,.\,\sqrt{1 - e^2})}{(1 + \sqrt{1 - e^2})^i}$ giebt $E^{(1)} = -2\,e$, und wenn man die Wurzelgröſse durch den Binomischen Lehrsatz auflöst und die höhern Potenzen von e vernachlässigt, so ist

$E^{(i)}$

$$d\varepsilon = -2de.\sin(v-\varpi) + 2ed\varpi.\cos(v-\varpi)$$
$$+ ede.[\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}e^2+\text{etc.}]\sin 2(v-\varpi) - e^2d\varpi.[\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{4}e^2+\text{etc.}]\cos 2(v-\varpi)$$
$$- e^2de.[1+\text{etc.}]\sin 3(v-\varpi) + e^3d\varpi.[1+\text{etc.}]\cos 3(v-\varpi) + \text{etc.}$$

Substituirt man statt de und $ed\varpi$ ihre im 67sten Satz gegebenen Werthe, so erhält man, wenn man die Genauigkeit nur bis zu den Gröſsen von der Ordnung e^2, mit eingeschlossen, treibt,

$$d\varepsilon = \frac{a^2ndt}{\mu}.\sqrt{1-e^2}\,[2-\tfrac{3}{2}e.\cos(v-\varpi)+e^2.\cos 2(v-\varpi)].\left(\frac{dR}{dr}\right)$$
$$-\frac{andt}{\mu.\sqrt{1-e^2}}.e.\sin(v-\varpi)\,[1+\tfrac{1}{2}e.\cos(v-\varpi)].\left(\frac{dR}{dv}\right).$$

Der allgemeine Ausdruck von $d\varepsilon$ enthält Glieder von der Form $m'k.ndt.\cos(i'n't-int+A)$, und folglich enthält der Ausdruck von ε Glieder von der Form $\frac{m'kn}{i'n'-in}.\sin(i'n't-int+A)$; man kann sich aber leicht überzeugen, daſs der Koefficient k in diesen Gliedern von der Ordnung $i'n'-in$ ist, und daſs also diese Glieder und die Glieder der mittlern Länge, welche von dem nämlichen Winkel abhangen, von derselben Ordnung sind. Da nun die Glieder der mittlern Länge das Quadrat von $i'n'-in$ zum Divisor haben, so sieht man, daſs man in Rücksicht auf sie die entspre-

$$E^{(i)} = \pm 2e^i\,[(i+1)-\tfrac{1}{2}ie^2+\ldots](2-\tfrac{1}{2}e^2\ldots)^{-i} \text{ oder}$$

$$E^{(i)} = \pm 2e^i\,[(i+1)-\tfrac{1}{2}ie^2\ldots](2^{-i}+i2^{-i}e^2\ldots) \text{ oder}$$

$$E^{(i)} = \pm\frac{i+1}{2^{i-1}}e^i \pm \frac{(2i+1)i}{2^i}e^{i+2}\ldots$$

Hieraus erhält man

$$\left(\frac{dE^{(i)}}{de}\right) = \pm\frac{i.(i+1)}{2^{i-1}}e^{i-1} \pm \frac{(2i+1).i.(i+2)}{2^i}e^{i+1}\ldots$$

wo die obern Zeichen gelten, wenn i gerade ist, die untern, wenn i ungerade ist.

chenden Glieder von ε vernachlässigen kann, wenn $i'n' - in$ eine sehr kleine Gröſse ist.

Setzt man in den Gliedern des Ausdrucks von $d\varepsilon$, welche bloſs Functionen der Elemente der Bahnen sind, statt dieser Elemente die Sekulartheile ihrer Werthe, so ist klar, daſs man beständige Glieder und andere Glieder erhalten wird, welche mit den Kosinus und Sinus der Winkel, wovon die Sekularänderungen der Eccentricitäten und Neigungen der Bahnen abhängen, verbunden sind. Die beständigen Glieder werden im Ausdruck von ε Glieder hervorbringen, welche im Verhältniſs der Zeit wachsen, und dadurch mit der mittlern Bewegung von m sich vermischen werden. Die mit Sinus und Kosinus afficirten Glieder aber werden durch die Integration im Ausdruck von ε sehr kleine Theiler erhalten, welche mit den stöhrenden Kräften von derselben Ordnung seyn werden, so daſs diese Glieder, welche zu gleicher Zeit mit diesen Kräften multiplicirt und dividirt sind, beträchtlich werden können, ob sie gleich von der Ordnung der Quadrate und der Producte der Eccentricitäten und der Neigungen sind. Wir werden in der Theorie der Planeten sehen, daſs diese Glieder bey ihnen unmerklich sind; sie sind aber in der Theorie des Monds und der Jupiters-Satelliten sehr merklich, und ihre Sekulargleichungen hängen von diesen Gliedern ab.

Man hat im 65sten Satz gesehen, daſs die mittlere Bewegung von m durch $\frac{3}{\mu} . \iint a n d t . dR$ ausgedrückt wird, und daſs dR bloſs periodische Gröſsen enthält, wenn man nur auf die erste Potenz der stöhrenden Massen Rücksicht nimmt. Betrachtet man aber die Quadrate und Producte dieser Massen, so kann dieses Differenzial Glieder enthalten, welche bloſs Functionen der Elemente der Bahnen sind. Substituirt man in ihnen statt dieser Elemente die Sekulartheile ihrer Werthe, so werden daraus Glieder entstehen, welche in die Sinus und Kosinus der Winkel, von welchen die Sekularänderungen der Bahnen abhängen, multiplicirt sind. Diese Glieder werden durch die doppelte Integration im Ausdruck der mittlern Bewegung sehr kleine Divisoren erhalten, welche von der Ordnung der Quadrate und Producte der stöhrenden Massen seyn werden. Da

also diese Glieder zu gleicher Zeit durch die Quadrate und Producte dieser Massen multiplicirt und dividirt werden, so können sie bemerkbar werden, ob sie gleich von der Ordnung der Quadrate und der Producte der Eccentricitäten und der Neigungen der Bahnen sind. Wir werden sehen, daſs auch diese Glieder in der Theorie der Planeten unmerklich sind.

73. Hat man die Elemente der Bahn von *m* nach dem Vorhergehenden bestimmt, so wird man sie in die im 22sten Satz gegebenen Ausdrücke des Radius vectors, der Länge und der Breite substituiren; man erhält so die Werthe dieser drey veränderlichen Gröſsen, durch welche die Astronomen die Lage der himmlischen Körper bestimmen. Verwandelt man hernach diese Werthe in Reihen von Sinus und Kosinus, so wird man eine Reihe Ungleichheiten erhalten, über welche man Tafeln verfertigen wird, und man wird dann leicht für jeden Augenblick die Lage des Körpers *m* berechnen können.

Diese auf die Variation der Parameter gegründete Methode ist sehr nützlich in der Aufsuchung der Ungleichheiten, welche durch die Verhältnisse der mittlern Bewegungen der Körper des Systems kleine Divisoren erhalten, und dadurch sehr beträchtlich werden. Diese Gattung von Ungleichheiten wirkt vorzüglich auf die elliptischen Elemente der Bahnen; bestimmt man daher die Aenderungen, welche daraus in diesen Elementen entstehen, und substituirt man sie im Ausdruck der elliptischen Bewegung, so erhält man auf die einfachste Art alle Ungleichheiten, welche durch diese Divisoren bemerkbar werden.

Die vorhergehende Methode ist auch in der Theorie der Kometen nützlich; wir werden diese Gestirne nur in einem sehr kleinen Theil ihres Laufs gewahr, und die Beobachtungen geben nur den Theil der Ellipse zu erkennen, welcher mit dem Bogen der Bahn, welchen sie während ihrer Sichtbarkeit beschreiben, zusammenfällt. Bestimmt man also die Natur der Bahn, indem man sie als eine veränderliche Ellipse betrachtet, so erhält man die Aenderungen, welche diese Ellipse in dem Zwischenraum von zwey auf einander folgenden Erscheinungen desselben Kometen erfährt; man wird dann seine Zurückkunft

ankündigen, und wenn er wieder erscheint, die Theorie mit den Beobachtungen vergleichen können.

Nachdem wir die Methoden und Formeln gegeben haben, durch allmählige Näherungen die Bewegungen der Schwerpunkte der himmlischen Körper zu bestimmen, so sind nur noch die Anwendungen auf die verschiedenen Körper des Sonnensystems übrig. Da aber die elliptische Gestalt dieser Körper einen merklichen Einfluſs auf die Bewegung verschiedener unter ihnen hat, so müssen wir vor den numerischen Anwendungen uns mit der Gestalt der himmlischen Körper beschäftigen, deren Betrachtung übrigens an sich selbst eben so interessant ist, als die Untersuchung ihrer Bewegungen.

Ende des ersten Bandes.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Laplace, Pierre Simon <<de>>,

Mechanik des Himmels

Bd.: Erster Theil

1800

Coburg, Landesbibliothek -- Cas A 3986
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11929557-0